REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

Mathématiques

4éme année de l'enseignement secondaire

Section Mathématiques
TOME 2

Hikma Smida
Professeur universitaire

Mohamed Sakrani
Professeur Principal

Taoufik Charrada
Inspecteur

Ridha Bouida
Professeur Principal hors classe

Mourad El Arbi
Professeur Principal

Khadija Kaâniche Ben Messaoud
Inspecteur Principal

Nabil Mziou
Inspecteur

Evaluateurs

Néjiba Mhammdi
Inspecteur

Ali Béji Hammas
Inspecteur

Centre National Pédagogique

Remerciements

Les auteurs remercient toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce manuel, et en particulier

Madame Néjiba MHAMDI, Messieurs Abdennibi ACHOUR, Belhassen DAHMEN et Ali Béji HAMMAS pour leurs critiques, leurs conseils pertinents et leurs modifications judicieuses.

Mesdames Imène GHDAMSI et Leila YOUSSEF pour leur contribution et leur disponibilité.

Mesdames Souad TOUNSI, Fatma TANGOUR, Fatma ZGHAL, Hédia OUESLATI, Messieurs Hédi BAKLOUTI, Majdi BEN BADR et Adel ZARGOUNI pour leurs conseils pertinents et leurs remarques judicieuses.

Les membres de l'équipe d'édition du CNP pour leur grande compétence et leur patience.

Les auteurs

Préface

Ce manuel comprend dix chapitres. Chaque chapitre comprend trois rubriques : Cours, QCM-Vrai ou faux et Exercices et problèmes.

La rubrique ***Cours*** *comprend*
- *des activités visant à permettre aux élèves de développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à démontrer,*
- *les résultats du cours à retenir,*
- *des exercices et problèmes résolus.*

La rubrique ***QCM*** *vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.*
La rubrique ***Vrai ou faux*** *vise à l'apprentissage progressif des règles logiques.*

La rubrique ***Exercices et problèmes*** *comprend des exercices et problèmes visant à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.*

Sommaire

Chapitre 1

Nombres complexes

A partir de la deuxième moitié du XVIIe, les géomètres utilisent de façon de plus en plus courante le symbole -1 dans les identités algébriques et les recherches relatives aux résolutions d’équations.
En 1740, Euler donne la formule $\cos x = \frac{1}{2}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$, et en 1748, la formule $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x$, x est réel.
Dontzig dit de cette dernière qu’elle contient "les symboles les plus importants, union mystérieuse dans laquelle l’arithmétique est représentée par 0 et 1, l’algèbre par -1 , la géométrie par p et l’analyse par e".
(Dalmedico et al, Une histoire des mathématiques, 1986).

Cauchy ne se ralliera explicitement à la représentation géométrique des nombres complexes qu’en 1874. […] et s’est convaincu que la "notion de quantité géométrique […] comprendra comme cas particulier la notion de quantité algébrique.

Chapitre 1

Nombres complexes

I. Rappels et compléments

I. 1 Définition et opérations sur les nombres complexes

Activité 1

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$(2-2i)(1+i)^2$; $\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)$; $(1+i)^4(1-i)^{20}$.

Théorème et définition (rappel)

Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les propriétés ci-dessous.

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
2. Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2=-1$.
3. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
4. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z=a+ib$, où a et b sont des réels.

Conséquences

Soit $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$, où a, a', b et b' sont des réels. Alors

$z=z'$, si et seulement si, $a=a'$ et $b=b'$.

$z=0$, si et seulement si, $a=b=0$.

z est réel, si et seulement si, $b=0$.

z est imaginaire, si et seulement si, $a=0$.

Activité 2

Soit les nombres complexes $z=1+2i$ et $z'=i$.

1. Donner l'écriture cartésienne de zz', $(zz')^2$, $(zz')^3$, $(zz')^4$, ainsi que de leurs conjugués.

2. Donner l'écriture cartésienne de $\frac{z}{z'}$, $\left(\frac{z}{z'}\right)^3$, ainsi que de leurs conjugués.

Soit $z=a+ib$, où a et b sont des réels.
Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z}=a-ib$.

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n$; $n\in\mathbb{N}^*$

- Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z',

$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\dfrac{1}{z'^n}\right)}=\dfrac{1}{\left(\overline{z'}\right)^n}$, $n\in\mathbb{Z}$.

- $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$; $z-\overline{z}=2i\ \mathrm{Im}(z)$; $z\overline{z}=\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2+\left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$.
- $z=\overline{z}$, si et seulement si, z est réel.
- $z=-\overline{z}$, si et seulement si, z est imaginaire.

I. 2 Affixe d'un point, affixe d'un vecteur

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives i, $2i$, $1+2i$.
2. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
3. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport au point O.
4. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées
5. Donner les affixes des vecteur $\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}$, $-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
6. Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ABC.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

L'affixe d'un point $M(a,b)$ du plan est le nombre complexe $z=a+ib$ noté $\mathrm{Aff}(M)$ ou z_M.

On dit aussi que le point $M(a,b)$ est l'image de z.

Soit $\vec{w}$ un vecteur et M et N deux points tels que $\vec{w}=\overrightarrow{MN}$. Alors l'affixe du vecteur $\vec{w}$ est le nombre complexe z, noté $\mathrm{Aff}\left(\vec{w}\right)$, vérifiant $z=z_N-z_M$.

Pour tous vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ et tous réels α et β,

$\mathrm{Aff}(\alpha\vec{w}+\beta\overrightarrow{w_1})=\alpha\mathrm{Aff}(\vec{w})+\beta\mathrm{Aff}(\overrightarrow{w_1})$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe $2-2i$ et M un point d'affixe z.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M appartienne à la droite (OA).
2. En déduire l'ensemble des points M d'affixe $z=k(2-2i)$, $k\in\mathbb{R}$.

Propriété

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}$ est non nul.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est réel.

Démonstration

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}$ non nul.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, il existe un réel α tel que $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{w_1}$.

La relation $\overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{w_1}$ équivaut à $\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{w}\right) = \alpha\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{w_1}\right)$, ou encore à $\dfrac{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{w}\right)}{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{w_1}\right)} = \alpha$.

Le théorème en découle.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 2\left(z + \overline{z}\right) + i\overline{z}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M', images des points M d'abscisse nulle.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M', images des points M d'ordonnées nulles.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe $1 + 2i$ et M un point d'affixe z.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M appartienne à la perpendiculaire à la droite (OA) en O.
2. En déduire l'ensemble des points M d'affixe $z = ik(1 + 2i)$, $k \in \mathbb{R}$.

Propriété

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}$ est non nul.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux , si et seulement si, $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est imaginaire.

Démonstration

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1}$ est non nul. On désigne par

$z_{\overrightarrow{w}} = a + bi$ et $z_{\overrightarrow{w_1}} = a' + b'i$ avec a, b, a′ et b′ réels, les affixes respectives de $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $aa' + bb' = 0$.

Or, $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}} = \dfrac{a+bi}{a'+b'i} = \dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2} = \dfrac{aa'+bb'+(a'b-ab')i}{a'^2+b'^2}$.

On en déduit que $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est imaginaire.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-i}{z-1}$ soit imaginaire.

I. 3 Module d'un nombre complexe

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Vérifier que le triangle OAB est isocèle en O.
2. On désigne par D le point tel que OADB soit un losange. Déterminer l'affixe de D.

> Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
> Soit $z = a + ib$ et $M(a, b)$ le point d'affixe z.
> On appelle module de z le réel positif, noté $|z|$, défini par $|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.
> Pour tous points M et N d'affixes z_M et z_N, $|z_N - z_M| = MN$.

Activité 2

Soit $z = 2 - i$ et $z' = -3 + 4i$.

Calculer les modules de $z + z'$; zz' ; $\dfrac{z}{z'}$; z^4 ; $(\overline{z}z')^2$.

Propriétés

> Soit deux nombres complexes z et z′.
> $|z| = 0$, si et seulement si, $z = 0$; $|z + z'| \le |z| + |z'|$; $|kz| = |k||z|$, $k \in \mathbb{R}$.
> $|zz'| = |z||z'|$; $|\overline{z}| = |z|$; $|z|^2 = z\overline{z}$; $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;
> $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$, $z \neq 0$; $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$, $z \neq 0$; $\left|\dfrac{1}{z^n}\right| = \dfrac{1}{|z|^n}$, $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z-1+2i|=2$.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z+2-i|=|\bar{z}-2+2i|$.
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|2z+2-i|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|iz+2+i|=2$.

I. 4 Argument d'un nombre complexe non nul

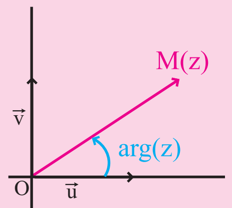
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A=-i$, $z_B=4$, $z_C=2+2i$ et $z_D=-1+i$.
2. Soit A_1, B_1, C_1 et D_1 les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à l'axe des abscisses.
Déterminer un argument de chacun de leurs affixes.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit z un nombre complexe non nul et M son image.
On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ toute mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)$.



4. Reprendre la question précédente pour les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à O.
5. Reprendre la question précédente pour les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à l'axe des ordonnées.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z'=2\left(z-\bar{z}\right)+2iz$.

1. a. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\arg(z)\equiv 0\ [2\pi]$.
   b. Déterminer et construire l'ensemble des points M', images par f des points M tels que $\arg(z)\equiv 0\ [2\pi]$.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M', images par f des points M tels que $\arg(z)\equiv \pi\ [2\pi]$.
3. Déterminer et construire l'ensemble des points M', images par f des points M tels que $\arg(z)\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit M un point distinct de O tel que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

On désigne par M_1, M_2 et M_3 les symétriques respectifs de M par rapport à l'axe des abscisses, au point O et à l'axe des ordonnées.

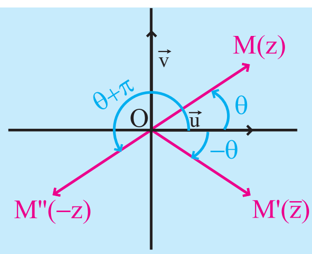
Déterminer $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}})$; $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_2}})$; $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_3}})$ à l'aide de θ.

Propriétés

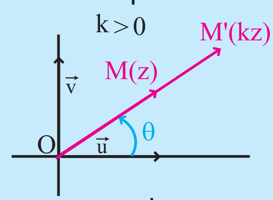
Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul.

$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

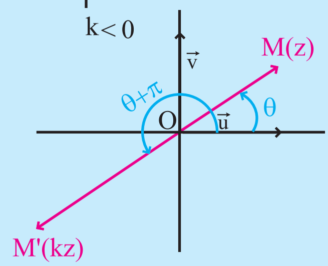
$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$.



Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z)\ [2\pi]$.



Si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$.



I. 5 Ecriture trigonométrique

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soit $z = -2\sqrt{3} + 2i$.

Déterminer l'écriture trigonométrique de z et placer le point d'affixe z.

En déduire l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes $\bar{z}$, $-z$, $\frac{1}{2}z$ et $-\frac{3}{2}z$, puis placer leurs points images.

Soit z un nombre complexe non nul tel que $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

L'écriture précédente est appelée écriture trigonométrique de z.

Si M est l'image de z dans le repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ alors M appartient au cercle de centre O et de rayon $|z|$ et à la demi droite $[OB)$ telle que $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Activité 2

Soit les nombres complexes $z = \dfrac{\sqrt{3} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = \dfrac{1 - i\sqrt{2}}{2}$.

Donner une valeur approchée de leurs arguments à 10^{-2} près.

Soit z un nombre complexe non nul tel $z = a + ib$, a et b des réels.
Alors $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$, si et seulement si,
$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 4$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
2. Donner les écritures trigonométriques de z_A, z_B et z_C.
3. Soit D le point tel que OABD est un parallélogramme.
   Donner l'écriture trigonométrique de l'affixe z_D de D.
4. Soit K l'image de C par le quart de tour direct de centre O.
   Donner l'écriture trigonométrique de l'affixe z_K de K.

I. 6 Propriétés d'un argument d'un nombre complexe non nul

Activité 1

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = |z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

1. Donner les écritures trigonométriques de zz', $\dfrac{1}{z}$ et $\dfrac{z'}{z}$.
2. a. Montrer par récurrence, sur l'entier naturel n, que $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $z^{-n} = |z|^{-n}(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta))$.

Propriétés

Soit deux nombres complexes non nuls z et z'.

$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$.

$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

$\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$.

$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Pour tout nombre complexe non nul z et tout entier n, $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

La formule précédente est appelée formule de Moivre.

Activité 2

Donner l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$$(1+i)^6 \;;\; (1-i)^9 \frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(\sqrt{3}-i\right)^8} \;;\; \left(2\sqrt{3}-2i\right)^6\left(1+i\sqrt{3}\right)^3.$$

Exercice résolu 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit M_1 le point d'affixe $z=1-i$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par M_n le point d'affixe z^n.

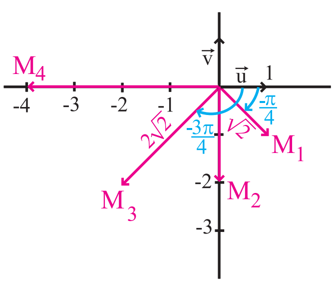
1. Donner l'écriture trigonométrique de z^n , $n \geq 1$.
2. Construire les points M_1, M_2 , M_3 et M_4.
3. Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n soient sur la droite d'équation $y=x$. Le point M_{2071} appartient-il à la droite d'équation $y=x$?

Solution

1. On peut écrire $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

   On déduit alors de la formule de Moivre que $z^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{4}\right)\right)$.

2. Le point M_1 a pour affixe $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.



Par suite M_1 est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ avec la demi-droite $[OA_1)$ telle que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA_1}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Le point M_2 a pour affixe $z^2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Par suite M_2 est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon 2 avec la demi-droite $[OA_2)$ telle que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA_2}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Le point M_3 a pour affixe $z^3=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Par suite M_3 est le point d'intersection du cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ avec la demi-droite $[OA_3)$ telle que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA_3}}\right) \equiv -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

Le point M_4 a pour affixe $z^4 = 4(\cos\pi + i\sin\pi) = -4$.

3. Un point M_n appartient à la droite d'équation $y = x$, si et seulement si,

$\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_n}}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_n}}\right) = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Par suite M_n appartient à $D : y = x$, si et seulement si,

$-\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $-\frac{n\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

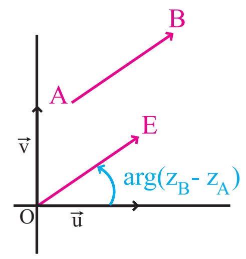
On en déduit que M_n appartient à D, si et seulement si, $(n+1)$ est multiple de 8 ou $(n+5)$ est multiple de 8. L'entier 2072 étant divisible par 8, on en déduit que M_{2071} appartient à D.

I. 7 Angles orientés et nombres complexes

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B.



1. En considérant le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OE}$, montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$.
2. Soit C et D deux points distincts.
   a. Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{CD}}\right) - \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right)\ [2\pi]$
   b. En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

Théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit A , B, C et D des points d'affixes respectives z_A , z_B, z_C et z_D et tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$.

Alors $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

Conséquence

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{CD}{AB}(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ avec } \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \theta\ [2\pi].$$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe 1, B le point d'affixe i.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z - i) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

2. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Exercice résolu 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit A le point d'affixe $2 - i$.

Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$\arg\left((z - 2 + i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Solution

On sait qu'un argument n'est défini que pour un nombre complexe non nul.

Par suite la relation $\arg\left((z - 2 + i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ n'a de sens que si M est distinct de A.

De plus, $\arg\left((z - 2 + i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, si et seulement si, $3\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que

$\arg\left((z - 2 + i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, si et seulement si, $\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

Remarquons que

$\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, si $k = 3n, n \in \mathbb{Z}$.

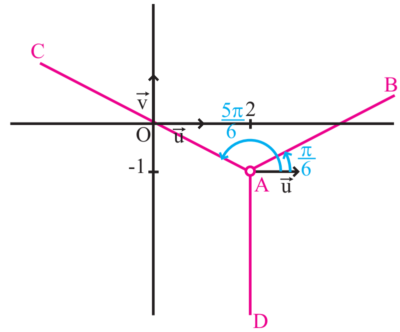
$\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$, si $k = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}$.

$\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$, si $k = 3n + 2, n \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que, $\arg\left((z - 2 + i)^3\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, si et seulement si, $\arg(z - 2 + i) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $\arg(z - 2 + i) \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $\arg(z - 2 + i) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$.

De plus, $\arg(z - 2 + i) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}\right)\ [2\pi]$.

L'ensemble cherché est donc la réunion de trois demi droites $[AB)$, $[AC)$ et $[AD)$ privées de A telles que
$\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$, $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$ et
$\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$.



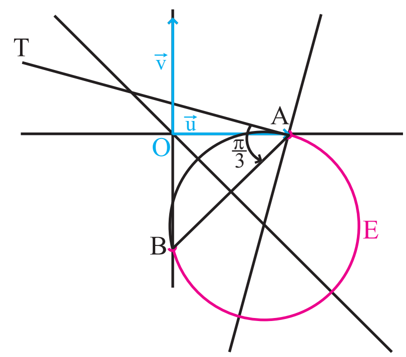
Exercice résolu 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer et construire l'ensemble E des points M d'affixe z tels que
$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Solution

Soit M un point d'affixe z tel que $z \neq 1$ et $z \neq -i$, alors
$\arg\left(\frac{z+i}{z-1}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)\ [2\pi]$ où A et B sont les points d'affixes respectives 1 et $-i$.
Par suite, M est un point de l'ensemble E, si et seulement si, $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
Ainsi, l'ensemble E est l'arc $\overset{\frown}{BA}$, privé des points A et B, du cercle $\mathscr{C}$ passant par A et B et tangent en A à la demi-droite $[AT)$ définie par $\left(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.



II. Ecriture exponentielle d'un nombre complexe non nul

Activité 1

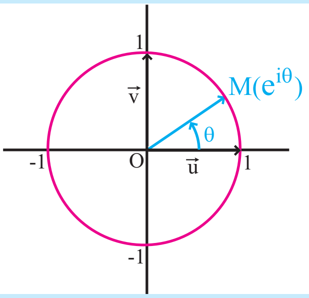
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$ et $z_C = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.
   a. Donner les écritures trigonométriques de z_A, z_B et z_C.
   b. En déduire que les points A, B et C appartiennent au cercle trigonométrique.
2. Soit les points E, F et G du cercle trigonométrique tels que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OE}}\right) \equiv -\frac{3\pi}{2}\ [2\pi]$,
   $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OF}}\right) \equiv \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OG}}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.
   Donner les écritures trigonométriques de leurs affixes.

Notation

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, un point M appartient au cercle trigonométrique, si et seulement si, il a pour affixe $z = e^{i\theta}$, où $\theta \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$.



Conséquences

$e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$, $e^{i\pi} = -1$.

Pour tout réel θ et tout entier k, $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$.

Pour tout réel θ, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On donne les nombres complexes $z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z' = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

1. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes $-z$, $\bar{z}$, zz', $\frac{1}{z}$, $\frac{z}{z'}$ et z^n, $n \in \mathbb{Z}$.
2. Ecrire sous la forme $e^{i\theta}$ les nombres complexes zz', $\bar{z}$, $\frac{z}{z'}$, z^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Les propriétés ci-dessous découlent des propriétés de l'argument du produit, de l'inverse ou du quotient de deux nombres complexes non nuls.

Propriétés

Soit deux réels θ et θ'.

$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$.

Exercice résolu 4

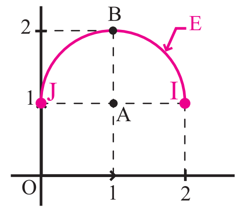
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère le nombre complexe $z = 1 + i + e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$ et on désigne par E l'ensemble des points M du plan d'affixe z.

1. Vérifier que le point B d'affixe $z_B = 1+2i$ appartient à E.
2. Déterminer l'ensemble E.

Solution

1. On sait que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. On peut alors écrire $z_B = 1 + 2i = 1 + i + e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Ce qui prouve que B appartient à l'ensemble E.
2. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i$ et M un point du plan complexe d'affixe z.
M appartient à E, si et seulement si, $z - z_A = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$.
On déduit alors, des relations $|z - z_A| = AM$ et $\arg(z - z_A) \equiv \widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AM})}\ [2\pi]$,
que M appartient à E si, et seulement si, $AM = 1$ et $\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{AM})} \equiv \theta\ [2\pi]$, où θ est un réel de $[0, \pi]$.
L'ensemble E est donc le demi-cercle de diamètre [IJ] avec I(2, 1), J(0, 1) et contenant le point B.



Activité 3

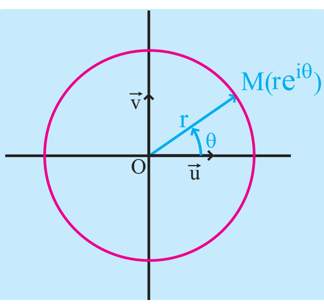
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
1. Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes

$$z_1 = 2i,\ z_2 = -3i,\ z_3 = -\frac{5}{2},\ z_4 = \sqrt{3}(1+i) \text{ et } z_5 = \frac{-2\sqrt{3} + 2i}{5}.$$

2. Ecrire chacun des nombres complexes précédents sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$.

Théorème et définition

Tout nombre complexe non nul z, s'écrit sous la forme
$z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.
L'écriture $z = re^{i\theta}$, $r > 0$ est appelée écriture exponentielle de z.



Activité 4

On considère les deux nombres complexes $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = -1 + i$.
Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes z, $\bar{z}$, z', $\bar{z'}$, zz', $\frac{1}{z}$, z^5, $\frac{z}{z'}$ et z'^2.

Activité 5

1. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z = \sqrt{3} - i$ et $z' = 1 + i$.
2. En déduire l'écriture cartésienne de $\dfrac{(1+i)^{14}}{\left(\sqrt{3} - i\right)^8}$.

Activité 6

1. Vérifier que pour tout réel θ, $1+e^{i\theta}=(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}})e^{i\frac{\theta}{2}}$.

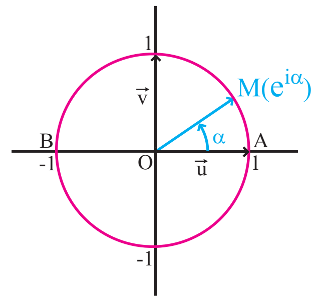
2. Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes $z=1+e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $z'=1+e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

Activité 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.

On considère un point M d'affixe $z=e^{i\alpha}$, avec $\alpha\in]0,\ \pi[$.



1. Donner, à l'aide de α, la mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}})$ et l'expression de AM.
2. Donner, à l'aide de α, la mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})$ et l'expression de BM.
3. En déduire le module et un argument de chacun des nombres complexes $Z_1=1+z$ et $Z_2=1-z$.

III. Equation $z^n=a, n\geq 1, a\in\mathbb{C}^*$

Activité 1

1. Soit z un nombre complexe non nul d'argument $\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$. Montrer que
   a. si $k=3n$, alors $\arg(z)\equiv 0\ [2\pi]$,
   b. si $k=3n+1$, alors $\arg(z)\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$,
   c. si $k=3n+2$, alors $\arg(z)\equiv\frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$.
2. Dans cette question, on se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3=1$.
   a. Montrer que z est une solution de (E), si et seulement si, $z=e^{\frac{2ik\pi}{3}}$, $k\in\mathbb{Z}$.
   b. Déduire de la première question que (E) possède exactement trois solutions distinctes.
3. Soit n un entier naturel non nul. Donner les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^n=1$.

Théorème et définition

Pour tout entier naturel non nul n, l'équation $z^n=1$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par $z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, l'entier k appartenant à $\{0,1,\ldots,(n-1)\}$.

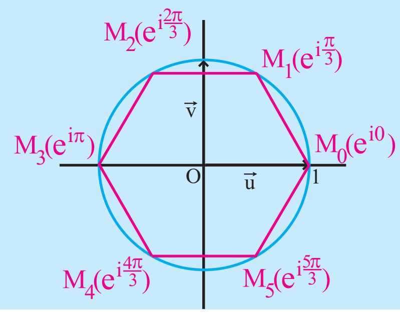
Les solutions de l'équation $z^n=1$ sont appelées racines nièmes de l'unité.

Conséquence

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Les points images des racines sixièmes de l'unité



Activité 2

On pose $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. Vérifier que j est une racine cubique de l'unité.
2. Vérifier les égalités suivantes $j^3 = 1$, $j^2 = \bar{j}$ et $1 + j + j^2 = 0$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $j^{3n} = 1$, $j^{3n+1} = j$ et $j^{3n+2} = \bar{j}$.

Exercice résolu 5

1. Vérifier que pour tout nombre complexe z, $(z-1)\left(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1\right) = z^5 - 1$.
2. En déduire les solutions z_1, z_2, z_3 et z_4 de l'équation $(E): z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
3. a. Ecrire z_2, z_3 et z_4 à l'aide de z_1.

   b. En déduire les valeurs de $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ et $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} + \dfrac{1}{z_4}$.

Solution

1. Il suffit de développer le premier membre.
2. Pour $z \neq 1$, $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \dfrac{z^5 - 1}{z - 1}$.

L'équation (E) équivaut à $z^5 - 1 = 0$ et $z \neq 1$.

Il en résulte que les solutions de (E) sont les racines $5^{\text{ème}}$ de l'unité autres que 1, à savoir

$z_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = e^{i\frac{6\pi}{5}}$ et $z_4 = e^{i\frac{8\pi}{5}}$.

3. a. Il découle de la question précédente que $z_2 = z_1^2$, $z_3 = z_1^3$ et $z_4 = z_1^4$.

   b. En remarquant que $z_1 + z_1^2 + z_1^3 + z_1^4 = -1$, on déduit de la question précédente que $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1$.

Il est facile de vérifier, compte tenu de la question 3.a, que

$$z_1^5\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}\right)=z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4.$$

Les égalités $z_1{}^5=1$ et $z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4=-1$ impliquent que $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_4}=-1$.

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $\left(\frac{z}{1+i}\right)^2=1$.

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2=2i$.

Activité 4

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3=8i$.

1. Montrer que z est une solution de (E), si et seulement si, $\dfrac{z}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$ est une racine cubique de l'unité.
2. En déduire que l'équation (E) possède exactement trois solutions.

   Vérifier que les solutions de (E) sont $z_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$,

   où k est un entier appartenant à $\{0,\ 1,\ 2\}$.

Théorème et définition

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et n un entier naturel non nul.
L'équation $z^n=a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par
$z_k=r\ e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k\in\{0,\ 1,\dots,\ n-1\}$, où r est le réel strictement positif tel que $r^n=|a|$.
Ces solutions sont appelées les racines nièmes du nombre complexe a.

Démonstration

Posons $a=|a|\ e^{i\theta}$. Considérons le réel $r>0$ tel que $r^n=|a|$.

On peut alors écrire $a=r^n\left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$.

Il en résulte que l'équation $z^n=a$ est équivalente à l'équation $\left(\dfrac{z}{re^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n=1$.

On en déduit que z est solution de l'équation $z^n = a$, si et seulement si, $\dfrac{z}{re^{i\frac{\theta}{n}}}$ est une racine nième de l'unité.

Par conséquent, l'équation $z^n = a$ admet n solutions distinctes de la forme

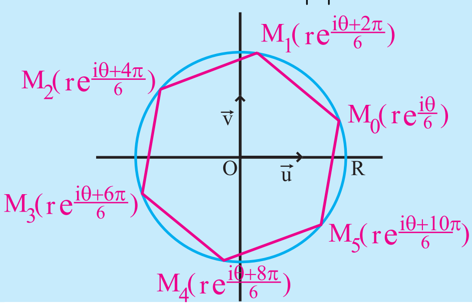
$z_k = re^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, où r est le réel tel que $r^n = |a|$.

Conséquence

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon r tel que $r^n = |a|$.

Les points images des solutions de l'équation $z^6 = |a|e^{i\theta}$



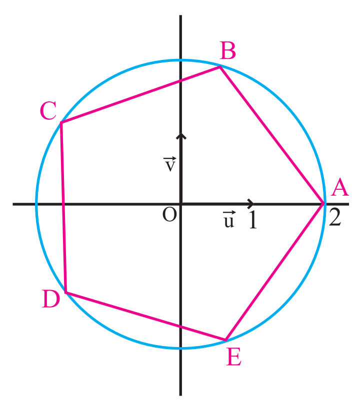
Activité 5

Déterminer les racines carrées, puis les racines quatrièmes du nombre complexe $u = -1 + i\sqrt{3}$.

Activité 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la figure ci-contre ABCDE est un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 2 et A(2, 0).



1. Donner les affixes des points B, C, D et E.
2. Déterminer dans chacun des cas ci-dessous l'ensemble des points d'affixe z tels que
   a. $\arg(z) \equiv \dfrac{4\pi}{5}\ [2\pi]$;
   b. $\arg(\bar{z}) \equiv \dfrac{2\pi}{5}\ [2\pi]$;
   c. $\arg(-2z) \equiv \dfrac{3\pi}{5}\ [2\pi]$.

Activité 7

Soit le nombre complexe $z = \sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

1. Déterminer le module et un argument de z^2.
2. En déduire l'écriture trigonométrique de z.

IV. Résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation $az^2+bz+c=0,\ a\neq 0$

Activité 1 **Recherche des racines carrées d'un nombre complexe par une méthode algébrique**

Soit le nombre complexe $u=3-4i$.
On se propose de déterminer les racines carrées de u.
Remarquons d'abord que la recherche d'un argument du nombre complexe u ne conduit pas à un angle "remarquable".

Déterminons alors, sous forme algébrique, les solutions de l'équation $z^2=u$.
On pose $z=x+iy$ avec x et y deux nombres réels.

1. Montrer que l'équation $z^2=u$ équivaut à $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=-4 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$.

2. Vérifier que les couples (x, y) solutions de ce système sont $(2,\ -1)$ et $(-2, 1)$.

3. Conclure.

Activité 2

Déterminer, dans chaque cas, les racines carrées de $u=-8+6i$ et $u=1-2\sqrt{2}i$.

Activité 3

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): z^2+2iz-\frac{7}{4}-i=0$.

1. Montrer que $z^2+2iz-\frac{7}{4}-i=0$, si et seulement si, $(z+i)^2=\frac{3+4i}{4}$.

2. Vérifier que $\left(\frac{2+i}{2}\right)^2=\frac{3+4i}{4}$.

3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Activité 4

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a\neq 0$.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): az^2+bz+c=0$.

1. Montrer que l'équation $az^2+bz+c=0$ est équivalente à l'équation

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

2. On pose $\Delta=b^2-4ac$.

a. Montrer que si $\Delta=0$, alors l'équation (E) admet une unique solution que l'on déterminera.

b. On suppose que $\Delta\neq 0$.

Dans ce cas, le nombre complexe Δ admet deux racines carrées opposées δ et $-\delta$.

Montrer que l'équation $az^2+bz+c=0$ est équivalente à l'équation

$\left(z+\frac{b-\delta}{2a}\right)\left(z+\frac{b+\delta}{2a}\right)=0$. En déduire les solutions de (E).

Cette activité nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a\neq 0$.
L'équation $az^2+bz+c=0$, admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) définies par $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta=b^2-4ac$.

Conséquences

Si z_1 et z_2 sont les solutions de $az^2+bz+c=0$, $a\neq 0$, alors
$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$, $z_1+z_2=\frac{-b}{a}$ et $z_1z_2=\frac{c}{a}$.

Méthode de résolution, dans $\mathbb{C}$, de l'équation (E) : $az^2+bz+c=0,\ a\neq 0$

- Si $c=0$, (E) s'écrit $z(az+b)=0$ et admet comme solutions $z_1=0$ et $z_2=\frac{-b}{a}$.
- Si $b=0$, (E) s'écrit $z^2=\frac{-c}{a}$ et la résolution de (E) se ramène à la recherche des racines carrées du nombre complexe $\frac{-c}{a}$.
- Si $bc\neq 0$, on détermine une racine carrée δ du discriminant $\Delta=b^2-4ac$.
  Les solutions de (E) sont $z_1=\frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations ci-dessous.

a. $z^2-(1-i)z+2-2i=0$.

b. $1+z+z^2=0$.

c. $1-z+z^2=0$.

Activité 6

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant $\begin{cases} z_1+z_2=1+2i, \\ z_1z_2=-1+i. \end{cases}$

V. Exemples d'équations de degré supérieur ou égal à 3

Activité 1

Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0,\ n \geq 2$.

Soit $f : z \mapsto a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0,\ z \in \mathbb{C}$.

Soit (E) l'équation $f(z) = 0$.

1. Montrer que si z_0 est une solution de (E), alors pour tout nombre complexe z,
$f(z) = 0$ équivaut à $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z = a_n z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + ... + a_1 z_0$.
2. En déduire que si z_0 est une solution de (E), alors (E) est équivalente à l'équation

$(z - z_0)g(z) = 0$, où g(z) est de la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + ... + b_0$,

avec $b_0, b_1, ..., b_{n-2}$ complexes.

Théorème

Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0,\ n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.

Si z_0 est un zéro de P, alors $P(z) = (z - z_0)g(z)$, où g(z) est de la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + ... + b_0$, avec $b_0, b_1, ..., b_{n-2}$ complexes.

Exercice résolu 6

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^3 + (1 - 4i)z^2 - (7 + 3i)z + 6i - 2 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire et la déterminer.
2. Résoudre l'équation (E).

Solution

1. Posons $z_0 = iy$ avec y réel.

z_0 est solution de (E) si, et seulement si, $(iy)^3 + (1 - 4i)(iy)^2 - (7 + 3i)iy + 6i - 2 = 0$.

Il suit que, z_0 est solution de (E) si, et seulement si,

$-y^2 + 3y - 2 + i(-y^3 + 4y^2 - 7y + 6) = 0$.

On en déduit que z_0 est solution de (E), si et seulement si, $\begin{cases} -y^2 + 3y - 2 = 0 & (*), \\ -y^3 + 4y^2 - 7y + 6 = 0 & (**). \end{cases}$

L'équation $(*)$ admet deux solutions réelles qui sont 1 et 2. Seul le réel 2 vérifie l'équation $(**)$. Il en résulte que le réel 2 est l'unique solution du système précédent.

On en déduit que $z_0 = 2i$ est l'unique solution imaginaire pure de (E).

Il suit que $z^3 + (1-4i)z^2 - (7+3i)z + 6i - 2 = (z-2i)\left(z^2 + bz + c\right)$, avec b et c des nombres complexes.

Un développement et une identification terme à terme nous donnent $b = 1-2i$ et $c = -3-i$.

L'équation (E) s'écrit alors $(z-2i)\left(z^2 + (1-2i)z - 3 - i\right) = 0$,

ce qui équivaut à $z = 2i$ ou $z^2 + (1-2i)z - 3 - i = 0$.

Les solutions de l'équation $(E_1): z^2 + (1-2i)z - 3 - i = 0$ sont $z_1 = -2+i$ et $z_2 = 1+i$.

Il en résulte que l'équation (E) a pour ensemble de solutions $S = \{2i,\ -2+i,\ 1+i\}$.

Activité 2

Soit $f(z) = z^3 + (2+2i)z^2 + (2+i)z + 3 + i$, où $z \in \mathbb{C}$.

1. Vérifier que $f(i) = 0$.
2. En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $f(z) = 0$.

VI. Nombres complexes et trigonométrie

Théorème

Pour tout réel x et pour tout entier n,

$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$. (Formule de Moivre).

Pour tout réel x,

$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. (Formules d'Euler).

Les formules de Moivre et d'Euler permettent d'établir un grand nombre de formules trigonométriques.

Elles permettent aussi d'exprimer des puissances de $\cos x$ et $\sin x$ à l'aide de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.

Activité 1

Soit k un entier. Montrer que pour tout réel x différent de $(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x} = e^{2ix}$.

Activité 2

1. En utilisant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, montrer que $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$ et $\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$.
2. Exprimer $\cos 4x$ et $\sin 4x$ en fonction de puissances de $\cos x$ et de $\sin x$.

Exercice résolu 7

Linéariser $\sin^5 x,\ x \in \mathbb{R}$.

En transformant une expression contenant une puissance de $\cos x$ ou de $\sin x$ sous une forme qui ne contient aucun produit de fonctions circulaires, on dit qu'on a linéarisé l'expression donnée.

Solution

En utilisant une formule d'Euler, on obtient $\sin^5 x = \dfrac{1}{(2i)^5}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5$.

La formule du binôme de Newton, donne

$\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5 = e^{5ix} - C_5^1\ e^{4ix}e^{-ix} + C_5^2\ e^{3ix}e^{-2ix} - C_5^3\ e^{2ix}e^{-3ix} + C_5^4\ e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}$.

On obtient alors, $\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5 = \left(e^{5ix} - e^{-5ix}\right) - 5\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) + 10\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.

Il en résulte que $\sin^5 x = \dfrac{1}{16}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right)$.

Activité 3

Linéariser $\cos^3 x$, $\sin^3 x$, $\sin^3 x.\cos^4 x$ où x est un réel.

QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit les points $M(z)$ et $M'(z')$.

1. a. La distance MM' est égale à

☐ $|z-z'|$. ☐ $\left||z|-|z'|\right|$. ☐ $|z+z'|$.

b. Si $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$ alors

☐ O, M et M′ sont alignés. ☐ $z = z'$. ☐ $|z| = |z'|$.

2. A, B et C sont trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que $z_B - z_A = 4i(z_C - z_A)$. Alors

☐ ABC est isocèle. ☐ (AB) et (AC) sont perpendiculaires. ☐ (AB) et (AC) sont parallèles.

3. L'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$ a pour solutions

☐ $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 1+i$ ☐ $z_1 = 2i$ et $z_2 = -i$ ☐ $z_1 = 1-i$ et $z_2 = 2+i$

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Une équation du second degrés dans $\mathbb{C}$ admet toujours deux racines opposées.
2. Soit z et a deux nombres complexes non nuls.

   $z^4 = a^4$, si et seulement si, $z = a$ ou $z = -a$.
3. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non réels.

   Le conjugué du nombre complexe $Z = z_1 + iz_2$ est $\overline{Z} = z_1 - iz_2$.
4. Deux nombres complexes non nuls ayant même argument et même partie réelle sont égaux.
5. Soit z un nombre complexe. Si z^3 est réel alors nécessairement z est réel.
6. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

   Si $|z| = |z'|$ alors nécessairement $z = z'$ ou $z = -z'$.

1 Déterminer dans chacun des cas ci-dessous, les nombres complexes z sous forme algébrique.

a. $\dfrac{z-i}{z+i}=2i$.

b. $\dfrac{z+i}{2z}=1-i$.

c. $\dfrac{2z+i}{iz}=\dfrac{2iz}{1-z}$.

2 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Représenter, dans chacun des cas ci-dessous, les points A, B, S, P, I et J d'affixes respectives

z_A, z_B, z_A+z_B , z_Az_B, $\dfrac{1}{z_A}$ et $\dfrac{1}{z_B}$.

a. $|z_A|=3$, $\arg(z_A)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$,

$|z_B|=1$ et $\arg(z_B)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b. $|z_A|=2$, $\arg(z_A)\equiv\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$,

$|z_B|=4$ et $\arg(z_B)\equiv\pi\ [2\pi]$.

3 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit $z\neq -i$ et M le point d'affixe z.

On considère le nombre complexe $Z=\dfrac{z-i}{z+i}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire.

4 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z.

On considère le nombre complexe $Z=\dfrac{z+1}{z}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que Z soit imaginaire.

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit z un nombre complexe.

1. Déterminer et construire l'ensemble

$E=\left\{M(z)\in P \text{ tel que } \left|\dfrac{z-1}{z-i}\right|=1\right\}$.

2. En déduire l'ensemble

$F=\left\{M(z)\in P \text{ tel que } \left|\dfrac{2\bar{z}-2}{\bar{z}-i}\right|=2\right\}$.

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg(z)-\arg(z-1)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$.

7 Donner l'écriture algébrique des nombres complexes $2e^{\frac{3i\pi}{2}}$, $-e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $3e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

8 Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes

a. $\left(3e^{-\frac{i\pi}{5}}\right)^3$, $\dfrac{2e^{\frac{i\pi}{5}}}{3e^{i\pi}}$, $\left(e^{\frac{3i\pi}{8}}\right)^4$ $\left(e^{-i\pi}\right)^3$.

b. $-3+3i$, $2\sqrt{3}-2i$, $(1-i)^5$, $\dfrac{1-i+\sqrt{2}}{1+i+\sqrt{2}}$.

9 Soit le nombre complexe

$a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

1. Donner l'écriture exponentielle de a^2.
En déduire l'écriture exponentielle de a.
2. Donner les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

a. Construire les points A et B d'affixes respectives a et ia^2.

b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixes z tels que $\arg\left(\dfrac{iz+a^2}{z-a}\right)=-\dfrac{11\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Vérifier que O appartient à E. Tracer E.

10 On considère les nombres complexes

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_3 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Donner l'écriture exponentielle de

iz_1, $\frac{z_2}{1+i}$, z_1z_2, $\frac{z_1}{z_2}$, $z_1z_2z_3$, ${z_3}^4$, $\frac{{z_2}^3}{{z_1}^6}$ et $\overline{\frac{z_2}{z_3}}$.

11 Déterminer les racines cubiques de

$4\sqrt{2}(i+1)$.

12 Déterminer les racines quatrièmes de

$8\sqrt{2}(-1-i)$.

13 Déterminer les racines cinquièmes de $32\,i$.

14 Déterminer les racines sixièmes de

$32(i-\sqrt{3})$.

15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations ci-dessous.

a. $z^2 + 18z + 1681 = 0$.

b. $z^2 - (5-i)z + 8 - i = 0$.

c. $z^2 + 4(i-1)z + 2(4-i) = 0$.

d. $z^2 + (1-3i)z - 2(1+i) = 0$.

16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations ci-dessous.

a. $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$.

b. $z^4 + 4z^2 - 77 = 0$.

17 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^3 - 8z^2 + 24z - 32 = 0$.

Vérifier que $z_0 = 4$ est une solution de (E).

2. Résoudre (E).

On notera z_1 la solution de (E) ayant une partie imaginaire positive et z_2 sa solution ayant une partie imaginaire négative.

Déterminer la forme exponentielle de z_1 et z_2.

18 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0$.

1. Montrer que l'équation admet une racine réelle que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

19 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^3 = 2 + 11\,i$.

1. Vérifier que $z_0 = 2 + i$ est une solution de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z\overline{z} + 3(z - \overline{z}) = 13 + 18i$, on notera z_1 et z_2 les solutions avec $\mathrm{Re}(z_1) < 0$.
2. Représenter les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2.
3. Déterminer l'affixe du point G centre de gravité du triangle OAB.
4. Déterminer l'affixe du point C pour que OABC soit un parallélogramme.

21 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^3 - (4+i)z^2 + (7+i)z - 4 = 0$.

a. Montrer que l'équation (E) admet une racine réelle que l'on déterminera.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. a. Représenter les points A, B et C d'affixes respectives 1, $2+2i$ et $1-i$.

b. Déterminer le module et un argument de $\frac{2+2i}{1-i}$.

En déduire la nature du triangle OBC.

c. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ?

d. Soit D le point tel que CD = CO et $\widehat{(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CD})} \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Quelle est la nature de OCDB ?

22 1. Déterminer les racines quatrièmes de l'unité.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)+1=0$.

23 Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation
$1+z+z^2+...+z^6=0$.
Calculer $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

24 1. Montrer que pour tout entier $n>0$ et tout nombre complexe z,
$1-z^{n+1}=(1-z)\left(1+z+z^2+...+z^n\right)$.
2. Montrer que pour tout réel θ,
$1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
3. Soit un entier $n\geq 1$ et un réel
$\theta\neq 2k\pi,\ k$ un entier relatif.
On pose $S=1+\cos\theta+\cos 2\theta+...+\cos n\theta$
et $S'=\sin\theta+\sin 2\theta+...+\sin n\theta$.
a. Montrer que $S+iS'=\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}$.
b. En déduire que $S=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos n\frac{\theta}{2}$

et $S'=\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin n\frac{\theta}{2}$.

25 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On considère l'application f du plan dans lui même, qui à tout point d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=z^2-4z$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $1-i$ et $3+i$.
1. a. Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.
b. On suppose que deux points ont la même image par f. Montrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2. Soit I le point d'affixe -3.
a. Montrer que $OMIM'$ est un parallélogramme, si et seulement si, $z^2-3z+3=0$.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2-3z+3=0$.
3. a. Exprimer $(z'+4)$ en fonction de $(z-2)$.
En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ puis entre $\arg(z'+4)$ et $\arg(z-2)$.
b. On considère les points J et K d'affixes respectives 2 et -4.
Montrer que l'image de tout point M du cercle de centre J et de rayon 2 appartient à un même cercle que l'on déterminera.
c. Soit E le point d'affixe $z_E=-4-3i$.
Donner la forme trigonométrique de z_E+4 et montrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.
Préciser l'écriture algébrique de l'affixe de ces deux points.

26 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives 2i, -1 et i.
On considère l'application f de $P\setminus\{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P\setminus\{A\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\frac{z+1}{z-2i}$.
1. a. On désigne par C', l'image de C par l'application f.
Quelle est la nature du quadrilatère $ACBC'$?
b. Montrer que le point C admet un unique antécédent par l'application f que l'on notera C''. Quelle est la nature du triangle BCC'' ?
2. Donner une interprétation géométrique du module et d'un argument de z'.
3. a. Déterminer l'ensemble E des points M tels que z' soit un réel strictement négatif.
b. Déterminer l'ensemble F des points M tels que z' soit un nombre imaginaire non nul.
c. Déterminer l'ensemble G des points M tels que M' appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

27 Soit le nombre complexe $z = e^{i\theta} - i$ avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. On désigne par M et M' les points images respectives de z et $\overline{z}$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'affixe du point N pour que $OMNM'$ soit un losange.

2. a. Montrer que $z = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$.

b. Mettre $\frac{z}{\overline{z}}$ sous la forme exponentielle.

c. En déduire la valeur de θ pour que $OMNM'$ soit un carré.

d. Construire le carré $OMNM'$ pour la valeur de θ trouvée.

28 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A le point d'affixe 1.

On considère l'application f de $P \setminus \{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P \setminus \{A\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{\overline{z} + 3}{\overline{z} - 1}$.

1. Soit B le point d'affixe $1 - i$.

a. Déterminer l'affixe du point B' image de B par f.

b. Placer les points B et B' dans le plan P.

2. Soit C le point d'affixe $1 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

a. Calculer AC.

b. Déterminer $\widehat{\left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right)}$.

c. En déduire la construction du point C.

d. Montrer que $f(C) = C$.

3. a. Calculer $(\overline{z} - 1)(z' - 1)$.

b. En déduire que $AM.AM' = 4$.

c. Déterminer l'image par f du cercle de centre A et de rayon 2.

29 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $a = \frac{\sqrt{3}+1}{4} + i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

On désigne par A_0 le point d'affixe $z_0 = 6 + 6i$ et pour tout entier naturel n, on désigne par A_n le point d'affixe $z_n = a^n z_0$.

1. Ecrire z_1 et a^2 sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Exprimer z_3 et z_7 à l'aide de z_1 et a^2.

3. En déduire l'écriture exponentielle de z_3 et z_7.

4. Placer les points A_0, A_1, A_3 et A_7.

30 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la transformation f du plan qui à tout point M d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{\overline{z}}$.

1. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.

2. Démontrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' sont alignés et que $OM \,.\, OM' = 1$.

3. a. Montrer que les points A, B et C d'affixes respectives 4, $2 + 2i$, $2 - 2i$ appartiennent au cercle $\mathscr{C}$ de centre le point I d'affixe 2 et de rayon 2.

b. Calculer les affixes des points A', B' et C' images par f des points A, B et C.

Montrer que les points A', B' et C' appartiennent à une même droite dont on donnera une équation.

4. a. Montrer pour tout nombre complexe non nul z, $|z - 2| = 2$, si et seulement si, $\left|\frac{1}{2} - z'\right| = |z'|$.

b. En déduire l'image par f du cercle $\mathscr{C}$.

31 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, le point d'affixe $z_A = 1$, et par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.

I. Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_B = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $\left(1 + {z_B}^2\right)$.

1.a. Montrer que le point B appartient à $\mathscr{C}$.

b. Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB}\right)$. Placer le point B.

2. a. Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(z_B - z_A)$ et $(z_E - z_A)$.

b. En déduire que les points A, B et E sont alignés.

3. Placer le point E.

II. Pour tout nombre complexe z différent de 1, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

1. Pour tout $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner à l'aide des points A, M et M', une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\frac{z'-1}{z-1}$.

2. En déduire que A, M et M' sont alignés, si et seulement si, $\frac{z^2}{z-1}$ est un réel.

32 Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère la suite $\left(\alpha_n\right)$ de nombres réels définie par $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \frac{5\pi}{6}$.

On désigne par M_n le point du cercle de centre O et de rayon 1 tel que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_n}}\right) \equiv \alpha_n \ [2\pi]$.

1. Placer les points M_n, pour $0 \leq n \leq 8$.
2. On note z_n l'affixe de M_n. Ecrire z_n sous forme exponentielle.
3. Montrer que pour tout entier n, les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés.
4. Montrer que pour tout entier n, les points M_n et M_{n+12} sont confondus.
5. Montrer que pour tout entier n, $z_{n+4} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} z_n$.
En déduire que pour tout entier n, le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$ est équilatéral.

33 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^4 = -1$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$.

Montrer que

$\frac{z+i}{z-i} = e^{i\theta}$ équivaut à $z = \frac{1}{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}$.

3. En déduire les solutions de l'équation $(z+i)^4 = -(z-i)^4$.

34 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe $-i$.

On considère l'application f de $P \setminus \{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P \setminus \{A\}$ d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{i\overline{z}}{i - \overline{z}}$.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2. a. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, $(z'+i)(\overline{z}-i) = 1$.

b. En déduire que $AM'.AM = 1$ et que $M' \in [AM)$.

3. a. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$,

Montrer que l'affixe de $f(M)$ est égale à $e^{i\theta}$, si et seulement si, $z = -\frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\right)$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

c. En déduire les solutions de l'équation $iz^3 = (-i - z)^3$.

35 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit a un réel et l'équation

$(E): z^2 + a(1-i)z - ia^2 = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
On notera z_1 la solution réelle et z_2 l'autre solution.
2. On désigne par A et B les points d'affixes respectives $2 + z_1$ et z_2.
Soit le carré de sens direct ACBD.
a. Montrer que le point C est fixe.
b. Déterminer et construire l'ensemble des points D lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

36 1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2\sqrt{3}\,Z + 4 = 0$.

b. Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.

2. On pose $U=\frac{1}{2}\left[(1-i)+\sqrt{3}(1+i)\right]$.

a. Calculer U^2.
b. Déterminer la forme trigonométrique de U.
c. En déduire alors les valeurs de

$\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3. Pour tout $Z\in\mathbb{C}$, on pose
$P(Z)=Z^3-2\left(\sqrt{3}+i\right)Z^2+4\left(1+i\sqrt{3}\right)Z-8i$.

a. Montrer que l'équation $P(Z)=0$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(Z)=0$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points

$A\left(\sqrt{3}-i\right)$, $B\left(\sqrt{3}+i\right)$ et $C(2i)$.

a. Représenter les points A, B et C.
b. Montrer que le quadrilatère OABC est un losange.

37 Soit un réel α de $[0, \frac{\pi}{2}]$.

I. 1. Exprimer à l'aide de α,

$\left(e^{i2\alpha}+2e^{i\alpha}\right)^2-\left(e^{i2\alpha}-2e^{i\alpha}\right)^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$z^2-\left(e^{i2\alpha}+2e^{i\alpha}\right)z+2e^{i3\alpha}=0$.

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B, A' et B' les points d'affixes respectives $z_A=e^{i2\alpha}$, $z_B=2e^{i\alpha}$,
$z_{A'}=iZ_A$ et $z_{B'}=-iZ_B$.

1. a. Mettre $z_{A'}$ et $z_{B'}$ sous la forme exponentielle.

b. Placer les points A,B,A' et B' pour $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

2. Soit I le milieu du segment $[A'B']$.

a. Montrer que $\frac{z_I}{z_B-z_A}=-\frac{1}{2}i$.

b. En déduire que la médiane issue de O du triangle $OA'B'$ est une hauteur issue de O du triangle OAB et que $OI=\frac{1}{2}AB$.

38 I.1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$z^2-2e^{i\alpha}z+2e^{2i\alpha}=0$, α un réel de $[0,\pi]$.

2. Mettre les solutions sous la forme exponentielle.

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives $z_1=(1-i)e^{i\alpha}$ et $z_2=(1+i)e^{i\alpha}$.

1. a. Montrer que $\frac{z_2}{z_1}=i$.

b. En déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

2. a. Montrer que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\alpha+\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

b. Déterminer α pour que la droite (AB) soit parallèle à la droite d'équation $y=x$.

c. Construire A et B pour la valeur de α trouvée.

39 Soit un réel θ de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et l'équation

$(E): iz^2+6\sin\theta z-9i=0$.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b. Ecrire sous la forme exponentielle les solutions de l'équation (E).

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $3i$, $z_1=3(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z_2=3(-\cos\theta+i\sin\theta)$.

a. Vérifier que les points A, M_1 et M_2 sont sur un même cercle que l'on précisera.

b. Déterminer la valeur de θ pour laquelle le quadrilatère OM_1AM_2 soit un losange.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $iz^4+3\sqrt{3}z^2-9i=0$.

Placer les points images des solutions.

Chapitre 2

Isométrie du plan

" La théorie des figures isométriques curvilignes est beaucoup plus difficile et plus profonde que celle des figures isométriques rectilignes. […].
M. Jacques Bernoulli a été le premier qui l'ait traité avec exactitude ; il propose le problème qui le résout très promptement ; son mémoire est imprimé parmi ceux de l'académie des sciences de 1706 , mais il manquait quelque chose à la solution […].
M. Euler a aussi sur cette matière plusieurs morceaux très profonds dans les mémoires de l'académie de Pétersbourg et on a imprimé à Lafaune, en 1744, un ouvrage fort étendu du même auteur sur ce sujet. Il a pour titre : Methodus inveniendi lineas curvas, proprietate grandentes."

(D'Alembert, Diderot et al,
Encyclopédie méthodique des mathématiques,
réédité en 1987).

Chapitre 2

Isométries du plan

Dans tout le chapitre, le plan est orienté dans le sens direct.

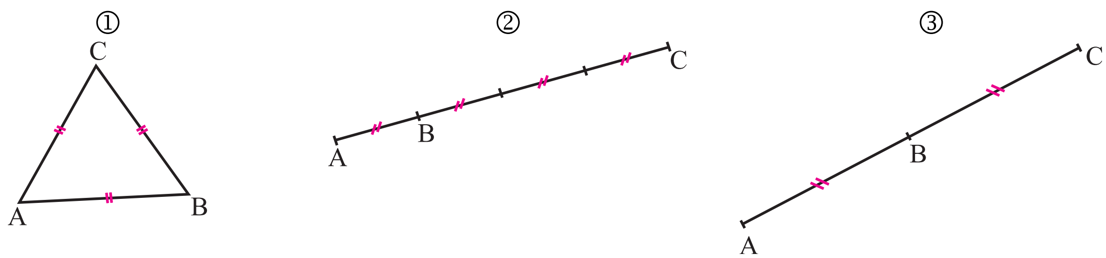
I. Définition et propriétés

I. 1 Définition

Activité 1

Dans chacune des figures suivantes,
Déterminer une application f qui fixe B et qui envoie A sur C.

Soit f une application du plan dans lui même et M_0 un point du plan.
On dit que f fixe le point M_0
(ou M_0 est invariant par f) si $f(M_0) = M_0$.

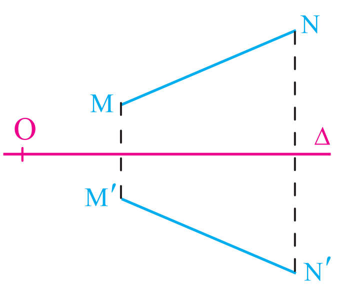


Activité 2

On se propose de démontrer qu'une symétrie orthogonale conserve les distances.

Soit Δ une droite du plan, O un point de Δ et $\vec{i}$ un vecteur unitaire de Δ.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on désigne par S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ.



Soit $M(x, y)$ et $N(x_1, y_1)$ deux points du plan d'images respectives M' et N' par S_Δ.

1. Déterminer les coordonnées de M' et N'.
2. En déduire que $M'N' = MN$.

Définition

Une application du plan dans lui-même est une isométrie si elle conserve les distances.
C'est-à-dire, si $M'N' = MN$ pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N'.

Conséquences

- L'identité du plan , les translations, les symétries orthogonales et les rotations sont des isométries .
- Les images de deux points distincts du plan par une isométrie sont deux points distincts.

Activité 3

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère l'application g du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}z$.

1. Montrer que g est une isométrie.
2. Montrer que g est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

I. 2 Isométries et produit scalaire

Théorème

Une application du plan dans lui- même est une isométrie, si et seulement si, elle conserve le produit scalaire.

Une application f est une isométrie, si et seulement si, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$ pour tous points A, B et C d'images respectives A', B' et C'.

Démonstration

Soit f une isométrie et A, B et C trois points d'images respectives A', B' et C' par f.

Montrons que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$.

On sait que $BC^2 = \left\|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right\|^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et

$B'C'^2 = \left\|\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'}\right\|^2 = A'C'^2 + A'B'^2 - 2\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$.

L'application f étant une isométrie, il en résulte que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$.

Réciproquement, soit f une application telle que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'}$ pour tous points A, B et C d'images respectives A', B' et C'. Montrons que f est une isométrie.

Soit M et N deux points du plan d'images respectives M' et N' par f.

On peut écrire $MN^2 = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}.\overrightarrow{M'N'} = M'N'^2$.

Il en résulte que $MN = M'N'$.

Corollaire

Soit f une isométrie du plan.

Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts, d'images respectives A', B' et C', alors $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.

On dit qu'une isométrie conserve les mesures des angles géométriques.

Démonstration

Par définition du produit scalaire, on peut écrire

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC}$ et $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = A'B'.A'C'.\cos\widehat{B'A'C'}$.

L'application f étant une isométrie, on en déduit que $\cos\widehat{BAC} = \cos\widehat{B'A'C'}$.

Ce qui donne le résultat, puisque les mesures des angles géométriques appartiennent à $[0, \pi]$.

Conséquence

Les images par une isométrie de trois points non alignés sont trois points non alignés.

Le théorème ci-dessous découle du fait qu'une isométrie conserve les mesures des angles géométriques.

Théorème

Soit f une isométrie, A, B et C trois points non alignés du plan et A', B' et C' leurs images respectives.

Si le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est orthonormé alors le repère $\left(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ est orthonormé. De plus, pour tout point M d'image M',

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec x et y réels, implique que $\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$.

Démonstration

Soit $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ un repère orthonormé.

L'application f étant une isométrie, il en résulte que

$\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 1$, $\left\|\overrightarrow{A'C'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 1$ et $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

Ce qui veut dire que le repère $\left(A', \overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ est orthonormé.

Soit M un point tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ avec x, y réels.

Les égalités $x = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}$ et $y = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}$ impliquent, par conservation du produit scalaire, que $x = \overrightarrow{A'M'}.\overrightarrow{A'B'}$, $y = \overrightarrow{A'M'}.\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'M'} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$.

I. 3 Isométrie réciproque

Activité

Soit f une isométrie du plan muni d'un repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

On désigne par A', B' et C' les images respectives de A, B et C par f.

Soit deux réels x et y et N le point tel que $\overrightarrow{A'N} = x\overrightarrow{A'B'} + y\overrightarrow{A'C'}$.

Montrer que le point M de coordonnées (x, y) dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est l'unique point vérifiant $f(M) = N$.
Soit g l'application qui à tout point N du plan associe son unique antécédent M par f
Vérifier que $g(N) = M$, si et seulement si, $f(M) = N$. En déduire que g est une isométrie.

Le théorème ci-dessous découle de l'activité précédente.

Théorème et définition

Une isométrie f est une bijection du plan dans lui-même.
L'application du plan dans lui même qui à tout point N du plan associe son unique antécédent M par f est une isométrie appelée réciproque de f et notée f^{-1}.

Il résulte du théorème ci-dessus que

Pour toute isométrie f et tout point M, $f(M) = N$, si et seulement si, $f^{-1}(N) = M$.
La réciproque d'une symétrie orthogonale est elle même.
La réciproque d'une symétrie centrale est elle même.
La réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$.
La réciproque d'une rotation de centre I et d'angle α est la rotation de centre I et d'angle $-\alpha$.

I. 4 Isométries et configurations

Activité 1

Soit f une isométrie du plan muni d'un repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
Soit P, Q, R, S, M et N des points du plan d'images respectives P', Q', R', S', M' et N'.
Montrer que si $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{PQ} + b\overrightarrow{RS}$ alors $\overrightarrow{M'N'} = a\overrightarrow{P'Q'} + b\overrightarrow{R'S'}$ où a et b sont réels.

Théorème

Soit f une isométrie et A, B, C et D des points d'images respectives A', B', C' et D' par f. Si $\overrightarrow{AB} = \alpha\,\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \alpha\,\overrightarrow{C'D'}$, où α est un réel.

Nous résumons ci-dessous l'action d'une isométrie sur les configurations usuelles.

- Une isométrie conserve le barycentre de deux points. En particulier une isométrie conserve le milieu d'un segment.
- L'image d'une droite par une isométrie est une droite.
- L'image d'un segment par une isométrie est un segment qui lui est isométrique.
- Les images de deux droites parallèles par une isométrie sont deux droites parallèles. (On dit qu'une isométrie conserve le parallélisme).
- L'image d'un parallélogramme par une isométrie est un parallélogramme.
- Les images de deux droites perpendiculaires par une isométrie sont deux droites perpendiculaires. (On dit qu'une isométrie conserve l'orthogonalité).
- L'image d'un cercle par une isométrie est un cercle qui lui est isométrique.
- L'image par une isométrie de la tangente en un point M à un cercle est la tangente au cercle image, au point M' image de M.(On dit qu'une isométrie conserve le contact.)

Activité 2

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, H le pied de la hauteur issue de A et D l'image de C par la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On désigne par O le pied de la hauteur issue de D dans le triangle DCB et par K le pied de la hauteur issue de A dans le triangle DAO.

1. Montrer que la rotation r transforme la droite (CB) en la droite (DO) et le triangle AHC en le triangle AKD.
2. En déduire que AHOK est un carré

II. Composition d'isométries

Activité 1

Soit f et g deux isométries et M et N deux points. On pose $M' = f(M)$, $N' = f(N)$, $M'' = g(M')$ et $N'' = g(N')$.

1. Comparer $M'N'$ et MN puis $M''N''$ et $M'N'$.
2. En déduire que $g \circ f$ est une isométrie.
3. Montrer de la même manière que $f \circ g$ est une isométrie.

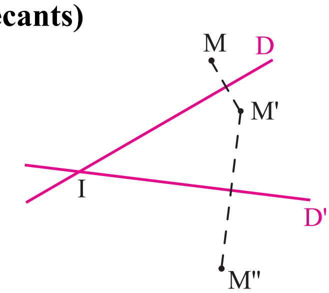
- Soit f et g deux applications du plan dans lui-même.
L'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point $g(f(M))$ est appelée la composée de f par g . On la note $g \circ f$.
- Si f , g et h sont trois applications du plan dans lui même, $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ f \circ h$.

Théorème

La composée de deux isométries est une isométrie.

Activité 2 **(Composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants)**

Soit D et D' deux droites sécantes en un point I et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$. On désigne par S_D et $S_{D'}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs D et D'.
On considère un point M du plan distinct de I et on pose $M' = S_D(M)$ et $M'' = S_{D'}(M')$.



1. Montrer que $IM'' = IM$ et que $\left(\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM''}}\right) \equiv 2\left(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}\right)\ [2\pi]$.
2. Déduire que $S_{D'} \circ S_D$ est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Identifier $S_D \circ S_{D'}$.

Théorème

La composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants est une rotation.
Plus précisément, si D et D' sont deux droites sécantes en un point I et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ et si S_D et $S_{D'}$ sont les symétries orthogonales d'axes respectifs D et D', alors $S_{D'} \circ S_D$ est la rotation de centre I et d'angle α où

$\alpha \equiv 2\left(\widehat{\vec{u}, \vec{u'}}\right) [2\pi]$.

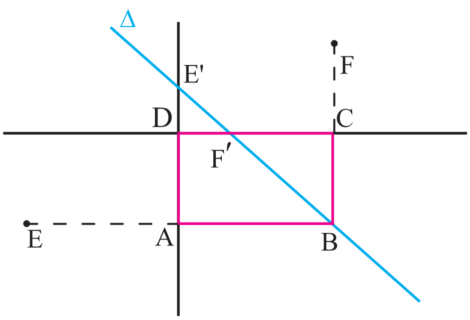
Conséquence

La composée de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires D et D' en I est la symétrie centrale de centre I, et dans ce cas $S_D \circ S_{D'} = S_{D'} \circ S_D$.

Activité 3

Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle, E est le symétrique de B par rapport à A et F est le symétrique de B par rapport à C.

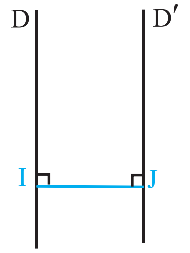
1. Identifier $S_{(DC)} \circ S_{(DA)}$.
2. Une droite Δ passant par B coupe (AD) en E' et (CD) en F'. Montrer que les droites (EE') et (FF') sont parallèles.



Activité 4 (Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles)

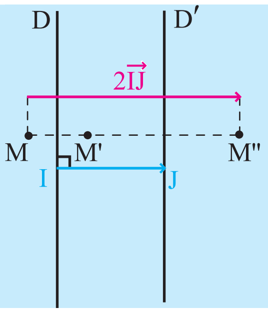
Soit D et D' deux droites parallèles, I un point de D et J son projeté orthogonal sur D'. On considère les symétries orthogonales S_D et $S_{D'}$ d'axes respectifs D et D'.

1. Montrer que $S_{D'} \circ S_D = t_{2\overrightarrow{IJ}}$.
2. Identifier $S_D \circ S_{D'}$.

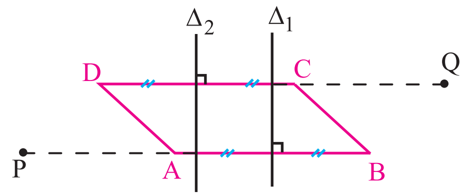


Théorème

La composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles est une translation.
Plus précisément, si D et D' sont deux droites parallèles et si S_D et $S_{D'}$ sont les symétries orthogonales d'axes respectifs D et D', alors $S_{D'} \circ S_D$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{IJ}$, où I est un point de D et J est le projeté orthogonal de I sur D'.



Activité 5



Dans la figure ci- contre ABCD est un parallélogramme et Δ_1 et Δ_2 sont les médiatrices respectives des segments $[AB]$ et $[CD]$.
On note P l'image de B par la symétrie orthogonale d'axe Δ_2 et Q l'image de D par la symétrie orthogonale d'axe Δ_1.
Quelle est la nature du quadrilatère APCQ ?

Théorème

Soit f et g deux isométries.
$g = f^{-1}$, si et seulement si, $f \circ g = Id$, où Id désigne l'identité du plan.

Démonstration

Supposons que g est l'isométrie réciproque de f. Alors pour tout point M du plan, $f(M) = N$, si et seulement si, $g(N) = M$.
Considérons un point M du plan et désignons par N son image par f.
Alors $f \circ g(N) = f(M) = N$.
Réciproquement, supposons que $f \circ g = Id$.
Montrons que g est l'isométrie réciproque de f.
Si N est un point du plan tel que $g(N) = M$, alors d'après l'hypothèse $f \circ g(N) = f(M) = N$. Le résultat en découle.

Propriété

Si f et g sont deux isométries, alors $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Démonstration

On sait, d'après le théorème précédent que, $g \circ g^{-1} = Id$ et $f \circ f^{-1} = Id$. Il en résulte que $(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ f^{-1} = Id$. Ce qui équivaut à $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Propriété

Soit f, g et h trois isométries. $f = g$, si et seulement si, $h \circ f = h \circ g$.

Démonstration

Pour tout point M, l'égalité $f(M) = g(M)$, implique $h(f(M)) = h(g(M))$.
Réciproquement, supposons que $h \circ f = h \circ g$. On déduit de l'implication précédente que $h^{-1} \circ (h \circ f) = h^{-1} \circ (h \circ g)$. La propriété en découle.

Activité 6

Soit A, B et C trois points non alignés du plan.
Donner les réciproques de chacune des isométries ci-dessous.

1. $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$.
2. $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$
3. $t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AC)} \circ t_{-\overrightarrow{BC}}$.

Exercice résolu

Soit D_1, D_2 et D_3 trois droites distinctes et S_1, S_2 et S_3 les symétries orthogonales d'axes respectifs D_1, D_2 et D_3.

Montrer que la composée $S_1 \circ S_2 \circ S_3$ est une symétrie orthogonale, si et seulement si, les droites D_1, D_2 et D_3 sont parallèles ou concourantes.

Solution

Supposons que $S_1 \circ S_2 \circ S_3$ est une symétrie orthogonale d'axe D.

L'égalité $S_1 \circ S_2 \circ S_3 = S_D$ est équivalente à $S_1 \circ S_2 = S_D \circ S_3$ $(*)$.

Si D_1 est parallèle à D_2 alors $S_1 \circ S_2$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ orthogonal à D_1 et D_2. Il en résulte que D est parallèle à D_3 et $\vec{u}$ est orthogonal à D_3. On en déduit que les droites D_1, D_2, D_3 et D sont parallèles.

Si D_1 et D_2 se coupent en un point I, alors $S_1 \circ S_2$ est une rotation de centre I. Il en résulte que D_3 et D se coupent en I et alors les droites D_1, D_2, D_3 et D sont concourantes en I.

L'équivalence $(*)$ permet de conclure.

III. Isométries et points fixes

III.1 Isométries ayant des points fixes

Activité 1

Soit f une isométrie du plan, différente de l'identité du plan et A un point non fixe de f d'image A'.

Montrer que si M est un point fixe de f, alors M appartient à la médiatrice du segment $[AA']$.

Théorème

Soit f une isométrie différente de l'identité, A un point non fixe de f et A' son image.
Alors les points fixes de f, s'ils existent, se trouvent sur la médiatrice du segment $[AA']$.

Théorème

Une isométrie fixe trois points non alignés, si et seulement si, c'est l'identité du plan.

Démonstration

Soit f une isométrie et A, B et C trois points non alignés.

Pour tout point M du plan, on peut écrire $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

Ce qui implique que $\overrightarrow{A'M'} = x\,\overrightarrow{A'B'} + y\,\overrightarrow{A'C'}$, où A', B', C' et M' sont les images respectives par f des points A, B, C et M.

Si les points A, B et C sont invariants par f, alors $\overrightarrow{AM'} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

Il en résulte que $M = M'$.

Conséquence

Si deux isométries f et g coïncident sur trois points non alignés, alors elles coïncident partout dans le plan.
On dit qu'une isométrie est déterminée par la donnée de trois points non alignés et leurs images.

Théorème

Si une isométrie fixe deux points distincts A et B, alors elle fixe tous les points de la droite (AB).

Démonstration

Soit f une isométrie qui fixe deux points distincts A et B.
Pour tout M de (AB), il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$. Il en résulte que l'image M' de M par f vérifie l'égalité $\overrightarrow{AM'} = x\overrightarrow{AB}$. On en déduit que $M' = M$.

Théorème

Si une isométrie f fixe deux points distincts A et B et si elle est différente de l'identité, alors f est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

Démonstration

Soit f une isométrie, différente de l'identité, qui fixe deux points distincts A et B.
Soit M un point du plan et M' son image par f.
Si M est sur la droite (AB) alors $M' = M$.
Si M n'est pas sur la droite (AB), alors M' et M sont distincts car une isométrie différente de l'identité ne fixe pas trois points non alignés. De plus, les points A et B sont sur la médiatrice de $[MM']$. On en déduit que f est la symétrie orthogonale d'axe (AB).

Activité 2

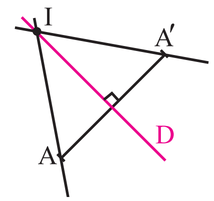
Soit ABCD un carré direct.
On désigne par S la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de [BC] et par T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

1. a. Déterminer les images par $S \circ T$ des points A, B et D.
   b. Identifier $S \circ T$.
2. a. Déterminer les images par $T \circ S$ des points C, D et A.
   b. Identifier $T \circ S$.
3. En déduire la nature de $S \circ T \circ T \circ S$.

Théorème

Si une isométrie f fixe un unique point I alors f est une rotation de centre I et d'angle non nul.

Démonstration



Soit f une isométrie qui fixe un unique point I du plan et soit A un point distinct de I, d'image A' par f.
On note D la médiatrice de $[AA']$ et S_D la symétrie orthogonale d'axe D. Puisque I est un point fixe par f alors I appartient à D.
Les égalités $(S_D \circ f)(I) = I$ et $(S_D \circ f)(A) = A$ impliquent que $S_D \circ f$ est soit l'identité du plan, soit la symétrie orthogonale $S_{(IA)}$.
L'isométrie $S_D \circ f$ ne peut pas être l'identité du plan car f serait égale à S_D et fixerait plus d'un point.
Par conséquent, $S_D \circ f = S_{(IA)}$ et par suite $f = S_D \circ S_{(IA)}$.
On en déduit que f est une rotation de centre I.

Activité 3

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f l'application de P dans P, qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y, \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie de P.
2. a. Montrer que f admet un seul point invariant que l'on déterminera.
   b. En déduire que f est une rotation dont on précisera les éléments caractéristiques.

III. 2 Isométries sans point fixe

Activité 1

Soit Δ une droite du plan de vecteur directeur $\vec{u}$.

On note S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ et on pose $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$.

1. a. Construire l'image d'un point A de Δ.
   b. Déterminer $f(\Delta)$.
2. Montrer que f n'a pas de point fixe.

Théorème

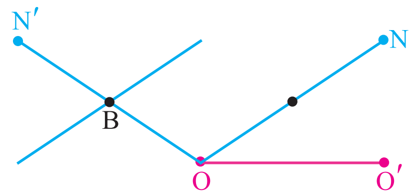
Soit O un point du plan. Alors toute isométrie f se décompose de manière unique en la composée d'une translation et d'une isométrie g qui fixe O.

Démonstration

Soit O' l'image de O par f et $\vec{u} = \overrightarrow{OO'}$. Alors l'isométrie $g = t_{-\vec{u}} \circ f$ fixe le point O.

Le théorème en découle.

Activité 2



Soit O et O' deux points distincts du plan, g une rotation de centre O d'angle non nul α. On considère l'isométrie $f = t_{\overrightarrow{OO'}} \circ g$.

Soit N un point du plan tel que $(\widehat{\overrightarrow{OO'},\overrightarrow{ON}}) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\ [2\pi]$,

N' son image par g .

L'image de la droite (ON) par la translation $t_{\overrightarrow{O'O}}$ coupe (ON') en un point B.

En considérant l'antécédent de B par g , montrer que f possède un point fixe.

Activité 3

Soit f une isométrie, O un point d'image O' distincte de O.

On suppose qu'il existe une symétrie orthogonale d'axe Δ passant par O telle que $f = t_{\overrightarrow{OO'}} \circ S_{\Delta}$.

1. On suppose que $\overrightarrow{OO'}$ est orthogonal à Δ et on désigne par M un point de la médiatrice du segment $[OO']$.

   Montrer que f fixe M et ne fixe pas O puis identifier f.
2. Montrer que si $\overrightarrow{OO'}$ est un vecteur directeur de Δ alors f n'admet pas de point fixe.
3. On suppose que $\overrightarrow{OO'}$ n'est ni orthogonal à Δ, ni directeur de Δ.

   Soit C et D les points tels que $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OC}$ directeur de Δ et $\overrightarrow{OD}$ est orthogonal à Δ.

   Montrer que $f = t_{\overrightarrow{OC}} \circ S_{\Delta'}$, où le vecteur $\overrightarrow{OC}$ est directeur de Δ'.

   En déduire que f est sans point fixe.

Les activités précédentes nous permettent d'énoncer le théorème ci-dessous.

Théorème

Une isométrie qui n'a aucun point fixe est soit une translation de vecteur non nul, soit la composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ.

Démonstration

Soit f une isométrie sans point fixe, O un point du plan et O' son image par f.
On sait qu'il existe une isométrie g qui fixe O et telle que $f = t_{\overrightarrow{OO'}} \circ g$.

D'après l'activité 2, g ne peut pas être une rotation car f admettrait un point fixe.
Par suite, g est soit l'identité soit une symétrie orthogonale.
Si g est l'identité alors f est une translation.
Si g est une symétrie orthogonale d'axe Δ alors d'après l'activité 3, f est la composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ.

Définition

La composée d'une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et d'une symétrie orthogonale d'axe Δ tel que $\vec{u}$ est directeur de Δ est appelée symétrie glissante.

IV. Décomposition d'une isométrie

Théorème

Toute isométrie se décompose en au plus trois symétries orthogonales.

Démonstration

Soit f une isométrie. Soit A, B et C trois points non alignés, d'images respectives A', B' et C' par f.

On note $f_{(M,\,N)} = \begin{cases} \text{l'identité, si } M = N, \\ \text{la symétrie orthogonale transformant M en N, si M distinct de N.} \end{cases}$

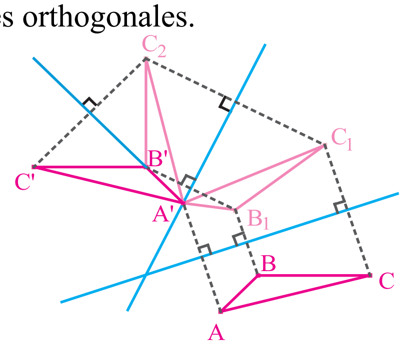
Montrons que f est la composée d'au plus trois symétries orthogonales.

Notons B_1 et C_1 les images respectives de B et C par $f_{(A,\,A')}$ et C_2 l'image de C_1 par $f_{(B_1,\,B')}$.

Alors $f_{(C_2,\,C')}$ transforme C_2 en C'.

De plus, $f_{(C_2,\,C')} \circ f_{(B_1,\,B')} \circ f_{(A,\,A')}$ transforme les points A, B et C en les points A', B' et C'.

Il en résulte que $f_{(C_2,\,C')} \circ f_{(B_1,\,B')} \circ f_{(A,\,A')} = f$.

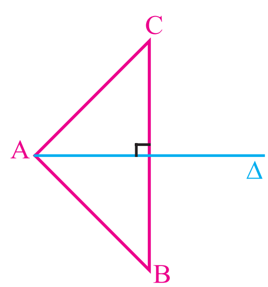


IV. 1 Décomposition d'une rotation

Activité 1

Dans la figure ci –contre, ABC est un triangle direct isocèle rectangle en A et Δ est la médiatrice du segment $[BC]$. On désigne par r la rotation de centre A qui transforme B en C et par S_Δ et $S_{(AB)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs Δ et (AB).

Montrer que $r = S_\Delta \circ S_{(AB)}$.



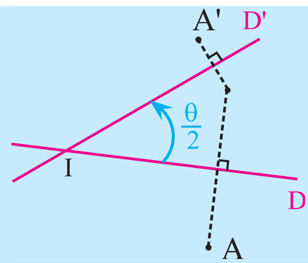
Activité 2

Soit r une rotation de centre I et d'angle θ et D une droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}$. On désigne par D' la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u'}$ tel que $2\left(\widehat{\vec{u},\vec{u'}}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Montrer que $r = S_{D'} \circ S_D$.

Théorème

Toute rotation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants .
Plus précisément, soit r une rotation de centre I et d'angle θ et D une droite quelconque passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}$.
Alors $r = S_{D'} \circ S_D$, où D' est la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}'$ tel que $2\left(\widehat{\vec{u},\vec{u}'}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$.



Conséquence

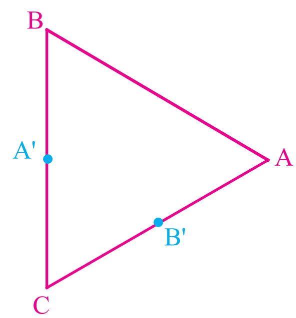
Soit S_I la symétrie centrale de centre I et D une droite passant par I. Alors
$S_I = S_{D'} \circ S_D = S_D \circ S_{D'}$, où D' est la droite perpendiculaire à D en I .

Activité 3

Dans la figure ci –contre, ABC est un triangle équilatéral direct et A' est le milieu du segments $[BC]$.

On note r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et $S_{(AB)}$ la symétrie orthogonale d'axe (AB).

1. Déterminer la droite Δ telle que $r = S_\Delta \circ S_{(AB)}$, où S_Δ désigne la symétrie orthogonale d'axe Δ.
2. Soit $S_{A'}$ la symétrie centrale de centre A'.
   Décomposer $S_{A'}$ en deux symétries orthogonales.



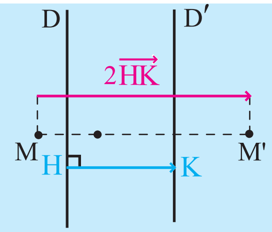
IV. 2 Décomposition d'une translation

Activité 1

Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur non nul $\vec{u}$, D une droite quelconque de direction orthogonale à celle de $\vec{u}$ et H un point de D.
Montrer que $t_{\vec{u}} = S_{D'} \circ S_D$, où D' est la droite parallèle à D et passant par le point K tel que $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\vec{u}$.

Théorème

Toute translation est la composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles.
Plus précisément, soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul $\vec{u}$, D une droite quelconque de direction orthogonale à celle de $\vec{u}$ et H est un point de D. Alors $t_{\vec{u}} = S_{D'} \circ S_D$, où D' est la droite parallèle à D et passant par le point K tel que $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\vec{u}$.



Activité 2

Soit un rectangle ABCD. Identifier $t_{2\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$.

Activité 3

Montrer que toute symétrie glissante f se décompose sous la forme $f = S_D \circ S_{D'} \circ S_{D''}$, avec $D \cap D' = \varnothing$ et D'' est perpendiculaire à D.

Le tableau ci-dessous donne une classification des isométries suivant leur décomposition en symétries orthogonales et leurs points fixes.

Nature de l'isométrie	Décomposition en symétries orthogonales	Ensemble des points fixes
Identité du plan.	$S_D \circ S_D$	Tout le plan.
Symétrie orthogonale d'axe D.	S_D	La droite D.
Rotation de centre I et d'angle θ, $\theta \neq k2\pi$; $k \in \mathbb{Z}$	$S_D \circ S_{D'}$ $(D \cap D' = \{I\})$	$\{I\}$.
Translation de vecteur non nul.	$S_D \circ S_{D'}$ $(D \cap D' = \varnothing)$	L'ensemble vide.
Symétrie glissante d'axe D et de vecteur $\vec{u}$.	$S_D \circ S_{D'} \circ S_{D''}$, $(D \cap D' = \varnothing)$ et D perpendiculaire à D''.	L'ensemble vide.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit ABCD un carré direct et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Alors r est égale à

☐ $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$. ☐ $S_{(AB)} \circ S_{(AD)}$. ☐ $S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.

2. Soit (AB) une droite et C un point de (AB). Alors $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$ est

☐ la symétrie centrale S_A. ☐ l'identité. ☐ la symétrie orthogonale $S_{(BC)}$.

3. Soit A, B et C trois points non alignés et f une isométrie qui fixe les deux points A et B et ne fixe pas le point C. Alors f est

☐ l'identité. ☐ la symétrie orthogonale $S_{(AB)}$. ☐ la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$.

4. Soit A et B deux points distincts et O le milieu de $[AB]$.

Soit f une isométrie qui envoie A sur B et B sur A. Alors $f(O)$ est

☐ A. ☐ O. ☐ B.

5 Soit ABC un triangle équilatéral et f une isométrie qui envoie A sur B, B sur C et C sur A. Alors $f \circ f \circ f$ est

☐ une symétrie orthogonale $S_{(AC)}$. ☐ la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$. ☐ l'identité.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La seule isométrie fixant trois points distincts est l'identité.

2. Les symétries glissantes sont les seules isométries sans point fixe.

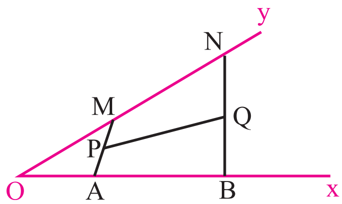
3. Si une isométrie laisse globalement invariante une droite, alors elle est soit une symétrie orthogonale, soit une translation.

4. La composée de deux symétries orthogonales distinctes est soit une translation soit une rotation.

5Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A et direct.
Soit f une isométrie qui fixe A et envoie B sur C. Alors f est soit la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$, soit la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de $[BC]$.

1 Soit A et A' deux points distincts du plan et Δ la médiatrice du segment $[AA']$.
Soit B un point du plan n'appartenant pas à Δ tel que (AB) et Δ ne sont pas parallèles.
Construire à la règle seulement le symétrique B' de B par rapport à la droite Δ.

2 Dans la figure ci-dessous $[Ox)$ et $[Oy)$ sont demi-droites sécantes. A et B sont deux points fixes de $[Ox)$.
Soit M et N deux points variables sur $[Oy)$ tels que $MN = AB$ et $N \in [My)$.
On note P le milieu du segment $[AM]$ et Q le milieu du segment $[BN]$.



Montrer que Q est l'image de P par une translation qui ne dépend pas des points M et N.

3 On considère un triangle ABC de centre de gravité G. On désigne par A', B' et C' les images respectives de A, B et C par une isométrie qui fixe G.
Montrer que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

4 Soit S_1 et S_2 deux symétries orthogonales d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2.
1. Discuter, suivant la position relative de Δ_1 et Δ_2, la nature de $S_1 \circ S_2$.
2. A quelle condition sur Δ_1 et Δ_2, a-t-on $S_1 \circ S_2 = S_2 \circ S_1$?

5 On considère deux cercles isométriques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sécants en deux points A et B.
Soit deux points I et J tels que le quadrilatère IAJB est un losange et I est à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}$.
On suppose que les droites (IA) et (IB) recoupent le cercle $\mathscr{C}'$ respectivement en P et Q et que les droites (JA) et (JB) recoupent le cercle $\mathscr{C}$ respectivement en M et N.
Montrer que le quadrilatère MNQP est un rectangle.

6 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments
$[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
1. Déterminer les images de A, I et L par la symétrie centrale S_1 de centre O.
2. Construire les points E et F, images respectives de J et K par la symétrie centrale S_2 de centre C.
3. Déterminer les images de A, I et L par $S_2 \circ S_1$, puis par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Conclure.

7 On considère un triangle ABC rectangle en A, on note A' le symétrique de A par rapport à la médiatrice du segment $[BC]$ et A'' le symétrique de A' par rapport à la droite (BC).
Montrer que le quadrilatère $ACA''B$ est un rectangle.

8 On considère un triangle ABC isocèle en A.
On désigne par D l'image de B par la symétrie orthogonale d'axe (AC) et par I le milieu du segment $[BC]$.
Soit f une isométrie laissant A invariant et transformant B et C respectivement en C et D.
On pose $g = S_{(AC)} \circ f$.
1. Déterminer $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ et $g(I)$.
2. Montrer que g est une symétrie orthogonale.

9 Soit ABC un triangle équilatéral direct.
On désigne par I le milieu de $[AC]$ et par Δ la droite passant par B et parallèle à (AC).
Soit J un point de [BA] distinct de B.
La droite passant par J et parallèle à (AC) coupe [BC] en un point K.
1. Caractériser $S_{(AC)} \circ S_\Delta$ et $S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$.
2. Identifier $f = S_{(AC)} \circ S_\Delta \circ S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$.
3. Déterminer la position du point J sur [BA] pour que f soit la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.

10 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe le nombre complexe z associe le point M' d'affixe le nombre complexe $z' = iz - 1 - i$.
Montrer que g est une isométrie et la caractériser.

11 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit f l'application de P dans P, qui à tout point $M(x, y)$ associe le point $M(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = 1 - \sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y \end{cases}$$

1. Montrer que f est une isométrie.
2. a. Déterminer l'ensemble des points fixes de f.
b. En déduire que f est symétrie orthogonale.

12 Dans le plan orienté P, on considère l'application f de P dans P qui à tout point M d'affixe le nombre complexe z associe le point M' d'affixe le nombre complexe $z' = i\bar{z}$.
1. Montrer que f est une isométrie.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
3. En déduire la nature de f.

13 Soit OAB un triangle équilatéral direct.

On désigne par Δ la droite perpendiculaire à (OA) en O, par D la médiatrice de [AB] et par S_1, S_2, S_3 et S_4 les symétries orthogonales d'axes respectifs (OA), (OB), Δ et D.
On note $f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
1. Montrer que $f = S_3 \circ R$ où R est une rotation que l'on caractérisera.
2. Montrer que $R = S_3 \circ S_4$.
3. Identifier f.

14 Soit A et B deux points distincts du plan et f une isométrie qui laisse globalement invariant le segment [AB].
1. Montrer que f fixe le milieu de [AB].
2. En déduire toutes les isométries qui laissent globalement invariant le segment [AB].

15 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O.
1. Donner la nature des isométries qui laissent $\mathscr{C}$ globalement invariant.
2. Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{C}$.
Déterminer les isométries qui laissent globalement invariants le cercle $\mathscr{C}$ et le triangle OAB.

16 Soit ABC un triangle équilatéral direct et f une isométrie qui envoie A sur B et B sur C.
1. Montrer que si f n'admet pas de points invariants, alors f est une symétrie glissante.
2. On suppose que f admet un point invariant.
a. Montrer que f n'est pas une symétrie orthogonale.
b. Identifier alors f.

17 Soit Δ et Δ' deux droites strictement parallèles, A est un point de Δ et B est un point de Δ'. Déterminer toutes les isométries qui transforment Δ en Δ' et A en B.

18 Soit ABCD un carré direct de centre I.

On se propose de déterminer les isométries du plan qui laissent globalement invariant le carré ABCD.
Soit f une isométrie du plan qui laisse globalement invariant le carré ABCD.
1. a. Montrer que $f(I) = I$.
b. En déduire que f est soit l'identité du plan, soit une rotation de centre I et d'angle non nul et soit une symétrie orthogonale d'axe passant par I.
2. On suppose que f n'est pas une symétrie orthogonale.
Montrer que
Si $f(A) = A$, alors f est l'identité.
Si $f(A) = B$, alors f est la rotation de centre I d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Si $f(A) = C$, alors f est la symétrie centrale de centre I.
Si $f(A) = D$, alors f est la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
3. On suppose que f est une symétrie orthogonale.
Montrer que
Si $f(A) = A$, alors f est la symétrie orthogonale d'axe (IA).

Si $f(A)=B$, alors f est la symétrie orthogonale d'axe Δ_2 où Δ_2 désigne la médiatrice du segment $[DC]$.
Si $f(A)=C$, alors f est la symétrie orthogonale d'axe (IB).
Si $f(A)=D$, alors f est la symétrie orthogonale d'axe Δ_1 où Δ_1 désigne la médiatrice du segment $[CB]$.
4. Conclure.

19 **On** considère un triangle ABC équilatéral direct de centre G. On désigne par r la rotation de centre G et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par A', B' et C' les images respectives de A, B et C par r.
1. Quel est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$?
2. Soit f une isométrie transformant $\{A, B, C\}$ en $\{A', B', C'\}$.
a. Montrer que $f(G)=G$.
b. Déterminer toutes les isométries transformant $\{A, B, C\}$ en $\{A', B', C'\}$.

20 Soit ABC un triangle équilatéral direct.
1. Déterminer toutes les isométries f qui laissent globalement invariant le triangle ABC.
2. Soit $D=S_{(AC)}(B)$.
On se propose de déterminer toutes les isométries f qui transforment ABC en ACD.
a. On pose $g=S_{(AC)}\circ f$.
Déterminer l'image par g du triangle ABC.
b. En déduire toutes les isométries f.

21 Soit ABC un triangle rectangle en A et direct.
Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).
1. Déterminer la droite Δ tel que
$S_{(CA)}\circ S_{(AB)} = S_{\Delta}\circ S_{(AH)}$.
2. Donner la nature de $S_{(BC)}\circ S_{(CA)}\circ S_{(AB)}$.

22 Soit ABC un triangle équilatéral direct et $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à ABC.
La médiatrice de [BC] recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en D et la droite (BD) coupe (AC) en E.
1. a. Montrer que le triangle BCE est isocèle en C.
b. Montrer que (DC) est la médiatrice de [AE].
2. On note $f=S_{(BD)}\circ S_{(DC)}$ et $g=S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$.
a. Caractériser les isométries f et g.
b. Déterminer les droites Δ et Δ' telles que
$f=S_{\Delta}\circ S_{(AD)}$ et $g=S_{(AD)}\circ S_{\Delta'}$.
c. Montrer que Δ et Δ' sont parallèles puis identifier $f\circ g$.

Chapitre 3

Déplacement Antidéplacement

Euclide utilisait les déplacements (312 – 215 avant J.-C), pour démontrer entre autre, les cas d'égalité des triangles. Les cartographes du XVIème siècle, sachant qu'il est impossible de projeter la sphère sur un plan tout en conservant les longueurs, cherchaient des applications conservant les angles.
Euler (1707-1784) avait étudié les déplacements et avait démontré en substance, qu'un déplacement plan est une rotation ; une translation ou une translation suivie d'une symétrie.
Personne pourtant n'explicitait la notion de transformation. Ce n'est que chez Poncelet (1788-1867), que la transformation apparaît comme une correspondance entre figures de deux plans.
Un peu plus tard, Mobius (1790-1868) crée la notion d'affinités géométriques pour décrire différents types de transformations : selon que figures initiales et transformées sont égales et semblables (dans le premier cas la transformation est un déplacement).

(A. Dahan-Dalmedico et al,
Histoire des mathématiques -routes et dédales, 1982).
(J. Dhombres et al, Mathématiques au fil des âges, 1987).

Chapitre 3

Déplacements Antidéplacements

Dans tout le chapitre le plan est orienté dans le sens direct.

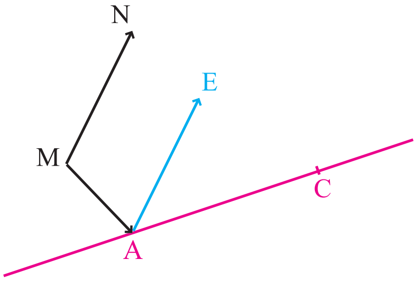
I. Définitions et propriétés

Activité 1

Soit A et C deux points distincts et S la symétrie orthogonale d'axe (AC).

Soit M et N deux points distincts du plan et E le point tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AE}$.

Construire leurs images M', N' et E' par S.



1. Comparer $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE'}}\right)$.

2. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}}\right) \equiv -\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{M'N'}}\right)\ [2\pi]$.

3. Soit P et Q deux points distincts d'images respectives P' et Q' par S.

Comparer $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}}\right)$.

Théorème

Toute symétrie orthogonale change les mesures des angles orientés en leurs opposées.
(On dit qu'une symétrie orthogonale change l'orientation).

Activité 2

Soit g la composée de deux symétries orthogonales. Soit M, N, P et Q des points tels que $\overrightarrow{MN} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{PQ} \neq \vec{0}$, d'images respectives M', N', P' et Q' par g.

Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{P'Q'}}\right)\ [2\pi]$.

Théorème

La composée de deux symétries orthogonales conserve les mesures des angles orientés.
(On dit que la composée de deux symétries orthogonales conserve l'orientation).

Activité 3

Soit f la composée de n symétries orthogonales.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que f change l'orientation.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que f conserve l'orientation.

Définition

On appelle déplacement toute isométrie qui conserve les mesures des angles orientés.
On appelle antidéplacement toute isométrie qui change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Le théorème ci-dessous découle de la décomposition d'une isométrie en composée de symétries orthogonales.

Théorème

Une isométrie est un déplacement, si et seulement si, elle est la composée de deux symétries orthogonales.
Une isométrie est un antidéplacement, si et seulement si, elle est une symétrie orthogonale ou la composée de trois symétries orthogonales.

Le tableau ci-dessous donne la classification des isométries en déplacements ou antidéplacements.

Identité	Déplacement
Rotation	Déplacement
Translation	Déplacement
Symétrie orthogonale	Antidéplacement
Symétrie glissante	Antidéplacement

Le théorème ci-dessous découle de la définition d'un déplacement et d'un antidéplacement.

Théorème

- La composée de deux déplacements est un déplacement.
- La composée de deux antidéplacements est un déplacement.
- La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.
- La réciproque d'un déplacement est un déplacement.
- La réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement.

II. Détermination d'un déplacement ou d'un antidéplacement

Activité 1

Soit A et B deux points distincts.

1. Soit f et g deux déplacements qui coïncident sur A et B.
   a. Déterminer $\left(f^{-1} \circ g\right)(A)$ et $\left(f^{-1} \circ g\right)(B)$.
   b. Identifier $f^{-1} \circ g$ et en déduire que $f = g$.
2. Soit f_1 et g_1 deux antidéplacements qui coïncident sur A et B.
   Identifier $f_1^{-1} \circ g_1$ et en déduire que $f_1 = g_1$.

Théorème

Deux déplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.
Deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts sont égaux.

Activité 2

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale S_1 qui envoie A sur C
2. On pose $M = S_1(B)$. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale S_2 qui fixe C et qui envoie M sur D.
3. Montrer que $S_2 \circ S_1$ est un déplacement qui envoie A sur C et B sur D.
4. Combien existe-t-il de déplacements qui envoient A sur C et B sur D ?

Activité 3

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$.
On note t la translation qui envoie A sur C et on pose $M = t(B)$.

1. Montrer qu'il existe une symétrie orthogonale S qui fixe C et qui envoie M sur D.
2. Montrer que $f = S \circ t$ est un antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D.
3. Combien existe-t-il d'antidéplacements qui envoient A sur C et B sur D ?

Le théorème ci-dessous résulte des deux activités précédentes.

Théorème

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$.
Il existe un unique déplacement qui envoie A sur C et B sur D.
Il existe un unique antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D.

III. Déplacements

III.1 Angle d'un déplacement

Activité 1

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$.
Soit f un déplacements et A', B', C' et D' les images respectives des points A, B, C et D. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}}\right) [2\pi]$.

Théorème et définition

Soit f un déplacement et A, B, C et D des points du plan tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Si A', B', C' et D' sont les images respectives par f des points A, B, C et D, alors

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}}\right) [2\pi].$$

En désignant par θ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$, on dit que f est un déplacement d'angle θ.

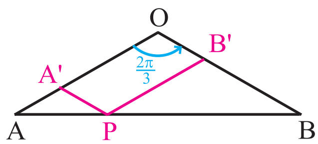
Corollaire 1

Soit f un déplacement d'angle θ.
Si $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors f est une translation.
Si $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ alors f est une rotation d'angle θ.

Corollaire 2

- Si f est un déplacement d'angle θ et g est un déplacement d'angle θ', alors $f \circ g$ est un déplacement d'angle $\theta + \theta'$.
- Si f est un déplacement d'angle θ, alors f^{-1} est un déplacement d'angle $-\theta$.

Activité 2



Soit OAB un triangle isocèle de sommet principal O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et soit P un point de $[AB]$ distinct de A et B. La parallèle menée de P à la droite (OB) coupe (OA) en A'. La parallèle menée de P à la droite (OA) coupe (OB) en B'.

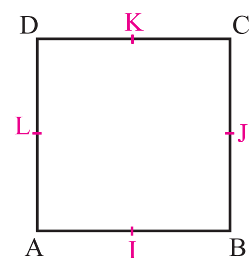
1. a. Montrer que $OA' = BB'$.
   b. En déduire qu'il existe une unique rotation r qui transforme O en B et A' en B'.
2. Montrer que $r(A) = O$ et déterminer les éléments caractéristiques de r.
3. Soit Ω le centre de r. Montrer que les points O, A', B' et Ω appartiennent à un même cercle.

Activité 3

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et O le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = O$ et $f(C) = B$.
2. Montrer que f est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre.

Activité 4



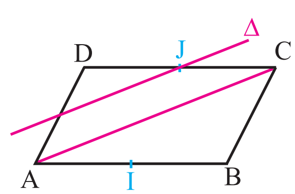
Dans la figure ci-contre ABCD est un carré de sens direct et I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.
Justifier, dans chaque cas l'existence du déplacement f et l'identifier.

1. $f(J) = I$ et $f(K) = L$.
2. $f(I) = K$ et $f(J) = L$.
3. $f(B) = K$ et $f(L) = A$.

III. 2 Composition de déplacements

• Composition de deux translations

Activité 1



Dans la figure ci-contre ABCD est un parallélogramme, I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ et Δ désigne la droite passant par J et parallèle à (AC).

Montrer que la droite Δ est globalement invariante par $t_{\overrightarrow{AI}} \circ t_{\overrightarrow{AJ}}$.

Théorème (Rappel)

La composée de deux translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est la translation

$t_{\vec{u}+\vec{v}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}+\vec{u}}$.

• Composition de deux rotations

Activité 2

Soit ABCD un carré direct. On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

et par r' la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $r = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$.
2. Déterminer la droite Δ telle que $r' = S_{(AB)} \circ S_{\Delta}$.
3. Identifier $r \circ r'$.

Activité 3

Soit ABC un triangle équilatéral direct et de centre O. On désigne par r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et par r' la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Déterminer $(r \circ r')(A)$.
2. Identifier $r \circ r'$.

Activité 4

Soit r et r' deux rotations d'angles respectifs θ et θ' et de centres respectifs distincts O et O'.

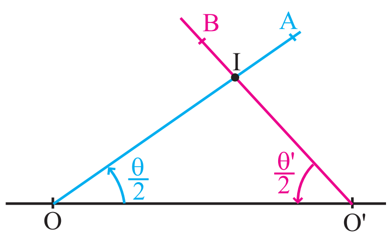
1. On considère deux points A et B tels que $2\left(\widehat{\overrightarrow{OO'}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv \theta \; [2\pi]$ et

   $2\left(\widehat{\overrightarrow{O'B}, \overrightarrow{O'O}}\right) \equiv \theta' \; [2\pi]$.

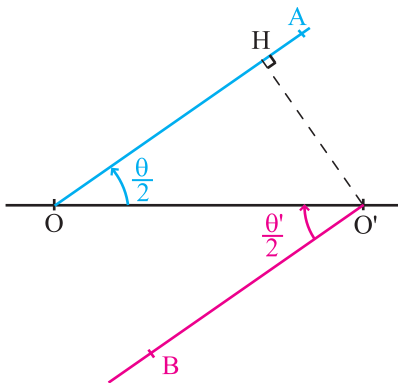
   Montrer que $r = S_{(OA)} \circ S_{(OO')}$ et $r' = S_{(OO')} \circ S_{(O'B)}$.

2. On suppose que $\theta + \theta' \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

   Justifier que (OA) et $(O'B)$ sont sécantes et montrer que $r \circ r'$ est une rotation dont on déterminera le centre.



3. On suppose que $\theta+\theta'=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.
   a. Justifier que les droites (OA) et $(O'B)$ sont parallèles.
   b. Montrer que $r\circ r'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{O'H}$, où H est le projeté orthogonal de O' sur (OA).



Théorème

La composée de deux rotations r et r' d'angles θ et θ' et de centres respectifs O et O' est soit une translation de vecteur non nul, soit une rotation d'angle non nul.
Si $\theta+\theta'\equiv 0\ [2\pi]$, il s'agit d'une translation de vecteur non nul.
Si $\theta+\theta'\neq 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, il s'agit d'une rotation d'angle $\theta+\theta'$.

• Composition d'une rotation et d'une translation

Théorème

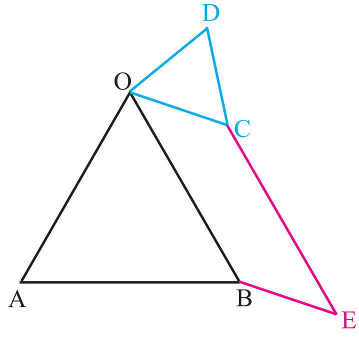
La composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul θ est une rotation d'angle θ.

Démonstration

Le théorème découle du fait que la composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul θ est un déplacement d'angle non nul θ.

Activité 5

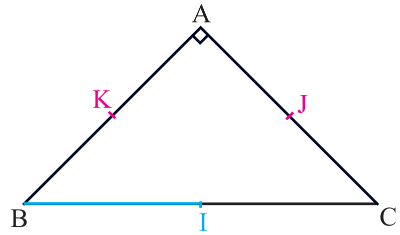
On considère deux triangles équilatéraux directs OAB et OCD et on désigne par E le quatrième sommet du parallélogramme BOCE.



1. Soit $f=r\circ t$, où r désigne la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t est la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.
   a. Déterminer $f(B)$.
   b. Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.
2. Déterminer $f(E)$ et en déduire la nature du triangle AED.

Activité 6

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle rectangle et isocèle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Soit I le milieu de $[BC]$, J le milieu de $[AC]$ et K le milieu de $[AB]$.



On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et on désigne par T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Soit $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

1. Déterminer $f(K)$, $f(B)$, $g(J)$ et $g(I)$.
2. Identifier f et g.

III. 3 Déplacements et nombres complexes

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une application du plan dans lui- même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. L'application f est une translation de vecteur $\vec{u}$, si et seulement si, il existe un nombre complexe b tel que $z' = z + b$ où b est l'affixe de $\vec{u}$.

Démonstration

Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b, M un point d'affixe z et M' le point d'affixe z' image de M par f.
L'application f est une translation de vecteur $\vec{u}$, si et seulement si, $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
On en déduit que f est une translation de vecteur $\vec{u}$, si et seulement si, $z' = z + b$.

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une application du plan dans lui- même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. L'application f est une rotation d'angle non nul θ et de centre I, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que

$z' = az + b$, avec $a = e^{i\theta}$, $a \neq 1$ et $z_I = \dfrac{b}{1-a}$ est l'affixe de I.

Démonstration

Soit f une application et M un point d'image M' par f.
On désigne par z et z' les affixes respectives des points M et M'.
L'application f est une rotation de centre I et d'angle non nul θ, si et seulement si, f fixe I et $IM' = IM$ et $(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}) \equiv \theta\ [2\pi]$ pour tout point M distinct de I.

On en déduit que f est une rotation de centre I et d'angle θ, si et seulement si,

$|z' - z_I| = |z - z_I|$ et $\arg\left(\dfrac{z' - z_I}{z - z_I}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$, pour tout $z \neq z_I$.

Ce qui équivaut à, $z' - z_I = e^{i\theta}(z - z_I)$, $z \neq z_I$.
Le théorème en découle sachant que la relation précédente est vraie pour $M = I$.

Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

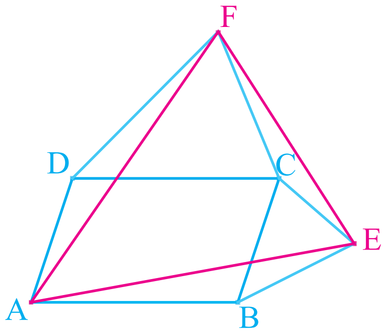
Caractériser, dans chaque cas, l'application f du plan dans lui-même.

1. $f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = z + 1 + i$.
2. $f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = -z + 1$.
3. $f : M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = e^{i\frac{\pi}{4}} z + i$.

Exercice résolu 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Dans la figure ci- contre ABCD est un parallélogramme et DCF et BEC sont des triangles isocèles de sommets respectifs D et B tels que $\widehat{\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DF}\right)} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}\right)} \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.



Montrer que le triangle AEF est isocèle en A.

Solution

La rotation r' de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ envoie C sur E.

On en déduit que $z_E = e^{-i\frac{\pi}{4}}\left(z_C - z_B\right) + z_B$ $(*)$.

La rotation r de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$ envoie C sur F.

On en déduit que $z_F = z_D + e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z_C - z_D\right)$ $(**)$.

L'égalité $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ implique que $z_C - z_B = z_D$, ou encore que $z_C = z_B + z_D$.

Il résulte alors des relations $(*)$ et $(**)$ que $z_F = e^{i\frac{\pi}{4}} z_E$.

Ce qui prouve que le triangle AEF est isocèle de sommet principal A.

IV. Antidéplacements

Activité 1

Soit A et B deux points distincts et S la symétrie orthogonale d'axe (AB).

On considère un point C de (AB) et un point D n'appartenant pas à (AB).

On note A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D par S.

Comparer $\widehat{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)}$ et $\widehat{\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}\right)}$. Que peut-on conclure ?

Théorème

Une isométrie est un antidéplacement, si et seulement si, c'est la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation.

Démonstration

Il est clair que la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation est un antidéplacement.

Réciproquement, soit f un antidéplacement, A un point et A' son image par f.
Alors l'antidéplacement $f \circ t_{\overrightarrow{A'A}}$ fixe le point A' et par suite $f \circ t_{\overrightarrow{A'A}}$ est une symétrie orthogonale. Le théorème en découle.

Activité 2

Soit un carré ABCD de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par S la symétrie orthogonale d'axe (AC) et R la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et on pose $f = S \circ R$.

1. Montrer que f est un antidéplacement
2. Déterminer $f(B)$ et en déduire la nature de f.
3. Soit Δ la parallèle à (AD) passant par I et on pose $g = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{\Delta}$. Quelle est la nature de g ?

Activité 3

Soit une droite D de vecteur directeur $\vec{u}$.

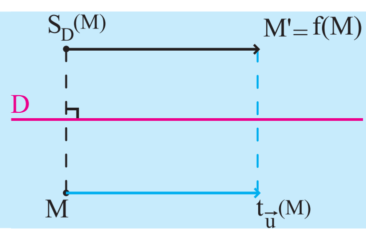
On désigne par S_D la symétrie orthogonale d'axe D et par $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

1. Montrer que $t_{\vec{u}} \circ S_D \circ t_{\vec{u}} \circ S_D = t_{2\vec{u}}$.
2. En déduire que $t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$.
3. Soit D' une droite de vecteur directeur $\vec{u'}$, $S_{D'}$ la symétrie orthogonale d'axe D' et $t_{\vec{u'}}$ la translation de vecteur $\vec{u'}$.

   Montrer que si $t_{\vec{u}} \circ S_D = t_{\vec{u'}} \circ S_{D'}$ alors D et D' sont confondues et $\vec{u} = \vec{u'}$.

Théorème et définition

Soit f une symétrie glissante.
Il existe un unique vecteur non nul $\vec{u}$ et une droite D unique tels que $f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.
Cette décomposition est appelée forme réduite de f.



Vocabulaire

On dit que D est l'axe de la symétrie glissante et $\vec{u}$ son vecteur.
L'axe et le vecteur d'une symétrie glissante sont ses éléments caractéristiques.

Activité 4

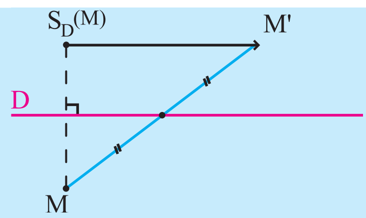
Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe D.

1. Montrer que pour tout point M d'image M' par f, le milieu I de $[MM']$ appartient à D.
2. Si M est un point de D d'image M' par f, alors $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.

Propriété

Soit f une symétrie glissante de vecteur $\vec{u}$ et d'axe D,
M un point d'image M' par f.

- Le milieu de $[MM']$ appartient à D.
- Si M est un point de D , alors $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$.
- $f \circ f$ est la translation de vecteur $2\vec{u}$.



Activité 5

Soit ABC un triangle isocèle en A. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.

Soit f l'antidéplacement qui transforme A en C et B en A.
Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

Activité 6

On considère un rectangle ABCD. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$.

1. Soit l'isométrie $f = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AB)}$.

   a. Déterminer la droite Δ pour que $S_{\Delta} \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AD}}$.

   b. En déduire que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

2. Soit l'isométrie $g = S_{(AB)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$.

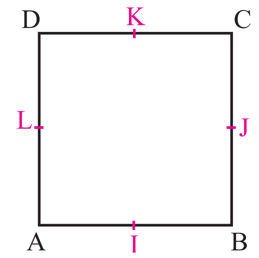
   a. Soit Δ' l'image de la droite (IJ) par la symétrie orthogonale d'axe (AB).

   Caractériser l'isométrie $S_{(AB)} \circ S_{\Delta'}$.

   b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice résolu 2

Dans la figure ci-contre ABCD est un carré direct et I, J, K et L sont les milieux des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.



Justifier l'existence de l'antidéplacement g et donner les éléments caractéristiques de g dans chacun des cas ci-dessous.

1. $g(J) = I$ et $g(K) = L$.
2. $g(B) = K$ et $g(K) = A$.
3. $g(A) = C$ et $g(D) = B$.

Solution

1. Il est clair que $JK = IL$ et que $IL \neq 0$.
On en déduit l'existence de g.
Les segments $[JI]$ et $[KL]$ ayant la même médiatrice (BD), on en déduit que g est la symétrie orthogonale d'axe (BD).

2. L'existence de g résulte des relations $BK = KA$ et $KA \neq 0$.
D'autre part les segments $[BK]$ et $[KA]$ ont des médiatrices distinctes, on en déduit que g est une symétrie glissante.
L'axe Δ de g passe par les milieux des segments $[BK]$ et $[KA]$, ce qui prouve que $\Delta = (LJ)$.
De plus, $g \circ g(B) = A$. On en déduit que g est de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

3. L'existence de g résulte des relations $AD = CB$ et $CB \neq 0$.
Soit f l'unique déplacement vérifiant $f(A) = C$ et $f(D) = B$ alors f est la symétrie centrale de centre O, centre du carré ABCD.
L'antidéplacement $f \circ S_{(AD)}$ transforme A en C et D en B.
Donc $g = f \circ S_{(AD)} = S_{(JL)} \circ S_{(KI)} \circ S_{(AD)} = S_{(JL)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

Exercice résolu 3

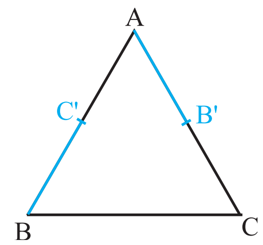
Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On désigne par B' et C' les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$.

On se propose de déterminer toutes les isométries f telles que $f(A) = B$ et $f(B') = C'$.

1. Montrer qu'il existe un unique déplacement r qui vérifie les conditions voulues.
2. Donner les éléments caractéristiques de r.
3. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui vérifie les conditions voulues.
   Donner les éléments caractéristiques de g.
   Conclure.

Solution



1. Le triangle ABC étant équilatéral et les points B' et C' étant les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[AB]$, il en résulte que $AB' = BC'$.
On en déduit qu'il existe un unique déplacement r qui envoie A sur B et B' sur C'.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{BC'}$ étant distincts, il en résulte que r est la rotation de centre le point d'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[B'C']$ et d'angle $\widehat{\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{BC'}\right)}$.
Par suite r est la rotation de centre le point G, centre de gravité du triangle ABC et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
3. L'égalité $AB' = BC'$ implique l'existence d'un unique antidéplacement g qui envoie A sur B et B sur C'. Les médiatrices de $[AB]$ et $[B'C']$ étant distinctes, il en résulte que g est une symétrie glissante d'axe passant par les milieux de $[AB]$ et de $[B'C']$.
On en déduit que l'axe de g est la droite $(B'C')$ et de vecteur $\overrightarrow{B'C'}$.
Les seules isométries qui envoient A sur B et B' sur C' sont la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et la symétrie glissante d'axe $(B'C')$ et de vecteur $\overrightarrow{B'C'}$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point quelconque. L'application $t_{\vec{u}} \circ S_A$ est

☐ une translation. ☐ une symétrie centrale. ☐ une symétrie glissante.

2. Un déplacement qui fixe deux points distincts est

☐ une translation de vecteur non nul. ☐ une rotation d'angle non nul. ☐ l'identité.

3. La composée de deux symétries glissantes est

☐ une symétrie glissante. ☐ un déplacement. ☐ Une symétrie orthogonale.

4. Soit D une droite et O un point de D.
L'application $S_D \circ R\left(O, \frac{\pi}{3}\right)$ est

☐ une symétrie orthogonale. ☐ une rotation. ☐ Une symétrie glissante.

5. Soit A et B deux points distincts.
L'application $S_A \circ S_B$ est

☐ la translation $t_{2\overrightarrow{AB}}$. ☐ l'identité. ☐ la translation $t_{2\overrightarrow{BA}}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La composée de trois symétries orthogonales est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante.
2. Un antidéplacement qui fixe un point est une symétrie orthogonale.
3. Soit I et J deux points distincts, f un déplacement qui envoie I sur J et g un antidéplacement qui envoie J sur I. Alors $g \circ f$ est une symétrie glissante.
4. La réciproque d'une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$ est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $-\vec{u}$.
5. Soit ABCD un carré direct et f le déplacement qui envoie A sur C et B sur D. Alors f est une translation.

Dans tous les exercices le plan est orienté dans le sens direct.

1 Soit OAB Un triangle isocèle en O.

Montrer qu'il existe deux isométries qui fixent O et qui envoient A en B.

2 Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I le milieu de [CD].

1. Montrer qu'il existe quatre isométries qui transforment le segment [AD] en le segment [BC].
2. Existe-t-il une isométrie qui transforme le triangle BCO en le triangle ADI ?

3 Soit ABCD un rectangle.

On désigne par S_1, S_2 et S_3 les symétries d'axes respectifs (AD), (AB) et (AC).

1. Donner la nature de l'isométrie $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
2. Construire le point E, image de B par $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.
3. Caractériser alors $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

4 On considère un triangle ABC isocèle en A et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$ et on désigne par r la rotation de centre A qui envoie B sur C. Soit D, E et F les images respectives de C, D et E par r.

1. Montrer que F est l'image de B par une rotation r' de centre A, que l'on précisera.
2. Soit G le symétrique de A par rapport à D.
A-t-on $S_{(AC)} \circ S_{(AE)} = S_{(AD)} \circ S_{(AG)}$?

5 Soit A, B, C et D des points tels que $AB = CD$ et $AB \neq 0$.

Montrer qu'il existe deux déplacements f et g qui envoient le segment [AB] sur le segment [CD].

2. Définir f et g dans chacun des cas ci-dessous.
a. La droite (CD) est parallèle à la droite (AB).
b. Les droites (CD) et (AB) sont sécantes.

6 On considère deux cercles isométriques $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de centre O et O' se coupant en deux points A et B.

1. Montrer qu'il existe une unique rotation de centre A qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$. Préciser son angle.
2. Soit M' l'image par cette rotation d'un point quelconque M du cercle $\mathscr{C}$. Montrer que les points M, B et M' sont alignés.

7 Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $AB < AC$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. Soit E le milieu du segment $[BC]$ et P le point du segment $[AC]$ tel que $AB = CP$. La droite (OE) coupe $\mathscr{C}$ en I et J tels que J et A soient sur le même arc orienté $\overset{\frown}{BC}$ du cercle $\mathscr{C}$.

1. a. Faire une figure.
b. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
c. Déterminer l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $MB < MC$.
2. a. Justifier qu'il existe une rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Déterminer son angle.
b. Démontrer que le centre de R est un point de $\mathscr{C}$ que l'on précisera.
c. Quelle est la nature du triangle JAP ?

8 On considère un carré ABCD de sens direct et de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au carré ABCD.

Soit R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$ et $f = T \circ R$.

1. Déterminer $f(D)$ et $f(A)$.
2. Identifier f.

9 Soit un parallélogramme ABCD.

1. Préciser la nature des transformations ci-dessous.
a. $f = S_{(AB)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CB)}$.
b. $g = S_{(AB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CB)} \circ S_{(CD)}$.
c. $h = S_{(AB)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(CB)}$.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de f, g et h lorsque ABCD est un rectangle.

10 Soit un parallélogramme direct ABCD.

On considère le triangle direct IBA rectangle et isocèle en I et les triangles directs ACC' et ADD' rectangles et isocèles en A.

R_A désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A et T désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

1. On pose $f = R_A \circ T$.

a. Déterminer $f(B)$. En déduire que f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre I.

b. Montrer que le triangle ICD' est rectangle isocèle.

2. Soit J le milieu de $[CC']$ et on désigne par R_J la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre J

a. Montrer que $C = R_J(A)$.

b. Que vaut $\left(\widehat{\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{CB}}\right)$?

c. Montrer que le triangle BJD' est rectangle isocèle.

3. Soit $g = R_J \circ f$.

a. Déterminer $g(B)$.

b. Soit $K = R_J(I)$. Montrer que K est le symétrique de I par rapport au milieu A' de $[BC]$.

11 On considère des triangles équilatéraux directs OAA', OBB' et OCC'.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.

On note E, F et G les symétriques respectifs du point O par rapport à I, J et K.

1. Soit r_1 la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B' et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Identifier $f_1 = r_1 \circ r_2$.

2. a. Evaluer $\left(\widehat{\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OA}}\right)$.

b. En déduire que le triangle $EB'A$ est équilatéral.

3. Soit t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ et t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{B'O}$.

a. Préciser la nature de $f_2 = t_1 \circ r_1 \circ t_2$.

b. Déterminer $f_2(B')$ puis identifier f_2.

c. Déterminer $f_2(F)$.

Quelle est alors la nature du triangle EFG ?

d. Quelle est la nature du triangle IJK ? Justifier.

12 On considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O.

On note r_A et r_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\frac{\pi}{2}$ et S_O la symétrie de centre O.

On place un point C, non situé sur la droite (AB) et on construit les carrés directs BEDC et ACFG.

1. a. Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{(AB)}$.

b. Montrer que $S_O = r_A \circ r_B$.

2. a. Déterminer l'image de E par $r_A \circ r_B$.

b. En déduire que O est le milieu du segment $[EG]$.

c. On note r_F et r_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer $r_F \circ S_O \circ r_D(C)$ puis identifier l'isométrie $r_F \circ S_O \circ r_D$.

d. Soit H le symétrique de D par rapport à O

Démontrer que $r_F(H) = D$, en déduire que le triangle FOD est rectangle et isocèle.

13 On considère un triangle ABC tel que

$AB = AC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On pose $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

1. a. Déterminer l'image de K par f et l'image de J par g.

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.

2. a. Déterminer la nature de $g \circ f^{-1}$.

b. Chercher l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractériser alors $g \circ f^{-1}$.

c. Soit M un point du plan, n'appartenant pas à la droite (IJ), M_1 est l'image de M par f et M_2 est l'image de M par g.

Montrer que le quadrilatère ACM_2M_1 est un parallélogramme ?

14 Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit $D = r(C)$ et $E = r^{-1}(B)$.

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$.

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement tel que $f(A) = D$ et $f(C) = A$.

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. Soit $g = f \circ r$.

a. Montrer que g est une translation.

b. Soit $F = g(E)$. Montrer que $f(B) = F$ et en déduire la nature du triangle BIF.

c. Montrer que les points C, A et F sont alignés.

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8, b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. a. Placer les points A, B, C, A', B' et C'.

b. On note a', b', c' les affixes respectives des points A', B' et C'. Déterminer a', b', c'

c. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en O.

2. a. Calculer la distance $OA + OB + OC$.

b. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

3. Soit M un point du plan d'affixe z.

a. Montrer que

$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right| = \left|a + bj^2 + cj\right| = 22$.

b. Montrer que $|z + z' + z''| \le |z| + |z'| + |z''|$, pour tous nombres complexes z, z', z''.

c. En déduire une condition sur M pour que la distance $MA + MB + MC$ soit minimale.

16 On considère deux triangles équilatéraux directs ABC et DEF.

On note G et H les points tels que EDBG et CDFH sont des parallélogrammes.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux manières (l'une utilisant les nombres complexes, l'autre utilisant les composées de déplacements) que le triangle AGH est équilatéral.

I/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct, on note a, b, c, d, e, f, g et h les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G et H

1. Montrer que $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$.

Exprimer $(f-d)$ à l'aide de $(e-d)$.

2. Exprimer g à l'aide de b, d et e.

Exprimer h en fonction de c, d et f.

3. Montrer que $h - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$.

En déduire que le triangle AGH est équilatéral.

II/ On note t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$.

R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $f = t_2 \circ R \circ t_1$.

1. a. Justifier que f est une rotation et préciser son angle.

b. Déterminer l'image de B par f et en déduire le centre de la rotation f.

2. Déterminer l'image de G par f et montrer que le triangle AGH est équilatéral.

17 Soit ABCD un carré direct et de centre O du plan. Soit f l'antidéplacement qui transforme A en D et D en C.

1. Montrer que f est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Soit $E = f(C)$.

a. Montrer que DCE est un triangle isocèle, rectangle en C et direct.

b. Construire le point E.

c. Déterminer et construire l'image F du point B par f.

3. Déterminer et caractériser l'application $f \circ S_{(AD)}$.

18 On considère un rectangle ABCD et on désigne par O, I, J et K les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$, $[OB]$ et $[OC]$.

1. a. Déterminer les images respectives des points B et I par $t_{\overrightarrow{JK}} \circ S_{(JK)}$.

b. Déterminer toutes les isométries qui transforment B en O et I en D.

2. Soit Δ la médiatrice du segment $[IC]$.

a. Construire le point E image de B par la symétrie orthogonale S_Δ .

b. Soit L le milieu du segment $[CD]$
Déterminer l'image de D par la symétrie centrale S_L .

c. En déduire la nature de $S_L \circ t_{\overrightarrow{JK}} \circ S_{(JK)}$.

19 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Déterminer les expressions analytiques, la nature et les éléments caractéristiques de f dans chacun des cas ci-dessous.

a. $A(1, 2)$ et $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $f = R_{(A, \frac{\pi}{3})} \circ t_{\vec{u}}$.

b. $D : 2x - 3y + 1 = 0$, $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $f = t_{\vec{u}} \circ S_D$.

c. $D_1 : y - 1 = 0$, $D_2 : x - y - 1 = 0$ et $f = S_{D_1} \circ S_{D_2}$.

20 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit r l'application de $P \to P$ qui a tout point $M(x, y)$ associé $M'(x', y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x \end{cases}.$$

1. Montrer que r est une rotation dont on précisera le centre A et une mesure de son angle.

2. Soit $f = r \circ S_{(O, \vec{j})}$. Montrer que f est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

21 Soit l'équation

$(E) : z^3 - (2 + 4i)z^2 - (9 - 10i)z + 18 + 6i = 0$

1. a. Vérifier que 3 est une racine de (E).

b. En déduire les deux autres solutions z_1 et z_2 (z_1 étant la racine ayant la partie réelle positive).

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, A, B et C sont trois points d'affixes respectives 3, z_1 et z_2 .

a. Montrer que OABC est un parallélogramme.

b. Montrer qu'il existe un unique déplacement f et un unique antidéplacement g transformant O en B et A en C.

2. Identifier f.

3. Soit S la symétrie orthogonale d'axe (OA).
Montrer que $g = f \circ S$.

22 Soit A, B, C et A' quatre points distincts d'un cercle Γ de centre O.

1. Faire une figure et placer les points B' et C' tels que les droites (AB') et $(A'B)$ soient respectivement parallèles aux droites (BC') et $(B'C)$.

2. On note Δ_1, Δ_2 et Δ_3 les médiatrices respectives des segments $[AB']$, $[CB']$ et $[CA']$. On désigne par S_1, S_2 et S_3 les symétries orthogonales d'axes respectifs Δ_1, Δ_2 et Δ_3.

a. Montrer que $f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$ est une symétrie orthogonale.

b. Identifier $f \circ f$.

c. Montrer que $S_3(C') = A$ et en déduire que les droites (AC') et $(A'C)$ sont parallèles.

23 On considère un carré ABCD de centre I tel que

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$.

A/ On désigne par J et K les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[CD]$, par C' le symétrique du point C par rapport à D.

Soit R_D et R_B les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs D et B, S_I la symétrie centrale de centre I et S_K la symétrie centrale de centre K

1. Soit $f = R_D \circ S_I \circ R_B$.

a. Déterminer $f(B)$.

b. Montrer que f est une translation que l'on caractérisera.

2. On pose $g = f \circ S_{(IJ)}$.

a. Déterminer $g(C)$ et $g(D)$.

b. En déduire que g est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

3. a. Montrer que $S_{(AD)} \circ S_{(CD)} \circ S_{(IK)} \circ S_{(IJ)} = f$

b. En déduire que $S_K \circ S_{(IJ)} = S_{(AD)} \circ f$

c. Montrer que $S_{(AD)} \circ f$ est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

B/ Soit Ω le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABD.

On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r' la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1. Construire le point A' image de A par r'.
2. Identifier $r' \circ r$.
3. Montrer que les droites $(\Omega A')$ et (AB) sont parallèles.

24 Soit ABC un triangle direct et A' le milieu du segment $[BC]$.

Soit P et Q les deux points définis par $\begin{cases} PA = PC \\ \left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$ et $\begin{cases} QB = QA \\ \left(\widehat{\overrightarrow{QB},\overrightarrow{QA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$.

On désigne par Ω le milieu du segment $[PQ]$, I le milieu du segment $[QA']$, J le milieu du segment $[PA']$ et P' le symétrique de P par rapport à A'.

On désigne par R_P et R_Q et les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs P et Q.

On pose $f = R_Q \circ S_{A'} \circ R_P$.

1. a. Déterminer $f(A)$. Caractériser alors f.

b. Montrer que $R_Q(P') = P$.

2. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A') = Q$ et $\varphi(P) = A'$.

b. Caractériser φ.

c. Donner la nature et les éléments caractéristiques de $h = \varphi \circ S_{(A'Q)}$.

3. Soit ψ l'antidéplacement qui envoie A' sur Q et P sur A'.

a. Montrer que $\psi(J) = I$.

b. Montrer que ψ est une symétrie glissante.

c. Déterminer les éléments caractéristiques de ψ.

4. Soit M un point du plan.
On pose $\psi(M) = M_1$ et $\varphi(M) = M_2$.
Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on déterminera.

25 On considère un carré ABCD de centre I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soit E le point du plan tel que DCE est un triangle équilatéral direct.
On désigne par J, K et L les milieux respectifs des segments $[DC]$, $[AD]$ et $[DE]$ et par O le centre du cercle circonscrit au triangle DCE.

1. On pose $\varphi = R_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{(IJ)}$.

a. Déterminer $\varphi(C)$ et $\varphi(D)$.

b. Montrer alors que φ est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques.

2. a. Caractériser l'application $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)}$.

b. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application $\psi = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(AB)}$.

3. Pour tout point N du plan on considère les points $N_1 = R_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)}(N)$ et $N_2 = R_{\left(O,-\frac{2\pi}{3}\right)}(N)$.

Montrer que le milieu du segment $[N_1N_2]$ est un point fixe que l'on précisera.

4. Soit M_0 un point du plan. On considère la suite des points (M_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(M_n) = M_{n+1}$.

a. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\overrightarrow{M_0M_{2n}} = (2n)\overrightarrow{IL}$.

b. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, M_{2n} appartient à une droite fixe que l'on précisera.

26 On considère un rectangle ABCD tel que $AB = 2BC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement f du plan tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$.

b. Caractériser f puis en déduire que $f(B) = D$.

2. Déterminer la droite Δ telle que $f = S_{(IJ)} \circ S_\Delta$.

3. Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a. Déterminer $r(B)$, $r(C)$ et $r(J)$.

b. Soit M un point de $[CJ]$, la perpendiculaire à (IM) issue de I coupe la perpendiculaire à (BM) issue de J en M'. Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit $[CJ]$?

4. On pose $g = r \circ f$.

a. Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.

b. Déterminer $g(A)$.

c. Déduire la construction du centre de g.

5. a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h tel que $h(A)=C$ et $h(I)=J$.

b. Montrer que h est une symétrie glissante.

c. Montrer que $h(B)=D$.

6. On propose de déterminer les éléments caractéristiques de h en utilisant deux méthodes.

Première méthode

a. Déterminer $h\circ S_{(AB)}(A)$ et $h\circ S_{(AB)}(B)$.

En déduire $h\circ S_{(AB)}$.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de h.

Deuxième méthode

a. On pose $D'=h(D)$.

Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CD'}})\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $CD'=AD$.

En déduire que D' est le symétrique de B par rapport à C.

b. En déduire les éléments caractéristiques de h.

c. Construire le point $C'=h(C)$.

7. Le cercle de diamètre $[AB]$ recoupe $[AC]$ en E.

Le cercle de diamètre $[CD]$ recoupe $[CC']$ en E'.

Soit F le symétrique de E' par rapport à (IJ).

Montrer que (EF) est parallèle à (AD).

27 On considère AFED un carré de coté 4 cm tel que $(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}})\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et O son centre.

On désigne par B et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).

1. a. Soit r la rotation définie par $r(F)=E$ et $r(E)=D$. préciser l'angle et le centre de r.

b. Soit $f=r\circ S_{(OO_1)}$ où $S_{(OO_1)}$ désigne la symétrie orthogonale d'axe (OO_1). Montrer que f est la symétrie orthogonale d'axe (OE).

2. Soit $r'=t_{\overrightarrow{OO_1}}\circ r^{-1}$ où $t_{\overrightarrow{OO_1}}$ désigne la translation de vecteur $\overrightarrow{OO_1}$ et r^{-1} la rotation réciproque de r

a. Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle.

b. Déterminer $r'(O)$. En déduire que F est le centre de r'.

3. On désigne par g l'antidéplacement défini par $g(D)=F$ et $g(O)=O_1$.

a. Montrer que g est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

b. Soit M un point du plan. Montrer que $g(M)=r'(M)$, si et seulement si, $f(M)=M$.

c. En déduire l'ensemble des points M tels que $g(M)=r'(M)$.

28 Soit ABC un triangle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$, O est le centre du cercle $\mathscr{C}$ circonscrit au triangle ABC et I est le point d'intersection des bissectrices intérieures de ce triangle. Les points P et Q appartiennent respectivement aux demi-droites $[CA)$ et $[BA)$ et vérifient $CP=BQ=BC$.

1. a. Montrer que la droite (CI) est la médiatrice du segment $[PB]$ et que la droite (BI) est la médiatrice du segment $[CQ]$.

b. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CP},\overrightarrow{QB}})\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

2. Soit f la rotation qui transforme C en Q et P en B.

a. Montrer que f a pour centre I et pour angle $\frac{2\pi}{3}$.

b. Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}})\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

c. Montrer que les points I, P et Q sont alignés.

3. On pose $O_1=f(O)$ et $O_2=f(O_1)$.

a. Montrer que $O=f(O_2)$.

b. En déduire que le triangle OO_1O_2 est équilatéral et que la droite (OI) est la médiatrice du segment $[O_1O_2]$.

4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et $g=f\circ r\circ f$.

a. Montrer que g est une translation.

Vérifier que $g(O_2)=O_1$. En déduire le vecteur de translation.

b. Montrer que $r(B)=C$. En déduire que $g(P)=Q$.

c. Montrer alors que les droites (OI) et (PQ) sont perpendiculaires.

Chapitre 4

Similitudes

Dans son programme d'Erlangen, en 1872, Felix Klein propose le caractère d'aujourd'hui de la géométrie, en considérant la géométrie comme l'étude d'une famille de transformations.
Certaines familles de transformations méritent une étude particulière : celles dont la composée de deux transformations appartienne encore à cette famille, l'identité appartienne aussi à cette famille et la transformation inverse d'une transformation de la famille y appartienne encore (chaque famille forme alors ce qu'on appelle groupe).
Parmi ces transformations, les déplacements, les symétries, les similitudes et leurs composés forment ce que Klein appelle le groupe principal de la géométrie euclidienne ; les propriétés métriques sont alors les propriétés invariantes par ce groupe.

(J. Dhombres et al, Mathématiques au fil des âges, 1987).

Chapitre 4

Similitudes

Dans tout le chapitre, le plan est orienté dans le sens direct.

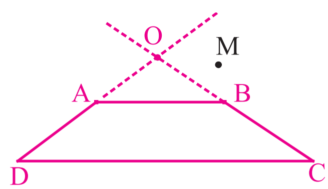
I. Homothéties et translations

Définition (rappel)

Soit I un point et k un réel non nul. On appelle homothétie de centre I et de rapport k l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.

Activité 1

Dans la figure ci-contre, ABCD est un trapèze et M est un point.
Les droites (AD) et (BC) se coupent en O.
On désigne par h l'homothétie de centre O qui transforme A en D
1. Montrer que h transforme B en C.
2. Construire l'image du point M par h.



Théorème (propriété caractéristique d'une homothétie)

Soit k un réel non nul et différent de 1.
Une application f est une homothétie de rapport k, si et seulement si, pour tous points M et N d'images M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Démonstration

Si f est une homothétie de rapport k, alors pour tous points M et N d'images M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{IN'} = k(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IN}) = k\overrightarrow{MN}$.

Réciproquement, soit une application f telle que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, pour tous points M et N d'images M' et N' par f. Montrons que f est une homothétie.
Soit A un point d'image A' et I le barycentre des points pondérés $(A, -k)$ et $(A', 1)$ de sorte que $\overrightarrow{IA'} = k\overrightarrow{IA}$.
Pour tout point M du plan d'image M', $\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'M'} = k(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM}) = k\overrightarrow{IM}$.
Le résultat en découle.

Théorème

Toute homothétie conserve les mesures des angles orientés.

Démonstration

Soit h une homothétie de rapport k et A, B , C trois points du plan deux à deux distincts. On note A', B' et C' leurs images respectives par h . On peut alors écrire

$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}}) \equiv (\widehat{k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})\ [2\pi]$.

Composée de deux homothéties

Théorème

La composée de deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2 est

une homothétie de rapport $k_1 k_2$ si $k_1 k_2 \neq 1$,

une translation si $k_1 k_2 = 1$.

Démonstration

Soit k_1 et k_2 deux réels non nuls et h_1 et h_2 deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2. Pour tous points M et N du plan d'images respectives M' et N' par $h_2 \circ h_1$,

$\overrightarrow{M'N'} = k_2 k_1 \overrightarrow{MN}$.

Si $k_1 k_2 \neq 1$, alors $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$.

Si $k_1 k_2 = 1$, alors $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ et par conséquent $h_2 \circ h_1$ est une translation.

Activité 2

Soit A et B deux points distincts du plan et h_1 et h_2 deux homothéties de centres respectifs A et B et de rapports respectifs 2 et $\frac{1}{3}$.

Construire le centre de chacune des homothéties $h_2 \circ h_1$ et $h_1 \circ h_2$.

Activité 3

Soit t une translation de vecteur $\vec{u}$ et h une homothétie de rapport $k \neq 1$.

1. a. Soit A et B deux points du plan et A' et B' leurs images respectives par $h \circ t$. Montrer que $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.
   b. Quelle est alors la nature de $h \circ t$?
2. Déterminer de même la nature de $t \circ h$.

L'activité précédente permet d'énoncer le théorème ci-dessous.

Théorème

La composée d'une translation et d'une homothétie de rapport $k \neq 1$ est une homothétie de rapport k.

Homothétie et nombres complexes

Théorème

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
L'application f est une homothétie de rapport $k \neq 1$, si et seulement si, il existe un nombre complexe b tel que $z' = kz + b$. De plus, l'affixe z_A du centre A de l'homothétie f vérifie $z_A = \dfrac{b}{1-k}$.

Démonstration

Soit f une application et M un point d'image respective M' par f.
On désigne par z et z' les affixes respectives des points M et M'.
L'application f est une homothétie de centre A et de rapport $k \neq 1$, si et seulement si, $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$, ou encore si et seulement si, $z' - z_A = k(z - z_A)$, où z_A est l'affixe du point A.
On en déduit que f est une homothétie de centre A et de rapport k, si et seulement si, $z' = kz + z_A(1-k)$.
Le théorème en découle.

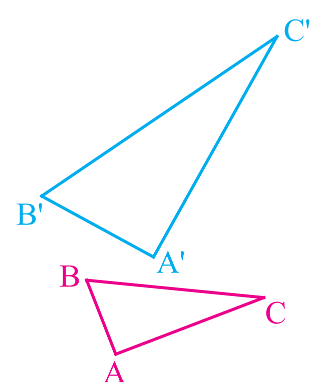
Activité 4

Donner dans chacun des cas suivants, la nature et les éléments caractéristiques de l'application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
a. $z' = -2z + 3$.
b. $z' = 4z + 1 - i$.

II. Similitudes

Activité 1

Dans la figure ci-contre ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles tels que $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.
Soit I un point de $[A'B']$ tel que $A'I = AB$ et J un point de $[A'C']$ tel que $A'J = AC$.
1. Montrer que les droites (IJ) et $(B'C')$ sont parallèles.
2. Montrer qu'il existe une isométrie g qui envoie A, B et C respectivement sur A', I et J.
3. Soit h l'homothétie de centre A' qui envoie I sur B' et $S = h \circ g$.
   Déterminer les images de A, B et C par S.



Définition

Soit k un réel strictement positif. On appelle similitude de rapport k, toute application du plan dans lui-même telle que pour tous points A et B d'images respectives A' et B', $A'B' = k\,AB$.

Exemples

Les isométries sont des similitudes de rapport 1.

Toute homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$.

Théorème

La composée de deux similitudes de rapports respectifs k et k' est une similitude de rapport kk'.

Démonstration

Soit f une similitude de rapport k et g une similitude de rapport k'.
Soit A et B deux points du plan, A' et B' leurs images respectives par f et A'' et B'' les images respectives de A' et B' par g. On peut écrire $A''B'' = k'\,A'B' = k'k\,AB$. Par suite, $g \circ f$ est une similitude de rapport kk'.

Théorème

Une application du plan dans lui-même est une similitude, si et seulement si, elle est la composée d'une homothétie et d'une isométrie.

Démonstration

Soit f une similitude de rapport k et h une homothétie de rapport k.
On peut écrire $f = h \circ (h^{-1} \circ f)$. De plus, l'application $h^{-1} \circ f$ est une isométrie car c'est une similitude de rapport 1. On en déduit que f est la composée dune homothétie et d'une isométrie.
Réciproquement, soit f la composée d'une homothétie de rapport k et d'une isométrie g.
Soit A et B deux points, A' et B' leurs images respectives par g et A'' et B'' les images respectives de A' et B' par h. Alors $A''B'' = |k|\,A'B' = |k|\,AB$.
On en déduit que f est une similitude.
Le cas où f est la composée d'une isométrie et d'une homothétie se traite de la même manière.

Théorème

Pour tous points A,B,C et D, d'images respectives A', B', C' et D' par une similitude de rapport k, $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = k^2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

Démonstration

Soit $f = h \circ g$ une similitude telle que h est une homothétie de rapport k et g est une isométrie. Soit A, B, C et D des points, A_1, B_1, C_1 et D_1 leurs images respectives par g et A', B', C' et D' les images respectives de A_1, B_1, C_1 et D_1 par h.
Alors $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = k^2\,\overrightarrow{A_1B_1}.\overrightarrow{C_1D_1} = k^2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.

Les propriétés ci-dessous découlent des propriétés des homothéties et des isométries.

Propriétés

- Une similitude de rapport k est une bijection et sa réciproque est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$.
- Une similitude conserve les angles géométriques.
- Une similitude conserve l'orthogonalité.
- Une similitude conserve l'alignement et le barycentre.
- Une similitude transforme un segment en un segment.
- Une similitude transforme une droite en une droite.
- Une similitude conserve le parallélisme.
- Une similitude transforme un cercle en un cercle et conserve le contact.
- Soit A, B, C, D, E, F des points du plan et A', B', C', D', E', F' leurs images respectives par une similitude.
  Si $\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{CD} + b\overrightarrow{EF}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = a\overrightarrow{C'D'} + b\overrightarrow{E'F'}$.

Théorème

Deux similitudes qui coïncident sur trois points non alignés coïncident sur tout le plan.

Démonstration

Soit f et g deux similitudes qui coïncident sur trois points non alignés A, B et C.

Alors f et g ont nécessairement le même rapport et alors $f^{-1} \circ g$ est une isométrie qui fixe les points A, B et C. Il en résulte que $f^{-1} \circ g$ est l'identité du plan et par suite $f = g$.

Activité 2

On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, s'il existe une similitude qui envoie A, B et C sur A', B' et C'.

1. Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles semblables. Montrer que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

2. Montrer que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables, si et seulement si, $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$.

Propriétés

Soit f, g et h trois similitudes.

- $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.
- $f = g$, si et seulement si, $h \circ f = h \circ g$.

III. Similitudes directes – Similitudes indirectes

Activité 1

Soit h et h_1 deux homothéties et g et g_1 deux isométries telles que $h \circ g = h_1 \circ g_1$.

1. Montrer que $h_1^{-1} \circ h$ est un déplacement.
2. Montrer que g est un déplacement, si et seulement si, g_1 est un déplacement.

Définition

On dit qu'une similitude est directe si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.
On dit qu'une similitude est indirecte si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

Conséquence

Toute similitude directe conserve les mesures des angles orientés.
Toute similitude indirecte change les mesures des angles orientés en leurs opposées.

Théorème

- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.
- La composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.
- La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.
- La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

Théorème

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Il existe une unique similitude directe qui envoie A sur C et B sur D.
Il existe une unique similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D.

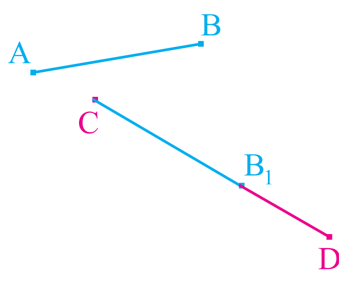
Démonstration

Unicité

Si f et g sont deux similitudes de même nature qui coïncident sur deux points distincts A et B, alors $f \circ g^{-1}$ est une similitude directe qui fixe A et B et qui a pour rapport 1. On en déduit que $f \circ g^{-1}$ est l'identité du plan.

Existence

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
Soit B_1 le point de la demi- droite [CD) tel que $CB_1 = AB$.
On sait qu'il existe un unique déplacement g qui envoie A sur C et B sur B_1. Si h est l'homothétie de centre C qui envoie B_1 sur D alors $f = h \circ g$ est la similitude directe qui envoie A sur C et B sur D.



De même, on sait qu'il existe un unique antidéplacement g_1 qui envoie A sur C et B sur B_1.

Si h est l'homothétie de centre C qui envoie B_1 sur D alors $f = h \circ g_1$ est la similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D.

IV. Similitudes directes

IV. 1 Angle d'une similitude directe

Théorème et définition

Soit f une similitude directe et A, B, C et D des points tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Soit A', B', C' et D' les images respectives de A, B, C et D.

Alors $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'})}\ [2\pi]$.

En désignant par θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, on dit que f est une similitude directe d'angle θ.

Activité 1

Soit f et g deux similitudes directes d'angles respectifs θ et θ'.
Soit deux points distincts A et B. On note A' et B' les images de A et B par g et A'' et B'' les images de A' et B' par f.

Déterminer $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A''B''})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB})}$.

Théorème

Soit f et g deux similitudes directes d'angles respectifs θ et θ'.
La similitude directe $f \circ g$ est d'angle $\theta + \theta'$.

La similitude directe f^{-1} est d'angle $-\theta$.

IV. 2 Centre d'une similitude directe

Activité 1

Soit A et B deux points distincts du plan et k un réel strictement positif et différent de 1. On considère l'ensemble E des points M du plan tels que $MA = kMB$.

1. Montrer que M appartient à E, si et seulement si, $\left(\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}\right) = 0$.
2. Soit G le barycentre de $(A,\ 1)$ et $(B, -k)$ et G' le barycentre de $(A,\ 1)$ et $(B,\ k)$.

   Montrer que M appartient à E, si et seulement si, $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MG'} = 0$.
3. En déduire que E est le cercle de diamètre $[GG']$.

Activité 2

Soit A et B deux points distincts du plan.
Déterminer et construire dans chacun des cas, l'ensemble F des points M du plan tels que

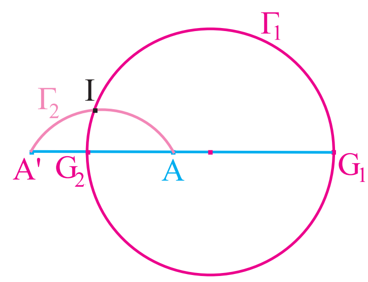
a. $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$, b. $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, c. $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{4\pi}{3}\,[2\pi]$.

Théorème

Toute similitude directe de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Démonstration

Soit f une similitude directe de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ.
Si f est une homothétie alors f admet un unique point fixe, qui est le centre de l'homothétie.
Supposons que f n'est pas une homothétie, dans ce cas l'angle de f est non nul. Considérons un point A non invariant par f, d'image A'.



Soit Γ_1 le cercle de diamètre $[G_1G_2]$ où G_1 et G_2 sont les barycentres respectifs de $(A',\,1)$, $(A,-k)$ et $(A',\,1)$, $(A,\,k)$.
Soit Γ_2 l'ensemble des points du plan tels que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MA'}}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$.

Alors Γ_2 est soit un arc de cercle, soit un segment privé des points A et A'.

Les ensembles Γ_1 et Γ_2 se coupent en un unique point I car G_2 appartient à $[AA']$ et G_1 n'appartient pas à $[AA']$.

De plus, le point I vérifie les relations $IA' = kIA$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\,\overrightarrow{IA'}}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$.

L'image I' de I par f est l'unique point vérifiant $I'A' = kIA$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\,\overrightarrow{I'A'}}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$.

Il en résulte que les points I et I' sont confondus, c'est-à-dire que f fixe I.

Conséquence

Une similitude directe de rapport différent de 1 est parfaitement déterminée par la donnée de son centre, son rapport et son angle.
Le centre, le rapport et l'angle d'une similitude directe sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.
Une application f est une similitude directe de rapport $k \neq 1$, de centre I et d'angle θ, si et seulement si, pour tout point M distinct de I, d'image M', $IM' = k\,IM$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$.

Exercice résolu 1

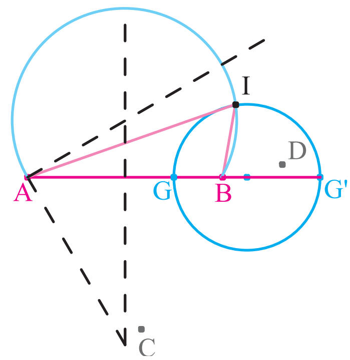
Soit A, B, C et D des points distincts tels que $BD = \frac{1}{3}AC$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Construire le centre I de la similitude directe S qui transforme A en B et C en D.

Solution

Le centre I de S vérifie $IA = 3IB$ et $(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

Soit G et G' les barycentres respectifs de (A, 1), (B, 3) et (A, 1), (B, –3).
Le point I appartient à l'intersection du cercle de diamètre $[G\ \ ]$ et de l'arc de cercle ensemble des points M du plan tels que $(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.



Activité 3

Soit A et B deux points distincts du plan.
Soit f une similitude directe qui ne fixe aucun des points A et B.
On suppose que les images respectives A' et B' de A et B par f sont telles que les droites (AA') et (BB') sont strictement parallèles.

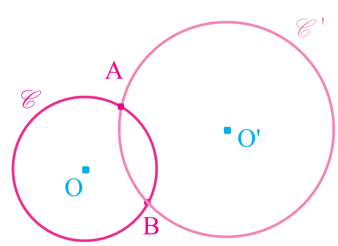
1. Montrer que si deux points C et D de la droite (AB) vérifient $CA = DA$ et $CB = DB$ alors $C = D$.
2. Montrer que si les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, alors le rapport de f vaut 1.
3. On suppose que f est de rapport $k \neq 1$ et on note I l'intersection des droites (AB) et $(A'B')$.

a. Montrer que l'image I' de I par f appartient à la droite $(A'B')$.
b. Montrer que $I'A' = IA'$ et $I'B' = IB'$.
c. En déduire le centre de f.

Exercice résolu 2

Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux cercles de centres respectifs O et O' et se coupent en A et B.

1. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe f de centre A, qui transforme $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.
   b. Préciser le rapport et l'angle de f.
2. Soit M un point de $\mathscr{C}$.
   a. Construire son image M' par f.
   b. Comparer $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'M'}})$.
   c. En déduire que les points M, B et M' sont alignés.

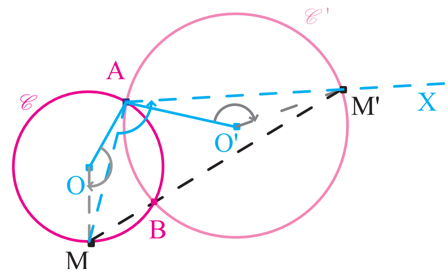


Solution

1. a. On sait qu'il existe une unique similitude directe qui envoie A sur A et O sur O'.
   Cette similitude transforme nécessairement $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$.

   b. Il s'agit de la similitude de centre A, de rapport $\dfrac{OA'}{OA}$ et d'angle $\widehat{(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'})}$.

2. a. Le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}'$ et vérifie
   $\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'})}\ [2\pi]$.
   Le point M' appartient donc à l'intersection du cercle $\mathscr{C}'$ avec la demi-droite [AX) telle que
   $\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AX})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AO'})}\ [2\pi]$.



   b. On sait qu'une similitude directe conserve les mesures des angles orientés.
   On en déduit que $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'M'})}\ [2\pi]$.

   c. Les angles au centre $\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'A'})}$ vérifient les égalités
   $\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})} = 2\widehat{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA})} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $\widehat{(\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'A})} = 2\widehat{(\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{BA})} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
   De plus, la relation de Chasles nous permet d'écrire que
   $\widehat{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})} = \widehat{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM'})} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   Il en résulte que $\widehat{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})} = \dfrac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA})} + \dfrac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'M'})} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
   La relation $\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{O'A},\overrightarrow{O'M'})}\ [2\pi]$ implique alors que
   $\widehat{(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'})} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Ce qui prouve que les points M, B et M' sont alignés.

IV. 3 Forme réduite d'une similitude directe

Activité 1

Soit f une similitude directe de centre I, de rapport k et d'angle non nul θ et h l'homothétie de centre I et de rapport k et r la rotation de centre I et d'angle θ.
1. Donner les éléments caractéristiques des similitudes f, $h \circ r$ et $r \circ h$.
2. En déduire que $f = h \circ r = r \circ h$.

Théorème

Toute similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ se décompose sous la forme $f = h \circ r = r \circ h$ où h est l'homothétie de centre I et de rapport k et r est la rotation de centre I et d'angle θ. Cette décomposition s'appelle forme réduite de f.

Activité 2

Soit I un point du plan.
Donner la forme réduite de la similitudes $h \circ r$ dans chacun des cas suivants.

1. h est l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$ et r est lidentité.
2. h est l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$ et r est la rotation de centre I

   et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
3. h est l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{1}{2}$ et r est la symétrie centrale de centre I .

Activité 3

Soit AECD un carré de centre B. On désigne par h lhomothétie de centr e A et de rapport 2 et par r la rotation de centre B, qui envoie C sur D. Donner les éléments caractéristiques des similitudes $h \circ r$ et $r \circ h$.

IV. 4 Similitudes directes et nombres complexes

Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit h l'homothétie de centre $A(0, 1)$ et de rapport 2, r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit M un point d'affixe z, M' son image par r et M'' limage de M' par h.
On désigne par z' et z'' les affixes respectives de M' et M''.
Exprimer z' en fonction de z, puis z'' en fonction de z.

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
L'application f est une similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et dangle θ, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = az + b$, avec $a = ke^{i\theta}$ et $z_I = \frac{b}{1-a}$ est l'affixe de I.

Démonstration

Soit f une application et M un point d'image M' par f.
On désigne par z et z' les affixes respectives des points M et M'.
L'application f est une similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et dangle θ,
si et seulement si, f fixe I, $IM' = k\ IM$ et $(\widehat{\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IM'}}) \equiv \theta\ [2\pi]$ pour tout point M distinct de I.
On en déduit que f est une similitude directe de centre I, de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ, si et seulement si, $|z' - z_I| = k|z - z_I|$ et $\arg\left(\frac{z' - z_I}{z - z_I}\right) \equiv \theta[2\pi]$, pour tout $z \neq z_I$.
Ce qui équivaut à, $z' - z_I = ke^{i\theta}(z - z_I)$, $z \neq z_I$.
Le théorème en découle sachant que la relation précédente est vraie pour $M = I$.

Activité 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

Donner dans chacun des cas suivants, la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques.

a. $z' = -2iz + 3$.

b. $z' = 4z + 1 - i$

c. $z' = e^{i\frac{\theta}{6}} z + 1$.

Activité 3

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $AB = AC = 1$.

On désigne par D le milieu de [BC] et on munit le plan du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Donner l'écriture complexe de la similitude directe de centre A qui envoie C sur D.

V. Similitudes indirectes

Rappelons qu'une similitude indirecte est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.

Théorème et définition

Une similitude indirecte de rapport différent de 1 admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Démonstration

Soit f une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$. La similitude directe $f \circ f$ est de rapport $k^2 \neq 1$ et admet un unique point fixe que nous noterons I.

Posons $f\left(I\right) = J$. Il en résulte que $I = \left(f \circ f\right)\left(I\right) = f\left(f\left(I\right)\right) = f\left(J\right)$.

On en déduit alors que $IJ = k\,IJ$ puis que $I = J$ car $k \neq 1$.

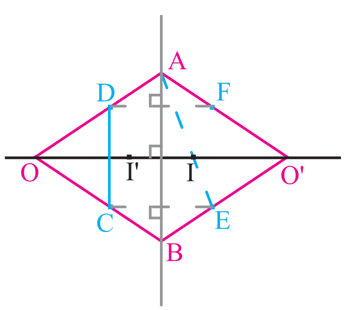
L'unicité résulte du fait que f fixe I, si et seulement si, I est le centre de $f \circ f$.

Activité 1

Dans la figure ci-contre, $OBO'A$ est un losange et les droites (CD) et (AB) sont parallèles.

On note h l'homothétie de centre O qui envoie C sur B.

On désigne par S la symétrie orthogonale d'axe (AB) et on pose $f = h \circ S$.



1. Soit E et F les symétriques respectifs de C et D par rapport à la droite (AB).
   Déterminer les images par f des points O', E et F.
2. Soit I le point d'intersection de [AE] et (OO') et I' son symétrique par rapport à la droite (AB). Montrer que I' appartient à [AC] et en déduire que I est le centre de f.

V. 1 Forme réduite d'une similitude indirecte

Activité 1

Soit f une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$. On désigne par h lhomothétie de centre I et de rapport k.

1. Montrer que $h^{-1} \circ f$ est une symétrie orthogonale d'axe une droite D passant par I.
2. Soit M un point distinct de I et M' son image par f.
   Montrer que M appartient à D, si et seulement si, $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.
3. Montrer que $h \circ S_D = S_D \circ h$.

Théorème

Soit f une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$ et h l' homothétie de centre I et de rapport k. Il existe une droite D telle que f se décompose de manière unique sous la forme $f = h \circ S_D = S_D \circ h$, où S_D est la symétrie orthogonale d'axe D.

Dans ce cas, la droite D est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$, où $M' = f(M)$.

Cette décomposition est appelée forme réduite de f.

La droite D est appelée axe de la similitude indirecte f.

Conséquences

Une similitude indirecte de rapport différent de 1, est parfaitement déterminée par son rapport, son centre et son axe, qui sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.

L'axe D d'une similitude indirecte de centre I et la perpendiculaire à D passant par I sont globalement invariants par f.

Si f est une similitude indirecte de centre I et de rapport k alors $f \circ f$ est une homothétie de centre I et de rapport k^2.

Activité 2

Soit ABCD un carré direct de centre O. On note I le milieu de [AB]

1. Soit f la similitude directe telle que $f(A) = B$ et $f(D) = I$.

Déterminer le rapport et l'angle de f et construire son centre Ω.

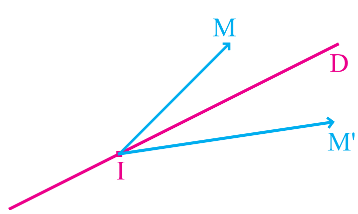
2. Soit $g = f \circ S_{(\Omega C)}$.

Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera les éléments caractéristiques.

Activité 3

Soit f une similitude indirecte de centre I, de rapport $k \neq 1$, d'axe D et $\vec{u}$ un vecteur directeur de D.

Montrer que $\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{IM'})} \equiv -\widehat{(\vec{u}, \overrightarrow{IM})}\ [2\pi]$, pour tout point M distinct de I, d'image M' par f.



Propriété

Soit f une similitude indirecte de centre I, de rapport différent de 1 et d'axe D.

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D, alors $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IM'}}\right) \equiv -\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{IM}}\right)\ [2\pi]$, pour tout M distinct de I, d'image M'. La droite D porte donc la bissectrice intérieure de $\widehat{MIM'}$.

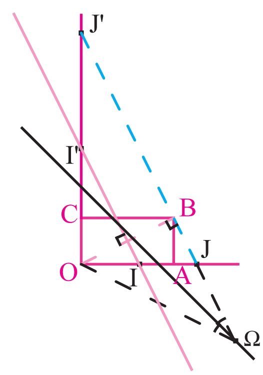
Exercice résolu

On considère un rectangle OABC tel que OA = 2 OC et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

La médiatrice Δ du segment [OB] coupe la droite (OA) en I et la droite (OC) en I'. Soit J et J' les symétriques respectifs de O par rapport à I et I'.

1. Montrer que les triangles OBJ et OBJ' sont rectangles en B.
2. En déduire que les points B, J et J' sont alignés.
3. Soit S la similitude indirecte qui transforme J en O et O en J'.
   a. Donner le rapport de S et en déduire que S admet un unique point fixe Ω.
   b. Caractériser $S \circ S$ et en déduire que Ω appartient à (JJ').
   c. Construire Ω et l'axe de S.

Solution



1. D'après les données le point I est le milieu de [OJ].
   On déduit alors des égalités IO = IB = IJ que le triangle OBJ est rectangle en B.
   On prouve de la même manière que le triangle OBJ' est rectangle en B.
2. Les droites (BJ) et (BJ') sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (OB). Par suite les points B, J et J' sont alignés.
3. a. Le rapport de S est égal à $\frac{OJ'}{OJ}$. De plus, $\frac{OJ'}{OJ} = \tan \widehat{JO} = \frac{OA}{AB}$.
   On en déduit que S est de rapport 2 et par suite, S admet un unique point fixe Ω.
   b. On déduit de la forme réduite de S que $S \circ S$ est lhomothétie de centre Ω et de rapport 4.
   De plus, $S \circ S(J) = S(O) = J'$. Il en résulte que Ω est le point de (JJ') tel que $\overrightarrow{\Omega J'} = 4\,\overrightarrow{\Omega J}$.
   c. L'axe de S est la droite portant la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{O\Omega J}$

V. 2 Similitude indirecte et nombres complexes

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. L'application f est une similitude indirecte de centre I et de rapport k ≠ 1, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = a\bar{z} + b$.

Dans ce cas $k = |a|$ et $z_I = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$ est l'affixe du point I.

Démonstration

On suppose que le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et on note S la symétrie orthogonale d'axe $\left(O, \vec{i}\right)$.

Alors $S \circ f$ est une similitude directe qui à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe $z'' = a_1 z + b_1$.

On en déduit que $S \circ S \circ f = f$ associe à tout M d'affixe z le point M', symétrique de M'' par rapport à $\left(O, \vec{i}\right)$, ayant pour affixe $z' = \overline{z''} = \overline{a_1 z + b_1} = \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{b_1}$.

Le théorème en découle en posant $a = \overline{a_1}$ et $b = \overline{b_1}$.

De l'égalité $f = S \circ S \circ f$, on déduit que le rapport k de f est le même que celui de la similitude directe $S \circ f$. C'est-à-dire $k = |a|$

Le centre I de f est défini par $z_I = a\overline{z_I} + b$, ou encore $\overline{z_I} = \overline{a}\, z_I + \overline{b}$.

Le résultat en découle.

Activité

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit f la similitude indirecte qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -2i\overline{z} + 6$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.

1. Montrer que f est une similitude indirecte dont on déterminera le rapport et le centre I.
2. Déterminer l'ensemble des M d'affixe z tels que $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$.

   En déduire une équation de l'axe de f.

QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M(z)$ et $M'(z')$.

1. Soit I un point quelconque. L'homothétie $h(I, -4)$ est une

☐ similitude indirecte de rapport 4. ☐ similitude directe de rapport 4 et d'angle nul. ☐ similitude directe de rapport 4 et d'angle π

2. Soit I et J deux points distincts. L'application $h(I, 2) \circ h\left(J, \frac{1}{2}\right)$ est

☐ une translation. ☐ une homothétie. ☐ l'identité.

3. L'image par une similitude de rapport $\frac{1}{2}$, d'un triangle d'aire $\mathcal{A}$ est un triangle dont l'aire est égale à

☐ $\mathcal{A}$. ☐ $4\mathcal{A}$. ☐ $\frac{\mathcal{A}}{4}$.

4. Soit Ω un point quelconque. L'application $r\left(\Omega, \frac{\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, -2)$ est une similitude directe dont la forme réduite est

☐ $r\left(\Omega, \frac{\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, 2)$. ☐ $r\left(\Omega, -\frac{\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, 2)$. ☐ $r\left(\Omega, -\frac{5\pi}{6}\right) \circ h(\Omega, 2)$.

5. Soit f la similitude indirecte de centre I, de rapport 2 et d'axe Δ. L'application $f \circ f$ est

☐ La similitude indirecte de centre I, de rapport 4 et d'axe Δ ☐ l'homothétie $h(I, 4)$. ☐ La similitude directe de centre I, de rapport 4 et d'angle π

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Une similitude directe qui fixe deux points distincts est l'identité.
2. La composée d'une similitude directe de rapport 2 et d'un antidéplacement est une similitude indirecte de rapport 2.
3. La composée d'une similitude directe de rapport 4 et d'une similitude indirecte de rapport $\frac{1}{4}$ est un déplacement.
4. La réciproque d'une similitude directe de centre I, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est la similitude directe de centre I, de rapport 3 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
5. Soit A, B, C et D des points tels que $A \neq C$ et $B \neq D$.
   Soit f la similitude indirecte qui envoie A sur B et C sur D. L'application $f \circ S_{(AC)}$ est une similitude directe de même rapport que f qui envoie A sur B et C sur D.

Dans tous les exercices le plan est orienté dans le sens direct.

1 Soit ABC un triangle équilatéral de centre G tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
Déterminer, dans chacun des cas, le rapport et l'angle de la similitude directe f.
a. f fixe B et envoie A sur C.
b. f fixe B et envoie C sur G.
c. f fixe G et envoie B sur C.

2 1. Soit S une similitude directe. Donner la nature de $S \circ f \circ S^{-1}$ dans chacun des cas ci-dessous.
a. f est une translation de vecteur non nul.
b. f est une rotation d'angle non nul.
c. f est une homothétie de rapport différent de 1.
d. f est une symétrie orthogonale d'axe passant par le centre de S.
2. Reprendre la question précédente en supposant que S est une similitude indirecte.

3 Soit ABCD un carré de côté 1, de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
On note I le milieu de [AO].
1. a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe S qui envoie A sur O et B sur I.
b. Déterminer le rapport et l'angle de S.
2. a. Donner l'écriture complexe de S dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.
b. Déterminer le centre de S.

4 Soit ABC un triangle non isocèle , rectangle en A et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
On désigne par H le projeté orthogonal de A sur (BC) et on note f la similitude directe qui envoie B sur A et A sur C.
1. Déterminer les éléments caractéristiques de f.
2. Soit M un point variable de [AB]. La perpendiculaire à (HM) menée de H coupe [AC] en N. Montrer que le cercle de diamètre [MN] passe par un point fixe.

5 Soit ABCD un carré de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
Soit S la similitude directe de centre D qui envoie O sur C.
1. Déterminer le rapport et l'angle de S.
2. Déterminer l'image du point A par S.
3. Construire l'image du point C par S.

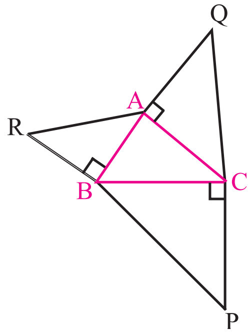
6 Soit un triangle direct ABC et M un point du plan.
Soit S la similitude directe de centre A qui envoie B sur C.
Construire l'image de M dans chacun des cas ci-dessous.
1. Le point M n'appartient pas à (AB).
2. Le point M appartient à la droite (AB) privée des points A et B.

7 Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par A' le symétrique de A par rapport à C.
1. a. Préciser le rapport et l'angle de la similitude directe S qui envoie A' sur C et C sur B.
b. Déterminer l'image par S de la droite (AC).
2. a. Soit I le centre de S. Montrer que le triangle ICB est rectangle isocèle.
b. Construire I.
c. Construire l'image du cercle de centre C et de rayon CA.

8 Soit ABCD un carré direct de centre O.
1. a. Préciser l'angle et le rapport de la similitude directe S qui envoie A sur O et B sur D.
b. Construire le centre de f.
c. Déterminer $S(D)$.
2. Existe-t-il une similitude directe qui envoie A sur O, B sur D et D sur C ?

9 Soit A et B deux points. On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport -2 et par r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose $S = r \circ h$.
1. Montrer que S est une similitude directe et déterminer son rapport et son angle.
2. Soit O le centre de la similitude S et $A' = r(A)$.
a. Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $OA' = 2OA$.
b. Construire le point O.
3. Soit $B' = h(B)$.
Construire le centre de la similitude $S' = h \circ r$ et préciser son angle et son rapport.

10 Dans la figure ci-dessous le triangle ABR est isocèle et rectangle en B, le triangle BCP est isocèle et rectangle en C et le triangle CAQ est isocèle et rectangle en A.



On note respectivement par S_P , S_Q et S_R les similitudes directes de centres P, Q et R.
On suppose de plus que les trois similitudes sont de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit $f = S_R \circ S_P \circ S_Q$.

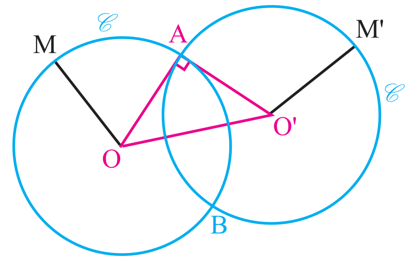
1. Déterminer $f(A)$.
2. Préciser f et donner ses éléments caractéristiques.

11 Soit O et B deux points distincts et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [OB].
Soit A un point du segment [OB] distinct de O et B et I le milieu de [AB].
La médiatrice de [AB] coupe le cercle $\mathscr{C}$ en M et M′ tels que $(\widehat{\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
Soit N le projeté orthogonal de A sur (OM).
1. a. Quelle est la nature du quadrilatère AMBM′ ?
b. En déduire que la droite (AM′) est orthogonale à (OM) et que les points N, A et M′ sont alignés.
2. On désigne par S la similitude de centre N qui envoie M sur A.
a. Déterminer l'angle de S.
b. Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA).
c. En déduire l'image par S de M′.
d. Déterminer l'image I′ de I par S.
e. Montrer que la droite (NI) est tangente en N au cercle de diamètre [OA].

12 Soit un triangle AHH′ isocèle en H et tel que $(\widehat{\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HH'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et M un point de la droite (HH′) et M′ le point tel que le triangle AMM′ soit isocèle en M avec $(\widehat{\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MA}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
1. Préciser la similitude directe de centre A, qui envoie M sur M′.
2. Quel est l'ensemble E des points M′ lorsque M décrit (HH′) ?
3. Soit J le milieu de [MM′]. Calculer $\frac{AJ}{AM}$ et montrer que $(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AJ}})$ ne dépend pas du point M.
4. Quel est l'ensemble F des points J lorsque M décrit (HH′) ? Construire F.

13 Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A.
1. Montrer que le triangle ABH est l'image du triangle CAH par une similitude directe que l'on déterminera.
2. Montrer que le triangle HAC est l'image du triangle ABC par la composée d'une similitude directe et d'une symétrie orthogonale que l'on précisera.
3. Par quelle transformation peut-on passer du triangle ABC au triangle HBA ?

14 dans la figure ci-dessous AOO′ est un triangle rectangle et isocèle en A, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O passant par A et $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre O′ passant par A, les cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se recoupent en B, M est un point de $\mathscr{C}$ et M′ est le point de $\mathscr{C}'$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'}}) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.



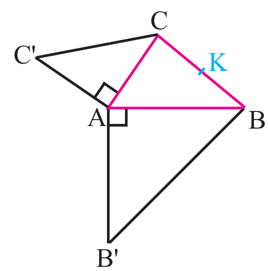
1. Préciser la similitude directe qui envoie O sur O′ et M sur M′.
2. Si M est distinct de B et de $S_O(B)$, la droite (MB) recoupe $\mathscr{C}'$ en un point N′ et la droite (BM′) recoupe $\mathscr{C}$ en N.
Montrer que BN = BN′ et que les droites (BN) et (BN′) sont perpendiculaires.
3. Soit les carrés MBM′P et NBN′Q .
a. Quel est l'ensemble des points P et l'ensemble des points Q lorsque M varie ?
b. Montrer que la droite (PQ) passe par un point fixe.

15 Soit la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = 2iz + 3 - i$.
1. Soit B le point d'affixe i et C le point d'affixe -1. On désigne par B' et C' les images respectives de B et C par f. Déterminer $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}}\right)$ et exprimer $B'C'$ en fonction de BC.
2. Identifier f et donner ses éléments caractéristiques.

16 Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit les points $A(3, -1)$ et $B(0, 2)$.
On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\sqrt{2}$, r la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{4}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BO}$.
On pose $f = t \circ r \circ h$.
1. a. Caractériser $t \circ r$.
b. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.
c. Donner l'écriture complexe de f.
2. Déterminer et construire le point K tel que $f(K) = O$.

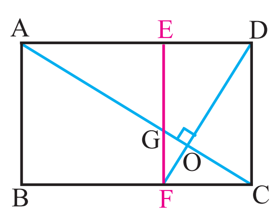
17 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A = 2 + i$, $z_B = 1 + 2i$, $z_C = 6 + 3i$ et $z_D = -1 + 6i$.
1. Montrer qu'il existe une rotation qui transforme A en B et C en D.
Préciser ses éléments caractéristiques.
3. On désigne par J le point d'affixe $3 + 5i$.
Montrer que la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.
4. On désigne par I le point d'affixe $1 + i$, M et N les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.
Déterminer la nature du quadrilatère IMJN.
5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD soient des carrées.
a. Calculer z_P et z_Q, les affixes respectives des points P et Q.
b. Déterminer $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IP}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IQ}\right)$.
En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(A) = P$ et $g(C) = Q$.
c. En déduire que J est l'image de M par g et que J est le milieu de [PQ].

18 Dans la figure ci-dessous ABC est un triangle quelconque, $AB'B$ et ACC' sont directs, rectangles, isocèles de sommet A et K est le milieu de [BC].



Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct d'origine A. On note a, b et c les affixes des points A, B et C.
1. Exprimer les affixes k, b' et c' des points K, B' et C' en fonction de b et c.
2. Montrer qu'il existe une unique similitude directe f qui envoie A sur B' et K sur C'.
3. a. Donner les éléments caractéristiques de f, son expression complexe ainsi que sa forme réduite.
b. En déduire que les droites (AK) et $(B'C')$ sont perpendiculaires.

19 Un rectangle d'or est un rectangle dont le quotient longueur/largeur est égal à $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
La figure ci-dessous représente un rectangle d'or ABCD et un carré ABFE.



1. Vérifier que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. En déduire que EFCD est un rectangle d'or.
2. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et D sur C. Préciser son rapport et son angle.

3. Quelle est l'image de C par f ?
4. En déduire que l'intersection O de (AC) et (DF) est invariant par f.
5. Montrer que les droites (AC) et (DF) sont perpendiculaires et que si G désigne l'intersection de (AC) et (EF) alors $ED = EG$.

20 On considère un rectangle ABCD tel que

$AD = 1$, $AB = 2$ et $(\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par L, K et J les milieux respectifs de $[AD]$, $[DC]$ et $[BC]$.

On munit le plan du repère $(D, \overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DA})$.

1. Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte f qui envoie A sur D et C sur B.
2. a. Déterminer $f(L)$ et $f(J)$.
b. Donner les éléments caractéristiques de f.

21 Soit ABC un triangle équilatéral direct .On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$ et par D le symétrique de A par rapport à C.
1. Soit f l'antidéplacement tel que $f(C) = A$ et $f(A) = B$. Identifier f.
2. Soit g la similitude directe telle que $g(B) = D$ et $g(I) = C$.
Montrer que $g(A) = A$ et déterminer les éléments caractéristiques de g.
3. Soit K le point défini par $\overrightarrow{KA}\ 2\overrightarrow{K\ 0} = \vec{}$
a. Donner la nature de $f \circ g$.
b. Déterminer $f \circ g(I)$ et $f \circ g(A)$.
c. vérifier que $\overrightarrow{KB}\ 2\overrightarrow{KA\ 0} = \vec{}$.
En déduire que $f \circ g(K) = K$
d. Déterminer le rapport de $f \circ g$.
e. Montrer que l'axe de la similitude $f \circ g$ est la perpendiculaire en K à la droite (AB).

22 Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la similitude indirecte f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1+i)\overline{z} + i$.
Déterminer le centre et l'axe de f.

23 Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère la similitude indirecte f qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -5i\overline{z} + 1 + i$.
1. Déterminer le centre et l'axe de f.
2. Déterminer l'image par f du cercle de centre I d'affixe $3+i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

24 On considère un rectangle OABC tel que

$OA = 2OC$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

La médiatrice D du segment [OB] coupe la droite (OA) en H et la droite (OC) en H' .
Soit J et J' les symétriques respectifs du point O par rapport à H et H' .
1. a. Montrer que les triangles OBJ et OB J' sont rectangles en B.
b. En déduire que les points B, J et J' sont alignés.
2. Soit f la similitude directe qui envoie J sur O et O sur J' .
a. Déterminer l'angle de f.
b. Déterminer $f(B)$ et en déduire le centre et le rapport de f.
3. Soit g la similitude indirecte qui envoie J sur O et O sur J' .
a. Donner le rapport de g.
b. En déduire que g admet un unique point invariant que l'on notera I.
c. Montrer que le point I appartient à $(J J')$.
d. Construire le centre et l'axe de g.

25 On considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

On désigne par I le milieu de [AC] et par K le milieu de [AB]
1.a. Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie B sur A et A sur C.
b. Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.
c. Soit D le symétrique de B par rapport à I. Montrer que $f(C) = D$.
d. Soit $D' = f(D)$. Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à C.
2. Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et I sur D.
a. Déterminer le rapport et l'angle de S.

b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [AB] et $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre [ID]. Montrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont sécants en I et en un autre point Ω.
Montrer que Ω est le centre de S.
3. Soit $g = f \circ S$. Déterminer la nature de g et ses éléments caractéristiques.

26 On considère un triangle isocèle ABC direct de sommet principal A. On pose

$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \equiv 2\alpha\ [2\pi]$, où α est un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On désigne par O le milieu de [BC] et D le symétrique de A par rapport à O.
Soit I et J les projetés orthogonaux respectifs de O et D sur (AC).
1. Soit f la similitude directe qui envoie O sur I et D sur J
Déterminer à l'aide de α, l'angle et le rapport de f.
Montrer que $f(A) = A$.
2. On désigne par E le symétrique de O par rapport à I.
Montrer que $f(B) = O$ et $f(C) = E$.
Déterminer $\frac{OE}{BC}$.
3. Soit g la similitude indirecte qui envoie B sur O et C sur E.
a. Déterminer le rapport de g et l'image de O par g.
b. Montrer que $g = S_{(OE)} \circ f$.
4. Soit Ω le centre de g.
a. Montrer que $g \circ g(D) = J$ et en déduire que Ω appartient à la droite (DJ).
b. Montrer que Ω appartient à la droite (BI).
c. Construire Ω.

27 Soit ABC un triangle rectangle en C tel que

$\widehat{\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)} \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$ coupe $[AC]$ en O.
On désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB) et par H' le milieu de [OA].
1. a. Faire une figure.
b. Montrer que le triangle OAB est isocèle et que H est le milieu de [AB].
2. Soit f la similitude directe telle que $f(B) = O$ et $f(H) = H'$.

a. Montrer que le rapport de f est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $\frac{\pi}{6}$ est une mesure de son angle.
b. Montrer que H' est le milieu du segment $[Of(A)]$.
En déduire que A est le centre de f.
3. Les cercles (Γ) et (Γ') de diamètres respectifs [AB] et [AO] se recoupent en D.
a. Montrer que les points B, O et D sont alignés.
b. Montrer que les triangles BCH et ODH' sont équilatéraux et que $f(C) = D$.
c. Montrer que le quadrilatère ADCH est un losange.
4. Soit $g = S_{(DH)} \circ f$, où $S_{(DH)}$ est la symétrie axiale d'axe (DH)
a. Déterminer g(A) et g(C).
b. Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
c. Soit Ω le centre de g.
Montrer que $\overrightarrow{\Omega D} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega D}$.
Construire alors le centre Ω et l'axe Δ de g.

Chapitre 5

Coniques

"Dans l'introduction de son livre, Al-Tusi donnait déjà :
- L'équation de la parabole par rapport à deux axes perpendiculaires dont l'un est l'axe de la parabole et l'autre est la tangente au sommet de la parabole.
- L'équation de l'hyperbole par rapport à deux axes perpendiculaires dont l'un est l'axe de l'hyperbole et l'autre est la tangente au sommet de l'hyperbole.
- L'équation d'une hyperbole équilatère par rapport à ses asymptotes.

Pour résoudre l'équation proposée [...]. Al-Tusi démontre que les deux coniques se coupent [...]."

(R.Rashed, Entre Arithmétique et Algèbre, 1984, p.177)

Chapitre 5

Coniques

I. La parabole

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit $\mathcal{P}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$.

On considère la droite D d'équation $y = -\dfrac{1}{4}$ et le point $F(0, \dfrac{1}{4})$.

Soit un point M de coordonnées (x, y) et H son projeté orthogonal sur D.

1. Calculer les distances MF et MH
2. En déduire que $MF = MH$, si et seulement si, M appartient à $\mathcal{P}$.

Activité 2

Soit D une droite du plan et F un point n'appartenant pas à D.

1. Soit H un point de D. Construire le centre M du cercle passant par F et tangent à D en H

Que vaut $\dfrac{MF}{MH}$?

2. On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangents à D.
   Pour tout point M du plan, on désigne par H son projeté orthogonal sur D.
   a. Montrer que $\mathcal{P} = \left\{M \text{ tels que } \dfrac{MF}{MH} = 1\right\}$.
   b. Construire quelques points de $\mathcal{P}$.
3. Soit K le projeté orthogonal de F sur D et O le milieu du segment $[K\ ]$.

Montrer que O appartient à $\mathcal{P}$.

Définition

Soit D une droite et F un point n'appartenant pas à D.
Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite D.
On appelle parabole de foyer F et de directrice D, l'ensemble des points M tels que $MF = MH$

Vocabulaire

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice D.
La perpendiculaire à D passant par F est appelée axe focal de la parabole.
La distance du foyer à la directrice est appelée paramètre de la parabole.

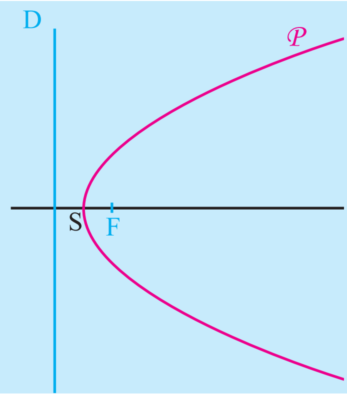
Activité 3

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice D. On désigne par K le projeté orthogonal de F sur D.

1. Montrer que la parabole $\mathcal{P}$ coupe la droite (FK) en un unique point S, milieu du segment $[FK]$.
2. Montrer que M appartient à $\mathcal{P}$, si et seulement si, son symétrique par rapport à (FK) appartient à $\mathcal{P}$.

Théorème

Toute parabole admet comme axe de symétrie son axe focal.
Toute parabole rencontre son axe focal en un unique point appelé sommet de la parabole.
Le sommet d'une parabole de foyer F et de directrice D est le milieu du segment $[FK]$ où K est le projeté orthogonal de F sur D.



Activité 4

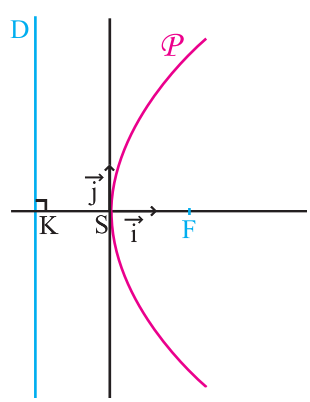
Soit D une droite du plan et A un point n'appartenant pas à D.
On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre A et tangent à la droite D.
1. Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite D et F un point de $\mathscr{C}$ distinct de H
Montrer que F est le foyer d'une parabole passant par A et ayant pour directrice la droite D.
2. Préciser le foyer F_1 de la parabole de sommet A et de directrice D.

I. 1 Equation réduite d'une parabole

Activité 1

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F, de directrice D et de sommet S.
On désigne par K le projeté orthogonal de F sur D et on pose
$FK = p$, $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire de sorte que le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ soit orthonormé.

1. Donner une équation de la directrice D dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Soit M un point de coordonnées (x, y).
   Montrer que M appartient à $\mathcal{P}$, si et seulement si, $y^2 = 2px$.



Théorème

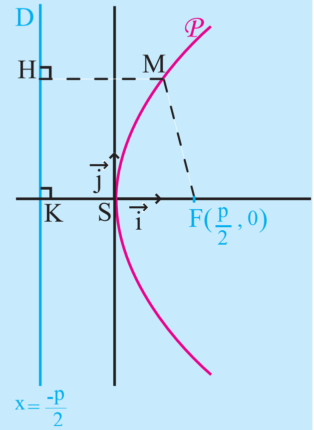
Soit $\mathcal{P}$ une parabole de sommet S, de foyer F et de paramètre p.

On munit le plan du repère orthonormé $\left(S, \vec{i}, \vec{j}\right)$, où $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$.

La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y^2 = 2px$, la directrice D

a pour équation $x = -\frac{p}{2}$ et le foyer F a pour coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$.

Réciproquement, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, l'ensemble des points $M\left(x, y\right)$ tels que $y^2 = 2px$ $\left(p > 0\right)$ est la parabole de foyer $F(\frac{p}{2}, 0)$, de directrice la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O.



Vocabulaire

L'équation $y^2 = 2px$ est appelée équation réduite de la parabole $\mathcal{P}$.

Activité 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit p un réel strictement positif.

On pose $\mathcal{P} = \left\{M(x, y) \text{ tels que } y^2 = 2px\right\}$ et $\mathcal{P}' = \left\{M(x, y) \text{ tels que } y^2 = -2px\right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}'$ est la symétrique de $\mathcal{P}$ par rapport à l'axe $\left(O, \vec{j}\right)$.
2. En déduire que $\mathcal{P}'$ est une parabole dont on précisera le foyer et la directrice.
3. Déterminer $\mathcal{P}'' = \left\{M(x, y) \text{ tels que } x^2 = 2py\right\}$.

Activité 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Représenter dans le même repère les paraboles d'équations respectives $y^2 = 3x$, $y^2 = -3x$, $x^2 = 3y$ et $x^2 = -3y$.

I. 2 Tangentes à une parabole

Activité

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $x^2 = 2py$ et la parabole $\mathcal{P}'$ d'équation $y^2 = 2px$.

1. Montrer que la tangente à T en un point $M_0\left(x_0, y_0\right)$ de $\mathcal{P}$ a pour équation $x_0 x = p\left(y + y_0\right)$.
2. En déduire une équation de la tangente à T' en un point $M_0\left(x_0, y_0\right)$ de $\mathcal{P}'$.

Théorème

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit p un réel strictement positif.

Si $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $y^2 = 2px$, alors la tangente à $\mathcal{P}$ en un point $M_0\left(x_0, y_0\right)$ est la droite d'équation $y_0 y = p\left(x + x_0\right)$.

Si $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $x^2 = 2py$, alors la tangente à $\mathcal{P}$ en un point $M_0\left(x_0, y_0\right)$ est la droite d'équation $x_0 x = p\left(y + y_0\right)$.

Conséquence

Soit une parabole d'équation $y^2 = 2px$, dans le repère orthonormé $\left(S, \vec{i}, \vec{j}\right)$, où S est le sommet de la parabole et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs directeurs unitaires respectifs de l'axe focal et de la directrice. Alors sa tangente au sommet a pour équation $x = 0$.

Vocabulaire

La tangente à une parabole en son sommet est appelée tangente au sommet.

Exercice résolu 1

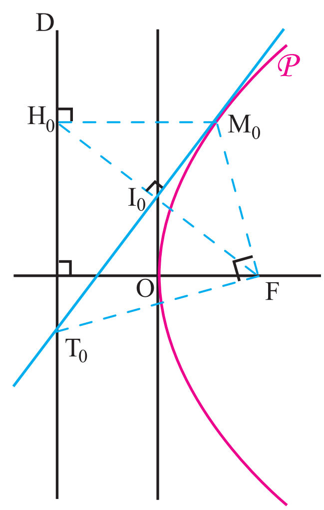
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F de directrice D et d'équation $y^2 = 2px$.

Soit $M_0\left(x_0, y_0\right)$ un point de $\mathcal{P}$ distinct de O et H_0 son projeté orthogonal sur D.

1. Montrer que la tangente T à $\mathcal{P}$ en M_0 est la médiatrice du segment $\left[FH_0\right]$.
2. La tangente T coupe D en T_0.

Montrer que l'angle $\widehat{M_0FT_0}$ est droit.



Solution

1. Le point F a pour coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$ et le point H_0 a pour coordonnées $(-\frac{p}{2}, y_0)$.

On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{FH_0}\begin{pmatrix}-p \\ y_0\end{pmatrix}$ est orthogonal à la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0.

L'égalité $M_0H_0 = M_0F$ permet de déduire que la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 est la médiatrice du segment $\left[FH_0\right]$.

2. Le triangle $M_0H_0T_0$ est rectangle en H_0 et F est le symétrique de H_0 par rapport à $\left(M_0T_0\right)$. Le résultat en découle.

II. L'hyperbole

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit $\mathcal{H}$ la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

On considère le point $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et la droite D d'équation $\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} - 1 = 0$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan et H son projeté orthogonal sur D.

1. Calculer les distances MF et MH
2. En déduire que $MH = \dfrac{1}{\sqrt{2}}MF$, si et seulement si, M appartient à $\mathcal{H}$.

Activité 2

Soit D une droite du plan, F un point n'appartenant pas à D
et K le projeté orthogonal de F sur D.

1. a. Construire le point S barycentre de $(F, 1)$ et $(K, -2)$.

   b. Que vaut le rapport $\dfrac{SF}{SK}$?

2. Construire le point S' barycentre de $(F, 1)$ et $(K, 2)$.

   Que vaut le rapport $\dfrac{S'F}{S'K}$?

3. Soit $\mathcal{H} = \left\{ M \text{ tels que } \dfrac{MF}{MH} = 2 \right\}$ où H est le projeté orthogonal de M sur D.

   On se propose de donner un procédé de construction d'un point de $\mathcal{H}$.
   On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre S et passant par F.
   Soit B un point de $\mathscr{C}$ distinct de F et I le point d'intersection de D et de (FB).
   On désigne par h l'homothétie de centre I qui envoie B sur F, M l'image de S par h
   et H le projeté orthogonal de M sur D.

   a. Montrer que h envoie K en H

   b. Que vaut le rapport $\dfrac{MF}{MH}$? En déduire que $M \in \mathcal{H}$.

   c. Construire quelques points de $\mathcal{H}$.

Définition

Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et un réel $e > 1$.
Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite D.
On appelle hyperbole de foyer F , de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MF}{MH} = e$.

Vocabulaire

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F et de directrice D.

La perpendiculaire à D passant par F est appelée axe focal de l'hyperbole.

Activité 3

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e. On désigne par K le projeté orthogonal de F sur D.

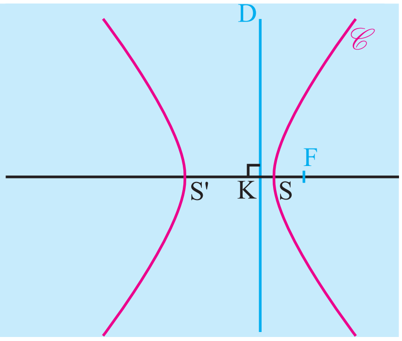
1. Montrer que l'intersection de $\mathcal{H}$ avec la droite (FK) se réduit à deux points.
2. Montrer que M appartient à $\mathcal{H}$, si et seulement si, son symétrique par rapport à (FK) appartient à $\mathcal{H}$.

Théorème

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

- L'axe focal *de* $\mathcal{H}$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{H}$.
- $\mathcal{H}$ rencontre son axe focal en deux points

appelés sommets de l'hyperbole et ils sont les barycentres respectifs des points $(F, 1)$, $(K, -e)$ et $(F, 1)$, (K, e) où K est le projeté orthogonal de F sur D.



II. 1 Equation réduite d'une hyperbole

Activité 1

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F , de directrice D et d'excentricité e.

On désigne par K le projeté orthogonal de F sur D et on note S et S′ les sommets de $\mathcal{H}$ et O le milieu de $[SS']$.

1. Montrer que $\overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{e}\overrightarrow{OS}$ où S est le barycentre des points pondérés $(F, 1)$ et (K, e).

2. On pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$ de sorte que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit orthonormé. On désigne par $(c, 0)$ les coordonnées de F et $(a, 0)$ celles de S.

   a. Montrer que $e = \frac{c}{a}$ et $OK = \frac{a^2}{c}$.

   b. Soit M un point de coordonnées (x, y).

   Montrer que M appartient à $\mathcal{H}$, si et seulement si, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$.

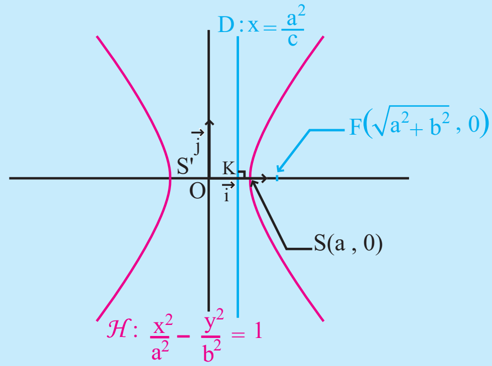
Théorème

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F , de directrice D et d'excentricité e, de sommet S et S'.

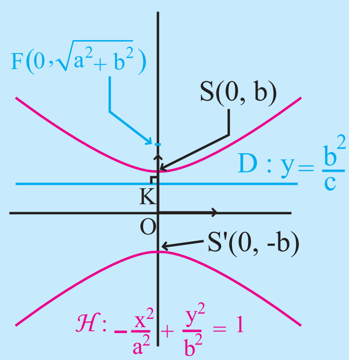
On désigne par O le milieu de $[SS']$, on pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$, directeur de D.

Si S a pour coordonnées $(a,\ 0)$ et F a pour coordonnées $(c,\ 0)$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors l'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b^2 = c^2 - a^2$.

Réciproquement, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0\ ,\ b > 0)$ est une hyperbole de centre O, de foyer $F\left(\sqrt{a^2+b^2}, 0\right)$, de directrice d'équation $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ avec $c = \sqrt{a^2+b^2}$ et de sommets $S(a, 0)$ et $S'(-a, 0)$.



Pour des raisons de symétrie par rapport à la droite $\Delta : y = x$, la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole de centre O, de foyer $F\left(0, \sqrt{a^2+b^2}\right)$, de directrice la droite d'équation $y = \frac{b^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{b}$ avec $c = \sqrt{a^2+b^2}$ et de sommets $S(0, b)$ et $S'(0, -b)$



Vocabulaire

L'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0\ ,\ b > 0)$ est appelée équation réduite de l'hyperbole.

Cette équation ne change pas si l'on change x en $-x$ ou y en $-y$. On en déduit

Théorème

- Toute hyperbole admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets. Ce centre de symétrie est appelé centre de l'hyperbole.
- Toute hyperbole admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice et passant par le centre de symétrie.

Conséquence

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyer F et de directrice D.
Le fait que l' hyperbole $\mathcal{H}$ admette un centre de symétrie implique l'existence d'une autre directrice D' et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de D et F.
On dit alors que F est le foyer associé à la directrice D et F' est le foyer associé à la directrice D'.

Activité 2

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole de foyer $F(5,0)$, de directrice associée la droite D d'équation $x = \frac{9}{5}$ et d'excentricité $e = \frac{5}{3}$.

2. a. Etudier la fonction $f : x \mapsto 4\sqrt{\frac{x^2}{9} - 1}$ pour $x \geq 3$.

b. Représenter les points $M(x, y)$ tels que $y = 4\sqrt{\frac{x^2}{9} - 1}$ et $x \geq 3$.

3. En déduire une représentation graphique de $\mathcal{H}$.

II. 2 Tangentes à une hyperbole et asymptotes à une hyperbole

Activité 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Montrer que $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{H}$, si et seulement si, $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ ou $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

2. On désigne par $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ et $x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$.

a. Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$.

b. Montrer que les droites d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ sont asymptotes à $\mathcal{H}$.

c. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{H}$. Montrer que la tangente à $\mathcal{H}$ en M_0 a pour équation $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Vocabulaire

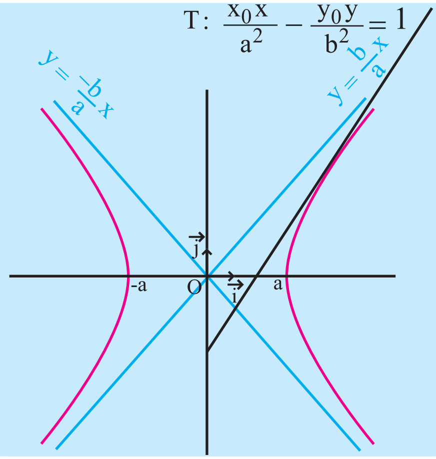
On dit qu'une hyperbole est équilatère si ses asymptotes sont perpendiculaires.

Théorème

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Alors $\mathcal{H}$ admet deux asymptotes d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$.

La tangente à $\mathcal{H}$ en un point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation $\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$.



Conséquence

La tangente à une hyperbole $\mathcal{H}$ en son sommet $S(a, 0)$ a pour équation $x=a$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

1. Déterminer les coordonnées de ses sommets et de ses foyers.
2. Donner les équations des asymptotes.
3. a. Tracer $\mathcal{H}$.

   b. En déduire le tracé de l'hyperbole $\mathcal{H}'$ d'équation $-x^2+\frac{y^2}{4}=1$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Trouver l'équation réduite de l'hyperbole de centre O, de sommet $S(5, 0)$ et dont l'une de ses asymptotes est la droite d'équation $5y+3x=0$.

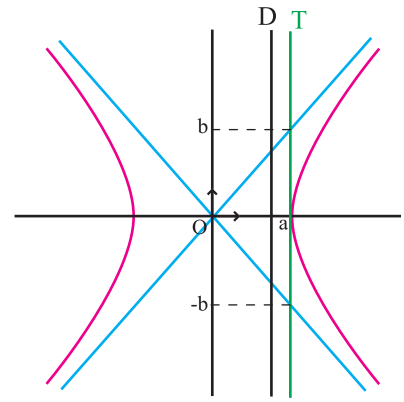
Exercice résolu 2

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que les points d'intersection des asymptotes à $\mathcal{H}$ avec la tangente au sommet $S(a, 0)$ ont pour coordonnées (a, b) et $(a, -b)$.
2. En déduire un procédé de construction des asymptotes d'une hyperbole, sachant que l'on connaît un de ses foyers F et ses sommets S et S'.

Solution

1. La tangente au sommet S a pour équation $x = a$.



Les asymptotes à l'hyperbole ont pour équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ et elles coupent la tangente au sommet S en $I(a, b)$ et $J(a, -b)$.

2. On sait que les asymptotes d'une hyperbole passent par le centre de cette hyperbole, qui est le milieu de $[SS']$.

Pour construire les asymptotes il suffit donc de construire les points I et J

Posons $OS = a$ et $OF = c$. On en déduit que $OI = OJ = \sqrt{a^2 + b^2} = c = OF$

On construit le cercle de centre O et de rayon OF.

Les points d'intersection de ce cercle avec la tangente au sommet S sont les points $I(a, b)$ et $J(a, -b)$.

Exercice résolu 3

On considère un triangle équilatéral ABC de côté L. On désigne par $\mathcal{H}$ l'hyperbole de foyer A, de directrice associée (BC) et d'excentricité 2.

1. Déterminer les sommets S et S' de $\mathcal{H}$, son centre et le second foyer F'.
2. Calculer les distances SS' et AF' en fonction de L.
3. Donner une équation de $\mathcal{H}$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, O étant le centre de $\mathcal{H}$ et $\vec{i}$ étant un vecteur unitaire directeur de (OA).

Solution

1. L' axe focal de $\mathcal{H}$ est la médiatrice de $[BC]$.

Soit K le milieu de $[BC]$. Les sommets S et S' sont les points tels que $\overrightarrow{SA} = -2\overrightarrow{SK}$ et $\overrightarrow{S'A} = 2\overrightarrow{S'K}$.

Il en résulte que S est le centre de gravité du triangle ABC et S' est le symétrique de A par rapport à K

Le centre O de l'hyperbole est le milieu de $[SS']$, c'est donc le symétrique de A par rapport à S.

Le second foyer F' est le symétrique de A par rapport à O.

2. Le triangle ABC étant équilatéral, il vient $AK = \frac{L\sqrt{3}}{2}$.

Par suite $SS' = SK + KS' = \frac{2L\sqrt{3}}{3}$.

De plus $AF' = 2\,OA = 2SS' = \frac{4L\sqrt{3}}{3}$.

3. L'hyperbole a pour centre O et son équation réduite s'écrit $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec

$a = OS = \frac{1}{2}SS' = \frac{L\sqrt{3}}{3}$. De plus $b^2 = OA^2 - OS^2$.

D'où $b^2 = \frac{12L^2}{9} - \frac{3L^2}{9} = L^2$. On en déduit que l'hyperbole est d'équation $\frac{3x^2}{L^2} - \frac{y^2}{L^2} = 1$.

II. 3 Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

Activité

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'hyperbole $\mathcal{H}$ de centre O , de foyer $F(2,0)$ et de directrice associée la droite D d'équation $x = \frac{1}{2}$

1. a. Donner l'équation réduite de $\mathcal{H}$.
   b. Construire $\mathcal{H}$.
2. Soit les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \sqrt{3}\,\vec{j}$.
   Ecrire une équation de $\mathcal{H}$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Théorème

Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a une équation de la forme $XY = k$ où k est un réel non nul.

Démonstration

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Considérons le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = a\vec{i} - b\vec{j}$ et $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Tout point M de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a pour coordonnées les réels X et Y dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tels que $\begin{cases} x = a(X+Y), \\ y = b(Y-X). \end{cases}$

On en déduit que $M(x, y) \in \mathcal{H}$, si et seulement si, $XY = \frac{1}{4}$.

III. L'ellipse

Activité 1

Soit D une droite du plan et F un point n'appartenant pas à D.
On désigne par K le projeté orthogonal de F sur D.

1. a. Construire les points S et S', barycentres respectifs de $(F,1)$, $(K, -\frac{1}{2})$ et $(F,1), (K, \frac{1}{2})$.

b. Que valent les rapports $\dfrac{SF}{SK}$ et $\dfrac{S'F}{S'K}$?

2. Soit $\mathcal{E} = \left\{ M \text{ tels que } \dfrac{MF}{MH} = \dfrac{1}{2}, \text{où H est le projeté orthogonal de M sur D} \right\}$.

On se propose de donner un procédé de construction d'un point de $\mathcal{E}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre S et passant par F.

Soit B un point de $\mathscr{C}$ distinct de F et soit I le point d'intersection de D et de (FB).

On désigne par h l'homothétie de centre I qui envoie B sur F, M l'image de S par h et H le projeté orthogonal de M sur D.

a. Montrer que h envoie K en H

b. Montrer que $M \in \mathcal{E}$.

Définition

Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et un réel $0 < e < 1$.
Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite D.
On appelle ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M tels que $\dfrac{MF}{MH} = e$.

Vocabulaire

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F et de directrice D.
La perpendiculaire à D passant par F est appelée axe focal de cette ellipse.

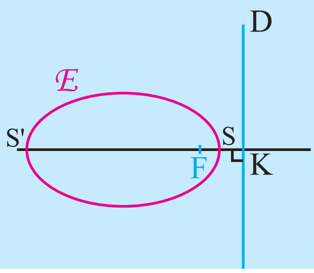
Activité 2

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e. On désigne par K le projeté orthogonal de F sur D.

1. Montrer que l'intersection de $\mathcal{E}$ avec la droite (FK) se réduit à deux points.
2. Montrer que M appartient à $\mathcal{E}$, si et seulement si, son symétrique par rapport à (FK) appartient à $\mathcal{E}$.

Théorème

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.
L'axe focal de $\mathcal{E}$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{E}$.
$\mathcal{E}$ rencontre son axe focal en deux points appelés sommets principaux de l'ellipse et ils sont les barycentres respectifs des points $(F, 1)$, $(K, -e)$ et $(F, 1)$, (K, e) où K est le projeté orthogonal de F sur D.



III. 1 Equation réduite d'une ellipse

Activité 1

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.
On désigne par K le projeté orthogonal de F sur D et on note S et S′ les sommets principaux de $\mathcal{E}$ et O le milieu de $[SS']$.

1. Montrer que $\overrightarrow{OF} = e\overrightarrow{OS}$ et $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{e}\overrightarrow{OS}$, S est le barycentre de $(F, 1)$ et (K, e).

2. On pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{j}$ de sorte que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit un repère orthonormé. On désigne par $(c, 0)$ les coordonnées de F et $(a, 0)$ celles de S.

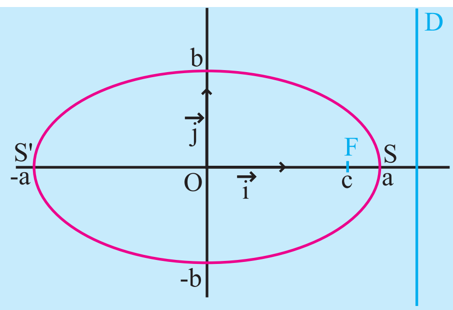
   Montrer que $e = \frac{c}{a}$ et $OK = \frac{a^2}{c}$.

3. Soit M un point de coordonnées (x, y).

   Montrer que M appartient à $\mathcal{E}$, si et seulement si, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$.

Théorème

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.
On désigne par O le milieu des sommets principaux S et S′.
On pose $\vec{i} = \frac{1}{OF}\overrightarrow{OF}$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire de sorte que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit orthonormé.



Si S a pour coordonnées $(a, 0)$ et F a pour coordonnées $(c, 0)$ alors l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b^2 = a^2 - c^2$.
Cette équation est appelée équation réduite de $\mathcal{E}$.

L'équation précédente ne change pas si l'on change x en –x ou y en –y.
On en déduit

Théorème

Toute ellipse admet un centre de symétrie, qui est le milieu du segment formé par ses sommets principaux.
Ce centre de symétrie est appelé centre de l'ellipse.
Toute ellipse admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et la droite perpendiculaire à l'axe focal en son centre.

La perpendiculaire à l'axe focal d'une ellipse en son centre coupe cette ellipse en deux points appelés sommets secondaires.

Conséquence

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F et de directrice D.
Le fait que l'ellipse $\mathcal{E}$ admette un centre de symétrie implique l'existence d'une autre directrice D' et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de D et F par rapport au centre de l'ellipse.
On dit que F est le foyer associé à la directrice D et que F' est le foyer associé à la directrice D'.

Exercice résolu 4

On connaît le foyer F d'une ellipse $\mathcal{E}$ et ses deux sommets S et S'. Construire les points de l'ellipse qui se trouvent sur l'axe de symétrie perpendiculaire à l'axe focal.

Solution

On construit le centre O de l'ellipse, milieu de $[SS']$.

Les points cherchés se trouvent sur la perpendiculaire Δ à (SS') passant par O.

On munit le plan du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire de (SS') et $\vec{j}$ est un vecteur unitaire de Δ. On sait que l'équation de $\mathcal{E}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ où $b^2=a^2-c^2$. L'axe de symétrie perpendiculaire à l'axe focal est la droite $\Delta : x=0$.
Δ coupe $\mathcal{E}$ en deux points B et B' d'ordonnées respectives b et $-b$.
Les points B et B' sont tels que les triangles OFB et $OF'B'$ sont rectangles et d'hypoténuse égal à a.

Activité 2

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est une ellipse de foyer $F(4,0)$, de directrice associée la droite D d'équation $x=\dfrac{25}{4}$ et d'excentricité $e=\dfrac{4}{5}$.

2. a. Etudier la fonction $f : x \mapsto 3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$ pour $-5 \le x \le 5$.

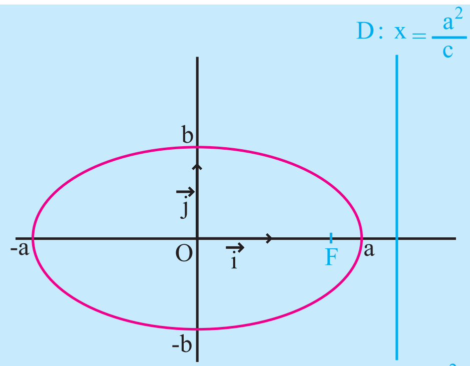
   b. Représenter les points $M(x, y)$ tels que $y=3\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}$ et $-5 \le x \le 5$.

3. En déduire une représentation graphique de $\mathcal{E}$. Tracer alors $\mathcal{E}$.

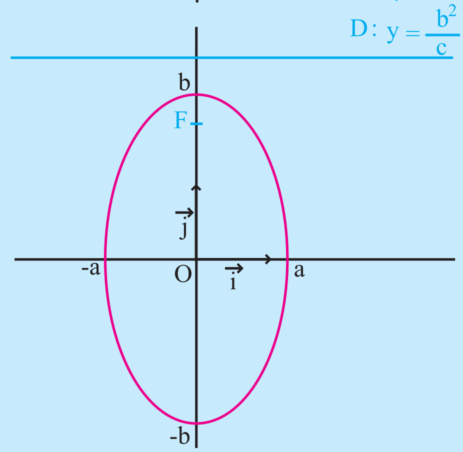
Théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit $a > b$ deux réels strictement positifs .
L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse de centre O, de foyer $F\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$, de directrice associée la droite d'équation $x = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$, où $a^2 = c^2 + b^2$.



- Soit $a < b$ deux réels strictement positifs.
L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse de centre O,
de foyer $F\left(0, \sqrt{b^2 - a^2}\right)$, de directrice associée la droite d'équation $y = \frac{b^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{b}$, où $b^2 = a^2 + c^2$.



Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Trouver l'équation réduite de l'ellipse de centre O tel que $S(3, 0)$ est un sommet et $F(\sqrt{5}, 0)$ est un foyer.
2. Trouver l'équation réduite d'une ellipse sachant que O est son centre, $F(0, -4)$ est un foyer et 0.2 est son excentricité.

III. 2 Tangentes à une ellipse

Activité

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$.

1. Montrer que
$M(x, y)$ appartient à $\mathcal{E}$, si et seulement si, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ou $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

2. On désigne par $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ les courbes représentatives des fonctions
$x \mapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et $x \mapsto -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

a. Montrer que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$.

b. Montrer que la tangente en un point $M_0(x_0, y_0)$ de $\mathcal{E}$ a pour équation $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

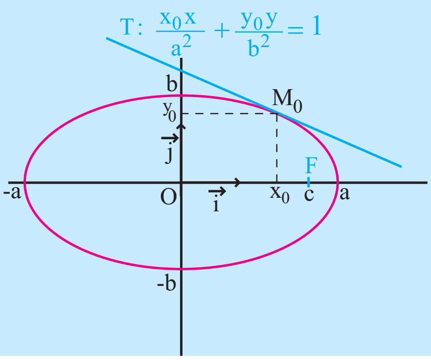
Théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$.

Alors la tangente à $\mathcal{E}$ en un point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.



Conséquence

La tangente à une ellipse $\mathcal{E}$ en son sommet $S(a, 0)$ a pour équation $x = a$.

La tangente à une ellipse $\mathcal{E}$ en son sommet $L(0, b)$ a pour équation $y = b$.

Exercice résolu 5

Soit D et D′ deux droites perpendiculaires en un point O, de vecteurs directeurs unitaires respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ tels que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct.

On note $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles concentriques, de centre O, de rayons respectifs a et b avec $a > b$. Soit P un point du cercle $\mathscr{C}$.

La demi-droite d'origine O passant par P coupe le cercle $\mathscr{C}'$ en P'.

La parallèle à D′ passant par P coupe la parallèle à D passant par P' en un point M.

1. Montrer que le point M varie sur une ellipse $\mathcal{E}$, lorsque P varie sur le cercle $\mathscr{C}$.
2. La parallèle à D passant par P coupe la parallèle à D′ passant par P' en un point N.

Démontrer que la tangente en M à l'ellipse $\mathcal{E}$ est perpendiculaire à la droite (ON).

Solution

1. Le point P décrit le cercle de centre O et de rayon a.

On en déduit que ses coordonnées (x_P, y_P) sont telles que $x_P = a\cos\theta$ et $y_P = a\sin\theta$, avec θ appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$.

Lorsque le point P décrit le cercle $\mathscr{C}$, le point P' décrit le cercle $\mathscr{C}'$ de rayon b.

On en déduit que ses coordonnées $(x_{P'}, y_{P'})$ sont telles que $x_{P'} = b\cos\theta$ et $y_{P'} = b\sin\theta$.

Par suite les coordonnées (x, y) de M vérifient $x_M = a\cos\theta$ et $y_M = b\sin\theta$,

ou encore $\dfrac{x_M}{a} = \cos\theta$ et $\dfrac{y_M}{b} = \sin\theta$.

Il en résulte que $\dfrac{x_M^2}{a^2} + \dfrac{y_M^2}{b^2} = 1$.

Ce qui prouve que M varie sur une ellipse $\mathcal{E}$ lorsque P décrit le cercle $\mathscr{C}$.

2. La tangente T à $\mathcal{E}$ en M a pour équation $\dfrac{xx_M}{a^2} + \dfrac{yy_M}{b^2} = 1$.

On en déduit que $\vec{U}\begin{pmatrix} -\dfrac{\sin\theta}{b} \\ \dfrac{\cos\theta}{a} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T.

Le point N a même ordonnée que P et même abscisse que P'.

Il en résulte que ses coordonnées (x_N, y_N) vérifient $x_N = b\cos\theta$ et $y_N = a\sin\theta$.

On en déduit que $\overrightarrow{ON}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} b\cos\theta \\ a\sin\theta \end{pmatrix}$.

Par suite $\overrightarrow{ON} \cdot \vec{U} = 0$. Ce qui répond à la question.

IV. Equations non réduites des coniques

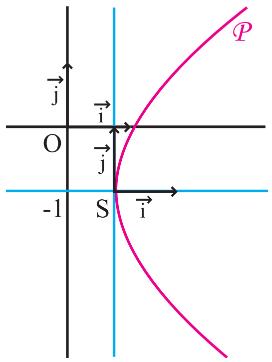
Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et un réel $e > 0$.
Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur D.
On appelle conique $\mathcal{C}$ d'excentricité e, de foyer F et de directrice D l'ensemble des points M tels que $MF = eMH$.
Si $e = 1$, $\mathcal{C}$ est une parabole de foyer F et de directrice D.
Si $e > 1$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.
Si $e < 1$, $\mathcal{C}$ est une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

Activité 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que

$y^2 + 2y - 4x + 4 = 0$.



1. Montrer que

M appartient à $\mathcal{P}$, si et seulement si, $(y+1)^2 = 4\left(x - \dfrac{3}{4}\right)$.

2. Montrer que P est une parabole de foyer $F\left(\frac{7}{4}, -1\right)$ et de directrice la droite d'équation $x = -\frac{1}{4}$.

3. Montrer que l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ est une parabole dont on déterminera les coordonnées du foyer et une équation de la directrice.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère l'ensemble $\mathcal{H}$ des points $M(x, y)$ tels que $x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 56 = 0$.

   a. Montrer que M appartient à $\mathcal{H}$, si et seulement si, $(x-4)^2 - 9(y-2)^2 - 36 = 0$

   b. En déduire que M appartient à $\mathcal{H}$, si et seulement si, $\frac{(x-4)^2}{36} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

   c. On désigne par O' le point de coordonnées $(4, 2)$.

   Montrer que dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points $M(X, Y)$ tels que $\frac{X^2}{36} - \frac{Y^2}{4} = 1$.

   d. En déduire que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on déterminera l'excentricité, ainsi que les coordonnées des sommets et des foyers dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 20 = 0$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 23 = 0$.

a. Montrer que M appartient à E , si et seulement si, $\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$.

   On désigne par O' le point de coordonnées $(-2, 1)$.

b. Montrer que dans le repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points $M(X, Y)$ tels que $\frac{X^2}{36} + \frac{Y^2}{4} = 1$.

c. En déduire que $\mathcal{E}$ est une ellipse dont on déterminera l'excentricité, ainsi que les coordonnées des sommets et des foyers dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + 9y^2 + 4x - 18y + 14 = 0$.

3. Déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + 9y^2 + 4x - 18y + 13 = 0$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, où A, B, C, D et E sont des réels est une courbe dont la nature est donnée par le tableau suivant

AB	Courbe
$AB = 0$	Parabole ou deux droites parallèles ou une droite ou le vide.
$AB < 0$	Hyperbole ou deux droites sécantes.
$AB > 0$	Ellipse ou cercle ou un point ou le vide.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer la nature de chacune des courbes suivantes en donnant ses éléments caractéristiques, puis la construire.

1. $x^2 - 2x + y + 1 = 0$.
2. $x^2 - y^2 - 2x - 4y - 7 = 0$.
3. $(3x + y)^2 - (x - 1)(6y + 4) = 0$.

Exercice résolu 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la similitude directe de centre $A(0,1)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Une courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y = 0$.

1. a. Déterminer une équation de la courbe $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par f.
   En déduire que $\mathcal{C}'$ est une parabole dont on précisera le sommet, le foyer et la directrice.
   b. Construire $\mathcal{C}'$.
2. En déduire la nature de $\mathcal{C}$ et la construire.

Solution

1. a. Remarquons que l'expression complexe de la similitude f est donnée par l'application $z \mapsto (1+i)z+1,\ z \in \mathbb{C}$.

Soit $M(x, y)$ un point d'affixe z et $M'(x', y')$ son image par f.

On suppose que $z = x + iy$ et on désigne par $z' = x' + iy'$ l'affixe du point M'.

On peut écrire, $f(M) = M'$ équivaut à $z' = (1+i)z + 1$ équivaut à $\begin{cases} x' = x - y + 1, \\ y' = x + y. \end{cases}$

ou encore $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(x' + y' - 1), \\ y = \dfrac{1}{2}(-x' + y' + 1). \end{cases}$

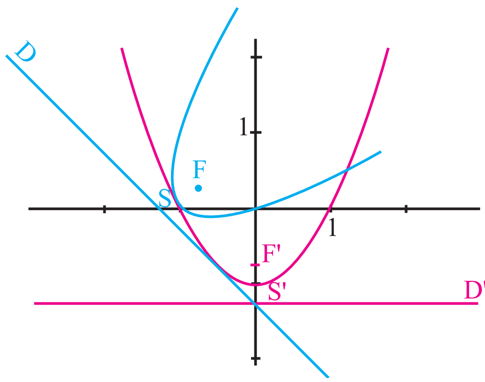
Il en résulte que

$M \in \mathcal{C}$ équivaut à $M' \in \mathcal{C}'$, et $\mathcal{C}'$ a pour équation $y' + 1 = x'^2$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Ce qui prouve que $\mathcal{C}'$ est une parabole de sommet $S'(0, -1)$,

de directrice D' : $y = -\dfrac{5}{4}$ et de foyer $F'\left(0, -\dfrac{3}{4}\right)$, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b. Voir figure



2. Soit M un point du plan et K son projeté orthogonal sur D'.

On note $N = f^{-1}(M)$, $H = f^{-1}(K)$ et $F = f^{-1}(F')$.

$M \in \mathcal{C}'$ équivaut à $\dfrac{MF'}{MK} = 1$ équivaut à $\dfrac{\sqrt{2}NF}{\sqrt{2}NH} = 1$ équivaut à $\dfrac{NF}{NH} = 1$

Comme (MK) est perpendiculaire à D' en K alors (NH) est perpendiculaire à $f^{-1}(D')$ en H

On pose $D = f^{-1}(D')$.

De l'égalité $\dfrac{NF}{NH} = 1$, on déduit que $\mathcal{C}$ est la parabole de foyer F et de directrice D.

De l'expression analytique de f, on déduit que $S(-1, 0)$, $F\left(-\dfrac{7}{8}, \dfrac{1}{8}\right)$ et $D : y = -x - \dfrac{5}{4}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La parabole de foyer $F(1, 0)$ et de directrice $D: x = -1$ a pour équation

□ $y^2 = 4x$. □ $y^2 = 2x$. □ $x^2 = 4y$.

2. L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 - 1 = 0$ est une ellipse de centre

□ $I(-1, 1)$. □ $O(0, 0)$. □ $I(1, -1)$.

3. Soit m un réel. L'ensemble d'équation $m^2x^2 + |m|y^2 + 1 = 0$ est

□ une ellipse. □ un cercle. □ l'ensemble vide.

4. La courbe d'équation $\left|x^2 - y^2\right| = 1$ est

□ une hyperbole. □ la réunion de deux hyperboles. □ la réunion d'une ellipse et d'une hyperbole.

5. L'hyperbole d'équation $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ a pour excentricité

□ $\frac{5}{4}$. □ $\frac{5}{3}$. □ $\frac{4}{3}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La courbe d'équation $x = \frac{1}{2}y^2$ est une parabole de sommet O, de foyer $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ et de directrice $D: x = -\frac{1}{4}$.

2. La parabole d'équation $x^2 = 4y$ se déduit de la parabole d'équation $y^2 = 4x$ par symétrie par rapport à la droite $\Delta: y = x$.

3. La courbe d'équation $x^2 - y^2 = -5$ est une hyperbole de centre O et de sommets $S\left(0, \sqrt{5}\right)$ et $S'\left(0, -\sqrt{5}\right)$.

4. Les asymptotes de l'hyperbole d'équation $4(x+2)^2 - 9(y-1)^2 - 36 = 0$ sont les droites d'équations respectives $y = \frac{2}{3}x$ et $y = -\frac{2}{3}x$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

5. L'ellipse d'équation $9x^2 + 4y^2 = 36$ a pour excentricité $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Dans tous les exercices le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 1. Déterminer une équation de la parabole $\mathcal{P}$ de sommet $I(2,\ 0)$ et de directrice $D: x = 1$.

2. Construire $\mathcal{P}$.

2 1. Déterminer une équation de la parabole $\mathcal{P}$ de foyer $F(2,\ 2)$ et de directrice $D: x = 3$.

2. Construire $\mathcal{P}$.

3 1. Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 4x$.

On note F son foyer et D sa directrice.
Déterminer les coordonnées de F et une équation de D.

2. Soit $\mathcal{P}'$ la parabole d'équation $y^2 = -4x + 8$.

a. Montrer que la parabole $\mathcal{P}'$ a pour foyer F.

b. Déterminer une équation de la directrice D' de $\mathcal{P}'$.

c. Montrer que F est compris entre D et D'.

3. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

4. Soit $\mathcal{P}''$ la parabole d'équation $y^2 = 8x + 8$.

a. Montrer que $\mathcal{P}''$ a pour foyer F.

b. Déterminer une équation de sa directrice D''.

c. Montrer que F n'est pas compris entre D et D''.

d. Existe-t-il des points communs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}''$.

4 Pour chacune des paraboles suivantes, déterminer son foyer, son sommet et une équation de sa directrice, puis la tracer.

a. $y^2 = 10x$. c. $y^2 = -10x$

b. $x^2 = 12y$. d. $x^2 = -12y$.

5 Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F, de directrice D et de sommet S. Trouver dans chacun des cas suivants l'équation réduite de $\mathcal{P}$.

1. F a pour coordonnées $(-2,\ 0)$ et S a pour coordonnées $(0,\ 0)$.

2. S a pour coordonnées $(0,\ 0)$ et D a pour équation $y + 3 = 0$.

6 Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 6x$.

On considère une droite variable D passant par le foyer F de $\mathcal{P}$ et de vecteur directeur $\vec{U}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ où m est un réel non nul.

La droite D coupe la parabole $\mathcal{P}$ en M et M'.

On note K le milieu de $[MM']$.

1. Ecrire, à l'aide de m, les coordonnées de K.

2. Quel est l'ensemble des points K lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$?

3. On désigne par Δ et Δ' les tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ issues des points M et M'.

Montrer que Δ et Δ' se coupent sur la directrice de $\mathcal{P}$ et qu'elles sont perpendiculaires.

7 Pour chacune des hyperboles suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets et une équation de chacune de ses directrices, son excentricité, puis la tracer.

a. $-9x^2 + 25y^2 = 225$.

b. $9x^2 - 25y^2 = 225$.

c. $x^2 - 4y^2 = 16$.

8 Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyers F et F', de directrice D associée à F, de sommets S et S' et d'excentricité e. Trouver l'équation réduite de $\mathcal{H}$.

1. F a pour coordonnées $(12,\ 0)$ et S a pour coordonnées $(4,\ 0)$.

2. F et F' ont pour coordonnées $(0,\ 5)$ et $(0,\ -5)$ et $e = \sqrt{3}$.

3. F a pour coordonnées $(0,\ 2)$, D a pour équation $y + 3 = 0$ et $e = \sqrt{3}$.

9 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $x^2 - 4y^2 = 1$.

Déterminer les asymptotes de $\mathcal{H}$ et construire $\mathcal{H}$.

10 Calculer l'excentricité d'une hyperbole dont les asymptotes sont orthogonales.

11 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $xy = 1$.
On désigne par A, B et C les points de $\mathcal{H}$ d'abscisses respectives 1, 2 et $-\frac{1}{2}$.
1.Montrer que la tangente en A à $\mathcal{H}$ est perpendiculaire à (BC).
2.On désigne par F le point de $\mathcal{H}$ d'abscisse 3.
a. Donner une équation cartésienne de la hauteur issue de A du triangle ABF.
b. Démontrer que l'orthocentre de ABF est un point de $\mathcal{H}$.

12 Pour chacune des ellipses suivantes, déterminer ses foyers, ses sommets et une équation de chacune de ses directrices, son excentricité, puis la tracer.
a. $4x^2 + 9y^2 = 36$.
b. $9x^2 + 4y^2 = 36$.
c. $-25x^2 - 9y^2 = -25$.

13 Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 1$.
A tout point M d'affixe $z = Re^{i\theta}$ du cercle $\mathscr{C}$, on associe le point M' d'affixe $\frac{1}{z}$.
1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du milieu de I de $[MM']$.
2. Montrer que I varie sur une ellipse $\mathcal{E}$ lorsque M varie sur $\mathscr{C}$.
3. Donner les éléments caractéristiques de $\mathcal{E}$.

14 1. a. Construire la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$.
b. Déterminer les foyers et les directrices.
2. Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'affixe $z = re^{i\theta}$, $r > 0$.
a. Exprimer r en fonction de θ.
b. Exprimer à l'aide de θ, la distance MM' où M' est le symétrique de M par rapport à O.
c. Déterminer θ pour que la distance MM' soit maximale.
d. Déterminer θ pour que la distance MM' soit minimale.

15 Soit la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $25\left(x^2 + y^2\right) = (3x - 16)^2$.
1. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ et son excentricité.
2. Soit M un point de $\mathcal{C}$. On pose $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) = a\ [2\pi]$.
Exprimer OM à l'aide de a.
3. La droite (OM) coupe la directrice en I et recoupe la conique $\mathcal{C}$ en M'.
a. Montrer que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ est une constante.
b. Montrer que $\frac{1}{\overline{OM}} + \frac{1}{\overline{OM'}} = \frac{2}{\overline{OI}}$ pour tout M de $\mathcal{C}$.

16 Soit $\mathcal{E}$ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{E}$.
On désigne par T la tangente à $\mathcal{E}$ en M_0.
Donner l'équation de la perpendiculaire T' à T en M_0.
La droite T' coupe les axes du repère en N et P.
Montrer que le rapport $\frac{M_0N}{M_0P}$ est constant.

17 Soit $\mathcal{E}$ une ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ et dont l'un des foyers est noté F. Une droite variable D passant par F coupe l'ellipse en M et N.
Montrer que $\frac{1}{FM} + \frac{1}{FN}$ est constant.

18 Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x, y)$ associe le point M' de coordonnées $\begin{cases} X = \sqrt{2}(x + y) \\ Y = \sqrt{2}(x - y) \end{cases}$.
1. Montrer que f est la composée d'une symétrie axiale que l'on précisera et d'une homothétie de centre O et de rapport 2.
2. Une courbe $\mathcal{C}$ a pour image par f la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation $5X^2 + 5Y^2 + 6XY - 64 = 0$.
a. Déterminer une équation de $\mathcal{C}$, ses foyers et ses directrices.
b. En déduire que $\mathcal{C}$ est une conique que l'on caractérisera.
c. Construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

19 Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ associe le point M' de coordonnées $\begin{cases} X=\frac{1}{4}\left(x+\sqrt{3}y\right) \\ Y=\frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}x+y\right) \end{cases}$.

1. Montrer que f est une similitude direct de centre O, de rapport 0.5 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
2. Une courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $15x^2+13y^2-2\sqrt{3}xy-768=0.$
a. Déterminer une équation de $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par f.
b. En déduire que $\mathcal{C}'$ est une ellipse à caractériser.

20 1. Soit $E=\left\{M(x,y)\in P \text{ tel que } x^2+4y^2=1\right\}$.
Donner les éléments caractéristiques de E.
2. Soit D et D′ les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=-1$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$. Soit $M_0\left(\cos(\theta)\ ,\ \frac{1}{2}\sin(\theta)\right)$ un point de E avec $\theta\in\Re\backslash\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.
a. Vérifier que M_0 appartient à E.
b. Ecrire l'équation de la tangente T à E au point M_0.
c. T coupe D et D′ respectivement en K et K′.
Montrer que KFK′ est un triangle rectangle en F.

21 Déterminer la nature de chacune des courbes suivantes en donnant ses éléments caractéristiques, puis la construire.
1. $x^2+4y^2+6y=0$.
2. $(3x+5y)^2=(6x-1)(5y+2)$.
3. $x^2-y=3x-1$

22 Construire l'ensemble des points $M(x,\ y)$ tels que $\left(4x^2-9y^2+8x+54y-113\right)=0$ ou $\left(16x^2+9y^2+12x-54y-47\right)=0$.

23 On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\frac{y^4}{16}=x^4-2x^2+1$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est la réunion de deux coniques.
Déterminer les éléments caractéristiques de ces coniques puis les tracer dans un même repère.

24 Soit m un réel. Discuter suivant les valeurs de m la nature de la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation $mx^2+(1+m^2)y^2-2my=0$.

25 On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x,\ y)$ tels que $4x|x|+y^2-16x-20=0$.
1. Montrer que $\mathcal{C}$ est la réunion d'une partie d'une conique $\mathcal{C}_1$ et d'une partie d'une conique $\mathcal{C}_2$ que l'on identifiera.
2. Déterminer pour chacune des coniques les éléments caractéristiques.
3. Soit A un point où chacune des coniques coupe la droite $\left(O,\vec{j}\right)$.
Montrer que les coniques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont même tangente en A.
Tracer $\mathcal{C}$ en prenant pour unité le centimètre.

26 Construire l'ensemble des points $M(x,\ y)$ tels que $y=\sqrt{\left|x^2-6x+5\right|}$.

27 Construire l'ensemble des points $M(x,\ y)$ tels que $16x|x|+36y|y|=576$.

28 On considère une ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ \ (a>b>0)$. On note A_1 et A_2 les sommets principaux de $\mathcal{E}$ et T_1 et T_2 les tangentes à l'ellipse en A_1 et A_2. Par un point P de $\mathcal{E}$ distinct de A_1 et A_2, on mène une tangente T à $\mathcal{E}$ qui coupe T_1 en P_1 et T_2 en P_2. Montrer que $\overrightarrow{A_1P_1}.\overrightarrow{A_2P_2}$ est indépendant de P.

29 Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation $2x^2+y^2-2x+y-1=0$.
Déterminer les tangentes issues du point $I(2,\ 3)$ à $\mathcal{C}$.

30 Soit a un réel strictement positif.
Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}=1$ de sommets principaux A et B.
Soit I un point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{AO}$.
On note P et Q les points de contact des tangentes à $\mathcal{E}$ issues de I. Que vaut l'angle $\widehat{PIQ}$?

Chapitre 6

Géométrie dans l'espace

Le produit scalaire apparaît assez tard dans l'histoire des mathématiques.
On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions.
Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant.
Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent à l'aide du cosinus d'un angle et lui donne le nom de produit intérieur ou produit scalaire. C'est sous cette forme qu'il apparaît par la suite.
Sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre et, de propriété, deviendra définition.

La définition utilisée actuellement du produit vectoriel est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard Gibbs pour ses étudiants en physique. Les travaux de Hermann Grassmann et William Hamilton sont à l'origine du produit vectoriel défini par Gibbs.

(M-J. Crowe, A history of vector analysis,
The Evolution of the Idea of a Vectorial System,
1994)

Chapitre 6

Géométrie dans l'espace

Dans tout le chapitre, l'espace E est orienté dans le sens direct.

I. Produit scalaire dans l'espace

Activité 1

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a.
Exprimer en fonction de a les produits scalaires ci-dessous.
$\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE}$.

*Soit A, B et C des points. Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le réel défini par

- $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=0$, si $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls.

* $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$.

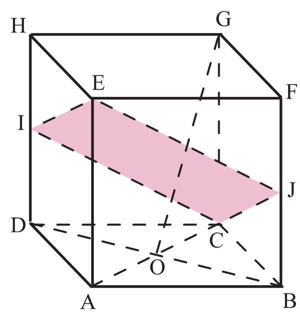
Propriétés (Rappel)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et tous réels α et β

- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.
- $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.
- $\left(\alpha\vec{u}\right).\vec{v}=\vec{u}.\left(\alpha\vec{v}\right)=\alpha\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$.
- $\left(\alpha\vec{u}\right).\left(\beta\vec{v}\right)=\alpha\beta\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$.

Activité 2

Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube,
I est le milieu de $[DH]$, J est le milieu de $[BF]$ et O est le centre de la face ABCD.



1. Montrer que E, I, C et J sont coplanaires.
2. Montrer que $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DB}$. En déduire que $\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{IJ}=0$.
3. a. Calculer $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{DG}$.
   b. Montrer que la diagonale $[EC]$ est perpendiculaire au plan (DBG).
4. En déduire que la droite (OG) est perpendiculaire au plan (EIC).

Activité 3

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1. On note I et J les milieux respectifs de [FB] et [CD] et K le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABH
Utiliser un repère orthonormé adéquat pour répondre aux questions ci-dessous.
1. Montrer que les droites (BE) et (IJ) sont orthogonales.

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$,

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

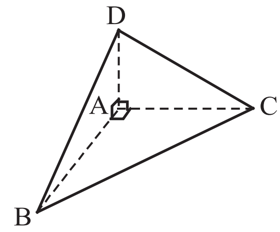
Pour tous points $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$,

$MM'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.

2. a. Calculer $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{KC}$.

   b. En déduire la mesure en radian de l'angle $\widehat{AKC}$.

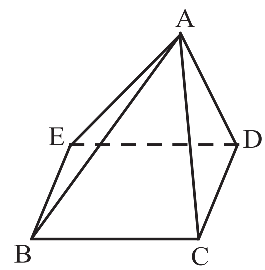
Activité 4



Dans la figure ci-contre, ABCD est un tétraèdre tel que les triangles ABC, ABD et ACD sont rectangles en A.
Soit G le centre de gravité de ABCD et I le symétrique de A par rapport à G.
En choisissant un repère convenable, montrer que I est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

II. Produit vectoriel

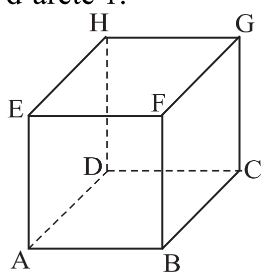
Activité 1



En utilisant la figure ci-contre d'une pyramide ABCDE, déterminer une base directe et une base indirecte de l'espace.

Activité 2

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un cube d'arête 1.



Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AD}\wedge\overrightarrow{AB}$,
$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{HF}\wedge\overrightarrow{DC}$.

Soit A, B et C des points de l'espace.
Le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur noté $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et défini comme suit

*si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires, alors $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$,

*si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, alors

- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$,
- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})$ est une base directe,
- $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = AB.AC.\sin\widehat{BAC}$.

Activité 3

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

1. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{CM}=\vec{0}$
2. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}$.

Propriétés (Rappel)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α, β deux réels.

- $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$.
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\left(\vec{v}\wedge\vec{u}\right)$, $\quad\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\wedge\vec{v}+\vec{u}\wedge\vec{w}$, $\quad\alpha\vec{u}\wedge\beta\vec{v}=\alpha\beta\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$.

Activité 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On considère trois points $A(1,0,-1)$, $B(1,-2,1)$ et $C(0,-1,2)$.

1. Donner les composantes de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire une valeur approchée à 0.1 près de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.

L'espace est muni d'une base orthonormée directe $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$,

$\vec{u}\wedge\vec{v}=(bc'-cb')\vec{i}+(ca'-ac')\vec{j}+(ab'-ba')\vec{k}$.

Activité 5

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

Montrer que $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}=\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right).\vec{u}=\left(\vec{w}\wedge\vec{u}\right).\vec{v}=\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$.

Propriété

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

$\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right).\vec{w}=\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right).\vec{u}=\left(\vec{w}\wedge\vec{u}\right).\vec{v}=\det\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)$.

Activité 6

Soit ABCDEFGH un cube de centre O tel que $AB=1$.
On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$.

L'aire du parallélogramme ABCD est égale à $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$.

L'aire du triangle ABD est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$.

On désigne par I , J, K et L les centres respectifs des faces ABFE , BCGF, CDHG et ADHE.

1. Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que IJKL est un parallélogramme de centre O.
3. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IL}$.
   b. En déduire l'aire du parallélogramme IJKL, puis l'aire du triangle IJK

Activité 7

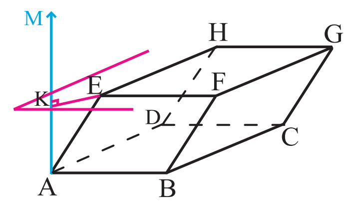
Soit OABCDEFG un cube d'arête 1 et a un réel strictement positif.
On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$.

Le volume d'un tétraèdre ABCD est égal à $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA}\right|$.

On désigne par L, M et K les points définis par $\overrightarrow{OL}=a\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM}=a\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{BK}=a\overrightarrow{BF}$.

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{DL}\wedge\overrightarrow{DM}$ à l'aide de a.
2. Calculer $\left(\overrightarrow{DL}\wedge\overrightarrow{DM}\right).\overrightarrow{DK}$ à l'aide de a.
3. En déduire le volume du tétraèdre DLMK à l'aide de a.

Activité 8



Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un parallélépipède, M est le point tel que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}$ et K est le projeté orthogonal de E sur la droite (AM).

On désigne par $\mathcal{V}$ le volume du parallélépipède ABCDEFGH.

1. Montrer que $\mathcal{V} = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| . \left\|\overrightarrow{AK}\right\|$.
2. Montrer que $\left|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AK}\right| = \left\|\overrightarrow{AM}\right\| . \left\|\overrightarrow{AK}\right\|$.
3. En déduire que $\mathcal{V} = \left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|$.

Théorème

Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égal à $\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|$.

Activité 9

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(-1,3,0)$, $D(2,2,2)$, $E(3,2,2)$, $F(2,5,2)$ et $G(1,5,2)$.

1. Montrer que OABCDEFG est un parallélépipède.
2. Calculer le volume du parallélépipède OABCDEFG.

III. Equations d'une droite, d'un plan et d'une sphère

Activité 1

L'espace est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On donne les points $A(0,-1,1)$, $B(2,1,3)$

et la droite $\Delta : \begin{cases} x = \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$

> Soit A un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul et D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Alors
> $D\left(A, \vec{u}\right) = \left\{M \; ; \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}, \text{ où } \alpha \text{ est un réel}\right\}$.

1. Déterminer un point et un vecteur directeur de Δ.
2. Montrer que les droites (AB) et Δ sont sécantes en un point I que l'on précisera.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ' passant par A et parallèle à Δ.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points A(–1 , 2 , 1), B(1 , –6 , –1) et C(2 , 2 , 2).

1. a. Vérifier que les points A, B et C sont non alignés.
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit A un point, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et P le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors $P\left(A,\ \vec{u},\vec{v}\right)=\left\{M\ ;\det\left(\overrightarrow{AM},\ \vec{u},\vec{v}\right)=0\right\}$.

2. a. Montrer que les plans (ABC) et $\left(O,\vec{i},\vec{k}\right)$ sont sécants.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.

Activité 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(2,0,-1)$, $B(1,-1,0)$ et $C(0,\ 1,\ 4)$.

1. Vérifier que les points A, B et C sont non alignés.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
3. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
4. Déterminer une équation d'un plan passant par A et perpendiculaire au plan (ABC).

Activité 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1. Montrer que l'ensemble S des points vérifiant $x^2+y^2+z^2-2x-4z+4=0$ est une sphère.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.
Soit A un point, R un réel strictement positif et S la sphère de centre A et de rayon R. Alors $S=\{M\ ;AM\ =R\}$.

2. a. Les points $A(1,\ 1,\ 2)$ et $B(1,\ -1,\ 4)$ sont-ils des points de la sphère S ?
   b. Déterminer l'intersection de la sphère S et la droite (AB).

Activité 5

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1. Soit $S=\left\{M(x,y,z)\ ;x^{2}+y^{2}+z^{2}+2x-4y+2z=3\right\}$.

Montrer que S est une sphère. Préciser son rayon R et les coordonnées de son centre I.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Soit un plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A\left(x_0\ ,y_0\ ,z_0\right)$ un point de l'espace.
La distance de A à P est le réel, noté $d\left(A\ ,P\right)$, égal à $\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

2. a. Vérifier que $A\left(-3,1,1\right)$ est un point de S.
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan P tangent à S en A.

3. Soit $Q=\left\{M(x,y,z)\ ;MA^2-MI^2=-3\right\}$.
   a. Montrer que Q est un plan dont on précisera une équation cartésienne.
   b. Montrer que $Q\cap S$ est un cercle dont on précisera le centre H et le rayon r.
4. a. Vérifier que P et Q sont strictement parallèles.
   b. Déterminer une équation cartésienne de la sphère S' tangente à P et Q respectivement en A et H

Théorème (Rappel)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit S une sphère de centre A et de rayon R. Soit P un plan, h la distance de A à P et H le projeté orthogonal de A sur P. L'intersection de S et P est
- vide si $h>R$,
- réduite au singleton $\{H\}$ si $h=R$,
- le cercle de rayon $\sqrt{R^2-h^2}$ et de centre H si $h<R$.

Activité 6

Soit ABCDEFGH un cube de l'espace tel que $AB=1$.
On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).
2. a. Montrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (EBD).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (EBD).
   c. Déterminer les coordonnées du point L intersection du plan (EBD) et de la droite (AG).
   d. Déterminer une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre EDBG.
3. Soit $S=\left\{M(x,y,z)\ ;3x^2+3y^2+3z^2-4x-4y-4z+3=0\right\}$.
   a. Montrer que S est la sphère de diamètre [LG]
   b. Déterminer la position relative de la sphère S et du plan (EBD).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan Q tangent à S et parallèle à (EBD).

Activité 7 (distance d'un point à une droite)

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, A un point de l'espace, M un point de l'espace n'appartenant pas à la droite $D\left(A,\vec{u}\right)$ et H le projeté orthogonal de M sur la droite D.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}=\overrightarrow{MH}\wedge\vec{u}$.
2. En déduire que $MH=\dfrac{\left\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

Définition

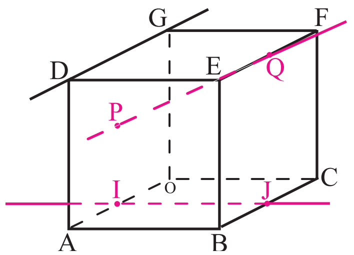
On appelle distance d'un point M à une droite D, la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur D . Cette distance est notée $d(M, D)$.

Théorème

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de D.

La distance d'un point M de l'espace à la droite D est le réel $d(M,D)=\dfrac{\|\overrightarrow{MA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Activité 8



Soit OABCDGEF un cube d'arête 2.

On pose $\vec{i}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\vec{j}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ et $\vec{k}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OG}$.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit I, J et Q les milieux respectifs des segments $[AO]$, $[BC]$ et $[EF]$.

Soit P le centre de la face AODG.

1. Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

   Déterminer à l'aide de x, y et z les distances $d(M,(DG))$ et $d(M,(IJ))$.

2. a. Donner une représentation paramétrique de la droite (PQ).

   b. En déduire les points de la droite (PQ) équidistants des droites (DG) et (IJ).

IV. Translation

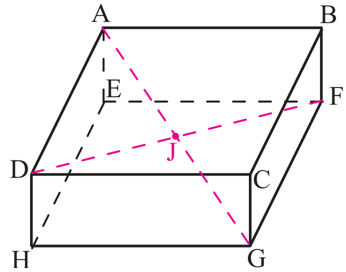
IV.1 Définition

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$ est appelée translation de vecteur $\vec{u}$ et notée $t_{\vec{u}}$.

Pour tous points M et M' de l'espace, $t_{\vec{u}}(M)=M'$ équivaut à $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.

Activité 1



Dans la figure ci-contre, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

1. Montrer que les droites (AG) et (FD) se coupent en un point J
2. Déterminer $t_{\overrightarrow{AB}}(H)$, $t_{\overrightarrow{AJ}}(J)$ et $t_{\overrightarrow{FB}}(G)$.
3. Déterminer $t_{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}}(E)$ et $t_{\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC}}(A)$.

Activité 2

Soit ABCD un tétraèdre et f l'application qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$. Montrer que f est une translation.

Théorème

Toute translation de l'espace de vecteur $\vec{u}$ est bijective. Son application réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.
Pour tous points M et N de l'espace, $N = t_{\vec{u}}(M)$ équivaut à $M = t_{-\vec{u}}(N)$.

Démonstration

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

Pour tous points M et N de l'espace, $t_{\vec{u}}(M) = N$ équivaut à $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$ équivaut à $\overrightarrow{NM} = -\vec{u}$ équivaut à $M = t_{-\vec{u}}(N)$.

Il en résulte que tout point de l'espace admet un unique antécédent par $t_{\vec{u}}$.

Par suite $t_{\vec{u}}$ est une bijection et son application réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Activité 3

Soit ABCD un tétraèdre. On note I et Jles milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$.
2. On considère les points A' et B' images respectives des points A et B par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$, C' et D' les antécédents des points C et D par la même translation.
Montrer que le solide $AC'BD'A'CB'D$ est un parallélépipède.

IV.2 Propriété caractéristique

Théorème

Une application de l'espace dans lui-même est une translation, si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N', $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Démonstration

Soit f une translation de vecteur $\vec{u}$.

Pour tous points M et N de l'espace d'images respectives M' et N' par f, $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$. Il en résulte que $\overrightarrow{MN} = \vec{u} + \overrightarrow{M'N'} - \vec{u} = \overrightarrow{M'N'}$.

Réciproquement, supposons que f est une application telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Soit A un point de l'espace d'image A' par f.

Pour tout point M d'image M' par f, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$. Il en résulte que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$.

On en déduit que f est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$.

Conséquences

- Toute translation de l'espace conserve la distance.
- Toute translation de l'espace conserve le produit scalaire.

Activité

Soit un parallélépipède ABCDEFGH, I le point de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et J l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$. Montrer que J appartient au plan (EFG).

IV.3 Action d'une translation sur les configurations

Activité 1

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace, A, B et C trois points non alignés de l'espace.
On désigne par t la translation de vecteur $\vec{u}$ et par A' l'image de A par t.

1. Montrer que l'image de la droite (AB) par t est la droite passant par A' et parallèle à (AB).
2. Montrer que l'image du plan (ABC) par t est le plan passant par A' et parallèle à (ABC).

Théorème

L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.
L'image d'un plan par une translation est un plan qui lui est parallèle.

Conséquences

Toute translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
Toute translation conserve le milieu.

Activité 2

Soit ABCD un tétraèdre et I le point défini par $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1. Construire le plan P image du plan (BCD) par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.
2. Le plan P coupe (AC) en J et coupe (AD) en K.
   Déterminer les images des droites (BC) et (BD) par $t_{\overrightarrow{BI}}$.

Activité 3

Soit ABCDEFGH un parallélépipède.
On désigne par I et J les centres de gravité respectifs des triangles ACF et DEG.

1. a. Vérifier que $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$
   b. En déduire que J est l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$.
2. On désigne par O le milieu de $[FC]$ et par O' le point tel que $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{BI}$.
   Montrer que O' appartient au plan (DEG).
3. La parallèle à la droite (BH) menée de A coupe le plan (DEG) en A'.
   Montrer que les points O', A' et J sont alignés.

Activité 4

Soit Γ une partie de l'espace.
On dit que Γ est globalement invariante par une application f lorsque $f(\Gamma)=(\Gamma)$.

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points $A(1,1,1)$, $B(0,2,1)$, $C(3,0,0)$, $D(-2,1,4)$ et $E(1,2,3)$.

1. Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.
2. Montrer que le plan (ABC) est globalement invariant par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.
3. Donner une représentation paramétrique du plan P image du plan (ABC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{AE}$.

Théorème

L'image d'une sphère S par une translation est une sphère S' de même rayon et de centre l'image du centre.

Démonstration

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

Soit A un point de l'espace et S la sphère de centre A et de rayon R.
On désigne par A' l'image de A par $t_{\vec{u}}$ et par S' la sphère de centre A' et de rayon R.

On se propose de montrer que l'image de la sphère S par $t_{\vec{u}}$ est la sphère S'.

Pour tout point M de S d'image M' par $t_{\vec{u}}$, $AM = A'M'$.

Il en résulte que M' appartient à la sphère S'.
Réciproquement, pour tout point M' de S' d'antécédent M par $t_{\vec{u}}$, $AM = A'M'$.

Il en résulte que M appartient à la sphère S.

Activité 5

Une pyramide IABCD de sommet I est dite régulière si, sa base ABCD est un carré et le projeté orthogonal de I sur le plan (ABCD) est le centre du carré ABCD.

Soit IABCD une pyramide régulière de sommet I.
On note J l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on désigne par S la sphère de centre J passant par B.
Déterminer $S\cap(ABCD)$.

IV.4 Expression analytique d'une translation

Théorème

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

- Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

Si $M\left(x,y,z\right)$ est un point de l'espace et $M'\left(x',y',z'\right)$ est son image par la translation de vecteur $\vec{u}$ alors $\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\\z'=z+c\end{cases}$.

- L'application qui à tout point $M\left(x,y,z\right)$ associe le point $M'\left(x',y',z'\right)$ tel que $\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\\z'=z+c\end{cases}$ est la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Activité 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On désigne par $A\left(1,4,1\right)$ et $B\left(4,-2,4\right)$.

1. a. Vérifier que les points O, A et B ne sont pas alignés.
   b. Soit P le plan contenant O, A et B. Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x-z=0$.
2. Soit S la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   Soit t la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.
   a. Déterminer l'expression analytique de t.
   b. Déterminer les coordonnées du point A' image de A par t.
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan P' image de P par t.
   d. En déduire que P' est tangent à S en A'.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit les droites $D:\begin{cases}x=1-\alpha\\y=2+\alpha\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}\\z=-\alpha\end{cases}$ et $\Delta:\begin{cases}x=-\beta\\y=3\quad ;\ \beta\in\mathbb{R}\\z=\beta\end{cases}$

1. Montrer que les droites D et Δ ne sont pas coplanaires.

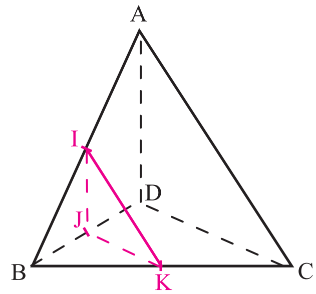
2. Soit Δ' l'image de Δ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ'.
   b. Montrer que D et Δ' se coupent en un point que l'on précisera.
   c. Donner une équation cartésienne du plan Q contenant D et parallèle à Δ.

V. Homothétie de l'espace

V.1 Définition

Activité 1



Dans la figure ci-contre, ABCD est un tétraèdre, I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BD]$ et $[BC]$.

1. Exprimer le volume du tétraèdre IJK à l'aide du volume V du tétraèdre ABCD.

2. Soit f l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{BM'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

   a. Construire le tétraèdre $A'B'C'D'$ image du tétraèdre ABCD par f.
   b. Exprimer le volume de $A'B'C'D'$ à l'aide du volume du tétraèdre ABCD.

Définition

Soit I un point de l'espace et k un réel non nul. L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$ est appelée homothétie de centre I et de rapport k, elle est notée $h_{(I,k)}$.

Pour tous points M et M' de l'espace, $h_{(I,k)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = k\,\overrightarrow{IM}$.

Activité 2

Soit ABCD un tétraèdre. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2 et h' l'homothétie de centre C et de rapport 2.
On pose $B' = h(B)$, $D' = h(D)$, $B'' = h'(B)$ et $D'' = h'(D)$.
Déterminer la nature du quadrilatère $B'D'D''B''$.

Activité 3

Soit ABCDEFGH un parallélépipède, I, J et K les milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AD]$ et $[AH]$.
On désigne par L et L' les centres de gravité respectifs des triangles CDH et IJK.
Montrer que L' est l'image de L par une homothétie de centre A dont on précisera le rapport.

Théorème

Toute homothétie de centre I et de rapport non nul k est une bijection de l'espace et admet comme application réciproque l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$.

Pour tous points M et N de l'espace, $N = h_{(I,\, k)}(M)$ équivaut à $M = h_{\left(I,\, \frac{1}{k}\right)}(N)$.

Démonstration

Soit h une homothétie de centre I et de rapport non nul k.

Pour tous points M et N de l'espace, $h(M) = N$ équivaut à $\overrightarrow{IN} = k\overrightarrow{IM}$ équivaut à

$\overrightarrow{IM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{IN}$ équivaut à $M = h_{\left(I,\, \frac{1}{k}\right)}(N)$.

Il en résulte que tout point de l'espace admet un unique antécédent par h.

Par suite h est une bijection et son application réciproque est l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$.

V. 2 Propriété caractéristique

Activité 1

I. Soit f une homothétie de rapport k différent de 1, M et N deux points de l'espace d'images respectives M' et N' par h.

Montrer que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

II. Soit f une application de l'espace dans lui-même et k un réel non nul et différent de 1 tels que pour tous points M et N de l'espace d'images respectives M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

1. a. Montrer que les images par f de deux points distincts sont deux points distincts.
   b. En déduire que si f admet un point fixe alors ce point est unique.
2. Soit A et B deux points non fixes d'images respectives A' et B'.
   a. Montrer que les droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point J tel que $\overrightarrow{JA'} = k\overrightarrow{JA}$.
   b. En déduire la nature de f.

Théorème

Soit f une application de l'espace dans lui-même et k un réel non nul et différent de 1.
f est une homothétie de rapport k, si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Conséquences

Soit h une homothétie de l'espace de rapport k.
Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par h, $M'N' = |k|MN$.

Activité 2

Soit un parallélépipède ABCDEFGH et I un point du segment $[BC]$ distinct de B et C.

La parallèle à (FC) passant par I coupe $[BF]$ en J

1. Soit f l'homothétie qui transforme H en B et E en I.
   Préciser le centre et le rapport de f.
2. Montrer que $f(D) = J$.
3. En déduire que les droites (BH), (EI) et (DJ) sont concourantes.

V. 3 Action d'une homothétie sur les configurations

Activité 1

Soit k un réel non nul, A, B et C trois points non alignés de l'espace.
On désigne par h une homothétie de rapport k et par A' l'image de A par h.

1. Montrer que l'image de la droite (AB) par h est la droite passant par A' et parallèle à (AB).
2. Montrer que l'image du plan (ABC) par h est le plan passant par A' et parallèle à (ABC).

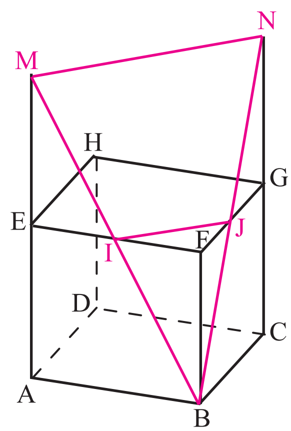
Théorème

L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
L'image d'un plan par une homothétie est un plan qui lui est parallèle.

Conséquences

Toute homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.
Toute homothétie conserve le milieu.

Activité 2



Dans le cube ABCDEFGH ci-contre, les points I et J appartiennent respectivement aux segments $[EF]$ et $[FG]$ de sorte que $EI = JG$, I et J différents de F.
La droite (BJ) coupe la droite (CG) au point N.
La droite (BI) coupe la droite (AE) au point M.
Soit h l'homothétie de centre B qui transforme J en N.

1. Montrer que $h(I) = M$.
2. En déduire que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.

Activité 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit le point $I(1,1,1)$ et le plan $P : x - 3y + z + 1 = 0$

Montrer que le plan P est globalement invariant par toutes les homothéties de centre I.

Activité 4

Soit un réel $a > 0$ et un parallélépipède droit ABCDEFGH tels que $AE = 2AB = 2AD = 2a$.

On désigne par P, le point de l'arête $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Soit le point M à l'intérieur du carré ABCD tel que le triangle AMP est équilatéral.
Les droites (AE) et (PF) se coupent en Ω.

On désigne par h l'homothétie de centre Ω qui transforme A en E.

1. a. Déterminer $h(P)$.
   b. On désigne par N l'image de M par h.
   Montrer que le triangle EFN est équilatéral.
2. a. Exprimer à l'aide de a la distance ΩA.
   b. En déduire le volume du solide APMEFN.
3. Soit I le centre du carré EFGH. Montrer que les droites (ΩI) et (AC) sont sécantes.

Activité 5

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a.
Pour tout point M du plan (EFG), on désigne par N le centre de gravité du triangle MAB.

1. Déterminer l'ensemble des points N lorsque M varie.
2. Soit P le centre de gravité du triangle MBC.
   Montrer que la distance PN est constante.
3. Soit Q et R les centres de gravité respectifs des triangles MCD et MAD.
   Montrer que NPQR est un carré et déterminer son aire.

Théorème

L'image d'une sphère S de centre I et de rayon R par une homothétie de l'espace de rapport k est une sphère S' de centre I' image de I et de rayon $|k|R$.

Démonstration

Soit k un réel non nul et h une homothétie de rapport k.
Soit A un point de l'espace et S la sphère de centre A et de rayon R.
On désigne par A' l'image de A par h et par S' la sphère de centre A' et de rayon $|k|R$.
On se propose de montrer que l'image de la sphère S par h est la sphère S'.
Pour tout point M de S d'image M' par h, $A'M' = |k|AM$.
Il en résulte que M' appartient à la sphère S'.
Réciproquement, pour tout point M' de S' d'antécédent M par h, $A'M' = |k|AM$.
Il en résulte que M appartient à la sphère S.

Activité 6

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z+2=0$.

1. a. Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.

   b. Déterminer l'intersection de la sphère S avec le plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2. On désigne par $\Omega(1,1,0)$ et par h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\dfrac{3}{2}$.

   a. Déterminer le centre I' et le rayon R' de la sphère S' l'image de S par h.

   b. Déterminer l'intersection de la sphère S' avec le plan $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Propriété

Toute homothétie de l'espace conserve le contact.

V.4 Expression analytique d'une homothétie

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

• Soit un point $I(a, b, c)$, k un réel non nul et différent de 1 et h l'homothétie de centre I et de rapport k.

Si $M(x,y,z)$ est un point de l'espace et $M'(x',y',z')$ est son image par h,

alors $\begin{cases} x'=kx+(1-k)a \\ y'=ky+(1-k)b \\ z'=kz+(1-k)c \end{cases}$.

• L'application qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$ tel que

$\begin{cases} x'=kx+\alpha \\ y'=ky+\beta \\ z'=kz+\delta \end{cases}$, $k\neq 1$ est l'homothétie de centre $I\left(\dfrac{\alpha}{1-k},\dfrac{\beta}{1-k},\dfrac{\delta}{1-k}\right)$ et de rapport k.

Activité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On donne le point $I(1,-1,2)$ et les plans P et Q d'équations respectives $x-y+z-4=0$ et $x+y-1=0$.

1. Montrer que les plans P et Q sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ.
2. Soit h l'homothétie de centre I et de rapport 3. Donner l'expression analytique de h.
3. Soit R le plan image de Q par h. Donner une équation cartésienne de R.
4. a. Vérifier que $h(P)=P$.

   b. En déduire un vecteur directeur de la droite Δ' intersection des plans P et R.

QCM - VRAI - FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

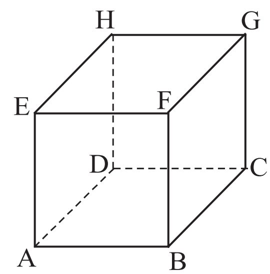
1. Soit A, B et C trois points non alignés. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est

☐ Normal au plan ABC. ☐ directeur du plan ABC. ☐ directeur à la droite (BC).

2. Si ABCD est un parallélogramme alors

☐ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$. ☐ $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\right\|$. ☐ $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

3. Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.



a. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est égal à

☐ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$. ☐ $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DC}$. ☐ $\sqrt{2}\,\overrightarrow{AE}$.

b. Le vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{EG}$ est égal à

☐ $\vec{0}$. ☐ $\overrightarrow{BD}$. ☐ $\overrightarrow{BF}$.

c. Le réel $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{FH}$ est égal à

☐ 2. ☐ 0. ☐ $\sqrt{2}$.

d. Le volume du tétraèdre FBEG est égal à

☐ $\frac{1}{6}$. ☐ $\frac{2}{3}$. ☐ $\frac{1}{2}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

a. Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v}$ alors $\vec{v} = \vec{0}$.

b. Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$ alors $\vec{v} = \vec{w}$.

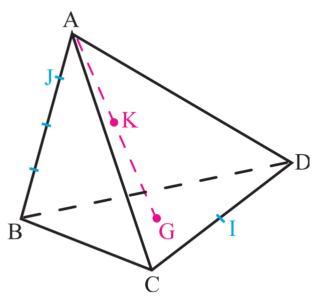
c. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v} \wedge \vec{w}$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. L'image d'un cube d'arête a par une homothétie de rapport a est un cube de volume a^6.

3. Si S et S' sont deux sphères de même rayon alors il existe une seule translation qui transforme S en S' et une seule homothétie qui transforme S en S'.

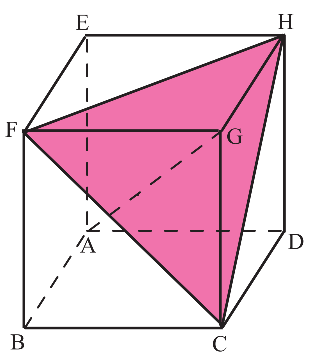
Dans tous les exercices, l'espace est orienté dans le sens direct.

1 Dans la figure ci-dessous ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de $[CD]$, G est le centre de gravité du triangle BCD, K est le milieu de $[AG]$ et J est le point tel que $\vec{AJ} = \frac{1}{4}\vec{AB}$.



1. Montrer que $4\vec{JK} + 2\vec{IK} + 3\vec{KA} = \vec{BK} + \vec{CK} + \vec{DK}$
2. En déduire que les points I, J et K sont alignés.

2 Soit ABCDEFGH un cube.



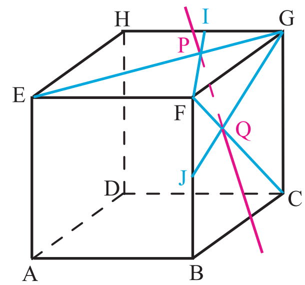
1. Calculer $\vec{AG}\cdot\vec{FH}$ et $\vec{AG}\cdot\vec{HC}$.
2. En déduire que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (FHC).

3 Dans la figure ci-après ABCDEFGH est un cube.

I et J les milieux respectifs des arêtes $[HG]$ et $[BF]$.

P est le point d'intersection de (EG) et (IF).

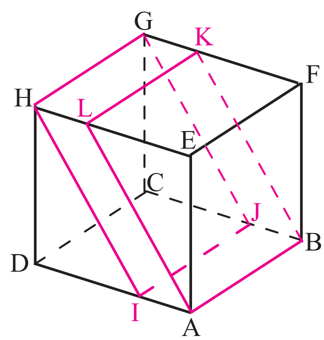
Q est le point d'intersection de (FC) et (IJ).



1. Montrer que $3\vec{PQ} = \vec{BG} + \vec{EG} - \vec{FG}$.
2. Calculer $3\vec{PQ}\cdot\vec{EG}$ et $3\vec{PQ}\cdot\vec{FC}$.
3. En déduire que la droite (PQ) est perpendiculaire à (EG) et (FC).

4 Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

Soit I, J, K et L les points définis par $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AD}$, $\vec{BJ} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, $\vec{HL} = \frac{1}{3}\vec{HE}$ et $\vec{GK} = \frac{1}{3}\vec{GF}$.



1. Montrer que ABKLIJGH est un parallélépipède.
2. On munit l'espace du repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

a. Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AI}$ et $\vec{AL}$.
b. En déduire le volume du parallélépipède ABKLIJGH

5 Soit ABCDEFGH un cube de centre O d'arête a.

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$, J et K les centres respectifs des faces ABFE et ABCD.

1. Montrer que O, I, J et K sont coplanaires.
2. Quelle est la nature du quadrilatère OIJK ?
3. Quel est le volume de la pyramide BIJOK ?

6 Soit ABCD un tétraèdre régulier.

1\. a. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
b. En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.
c. En déduire que deux arêtes opposées sont orthogonales.
2\. Soit A' le centre de gravité du triangle BCD. Montrer que la droite (AA') est perpendiculaire au plan (BCD).
3\. Soit O le point tel que $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OA'}=\vec{0}$.
Montrer que O est le centre de la sphère S circonscrite au tétraèdre ABCD.
4\. On désigne par I le milieu du segment $[BC]$ et on suppose que $AB=a\ \left(a\in\mathbb{R}_+^*\right)$.
a. Exprimer, à l'aide de a, les distances DI, DA' et AA'.
b. Soit V le volume du tétraèdre et R le rayon de la sphère S. Exprimer V et R à l'aide de a.
c. Déterminer $\cos\widehat{AOB}$ et $\cos\widehat{AID}$ et donner une valeur approchée de ces deux angles en degré, à 0.01 prés.

7 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs vérifiant $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=2$. Soit $\overrightarrow{w}$ $\cancel{2}u$ x $\cancel{3}v$.
Calculer $\vec{u}.\overrightarrow{w}$, $\vec{v}.\overrightarrow{w}$ et $\|\overrightarrow{w}\|$.

8 L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Soit $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et $\overrightarrow{w}$ $\cancel{3}i$ $\cancel{4}j$ $\cancel{2}k$.
1\. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux.
2\. Trouver un vecteur $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u}\wedge\vec{v}=\overrightarrow{w}$.
Trouver tous les vecteurs $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u}\wedge\vec{v}=\overrightarrow{w}$.
3\. Trouver un vecteur $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u}\wedge\vec{v}=\overrightarrow{w}$ et $\vec{u}.\vec{v}=1$.

9 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires est orthogonaux et soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur vérifiant
$\overrightarrow{w}$ x $\cancel{u}$ $\cancel{w}$.
1\. Montrer que $\overrightarrow{w}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et que sa norme vaut $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
2\. Montrer que $\overrightarrow{w}=\frac{1}{2}\cancel{u}-\frac{1}{2}\cancel{u}$ x.

10 Soit A, B, C, D quatre points de l'espace et $a=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$.
1\. Calculer a en remplaçant $\overrightarrow{BC}$ par $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.
2\. En déduire que si un tétraèdre à deux couples d'arêtes apposées orthogonales, il en est de même du troisième couple.

11 L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
1\. Vérifier que les trois points $A(1,1,-1)$, $B(3,3,2)$ et $C(3,-1,-2)$ déterminent un plan (ABC).
2\. Trouver un vecteur normal au plan (ABC).
3\. Trouver un équation cartésienne de ce plan (ABC).
4\. Calculer la distance de l'origine O à ce plan.

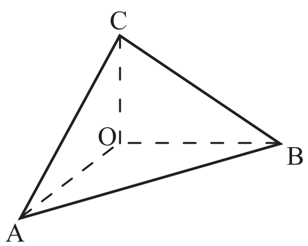
12 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Quatre plans ont pour équations $x+y-2z=5$, $3x-6y+3z=2$, $2x+2y+2z=-1$, $x-2y+z=7$.
1\. Montrer que deux de ces plans sont parallèles et calculer la distance entre ces deux plans.
2\. Montrer que deux de ces plans sont perpendiculaires.

13 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit P le plan d'équation $x-y+5z=2007$.
Trouver un vecteur directeur de P, de norme 1 et orthogonal au vecteur $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

14 L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Donner une équation du plan passant par le point $A(2,0,0)$ est de vecteurs directeurs $\vec{i}+\vec{j}$ et $\vec{j}+\vec{k}$.

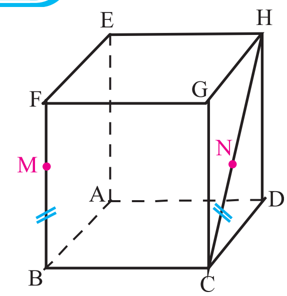
15 Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que $AB = 2$, $AD = 1$ et $AE = 1$.
On désigne par I le milieu [BD].
Soit $R = \left(A\ ,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$ un repère de l'espace.
1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IH).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
3. En déduire que la droite (IH) coupe le plan (DEG) au milieu du segment [IH].

16 Soit OABC un tétraèdre trirectangle tel que (OA), (OB) et (OC) sont deux à deux orthogonales et H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
On pose $OA = a$, $OB = b$ et $OC = c$ avec a, b et c trois réels strictement positifs.
On munit l'espace du repère
$R = \left(O\ ,\ \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}\ ,\frac{1}{b}\overrightarrow{OB}\ ,\frac{1}{c}\overrightarrow{OC}\right)$.



1. a. Déterminer, à l'aide de a, b et c , une équation du plan (ABC).
b. En déduire que $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$
2. a. Exprimer l'aire du triangle ABC à l'aide de a, b et c.
b. Vérifier que le carré de l'aire de la face ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces.(C'est en 1738 que le mathématicien De Gua de Malves qualifia ce résultat de « généralisation du théorème de Pythagore à l'espace ».

17 Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.
Soit M et N deux points variables respectivement sur le segment $[FB]$ privé de F et B et $[CH]$ privé de H et C tels que $BM = CN$.



On munit l'espace du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et on note $BM = \alpha$ avec α un réel qui appartient à $]0,1[$.
1. Déterminer les coordonnées des points M et N à l'aide de α.
2. a. Montrer qu'il existe un vecteur fixe $\vec{u}$ tel que $\overrightarrow{MN} = \alpha\vec{u} + \overrightarrow{AD}$
b. En déduire que la droite (MN) reste parallèle à un plan fixe que l'on précisera.
3. Montrer que la droite passant par les milieux de $[BC]$ et $[MN]$ est perpendiculaire aux droites (BC) et (MN).

18 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ On donne les points $A(0,4,-1)$, $B(-2,4,-5)$, $C(1,1,-5)$ et $D(1,0,-4)$.
1. Déterminer une équation de chacun des plans médiateurs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$.
2. Montrer que ces trois plans ont un point commun I.
En déduire une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

19 A/ Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On se propose de montrer que
$\overrightarrow{w}\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right) = \left(\overrightarrow{w}\cdot\vec{v}\right)\vec{u} - \left(\overrightarrow{w}\cdot\vec{u}\right)\vec{v}$.
1. Vérifier l'égalité précédente lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,
On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OA}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|}$,
$\vec{j}$ un vecteur du plan (OAB) tel que $\left(\vec{i}\ ,\ \vec{j}\right)$ soit une base orthonormée de ce plan.

$\vec{k}$ un vecteur de l'espace tel que $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère orthonormé direct de l'espace.

a. Justifier l'existence de six réels a, b, c, α, β et δ tels que $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \beta\vec{i} + \delta\vec{j}$ et $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

b. Déterminer à l'aide de a, b, c, α, β et δ les composantes des vecteurs $\vec{w} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)$ et $\left(\vec{w} \cdot \vec{u}\right)\vec{v} - \left(\vec{w} \cdot \vec{v}\right)\vec{u}$. Conclure.

B/ **Application 1**

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires et orthogonaux.

On pose $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Montrer que $\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{u}$ et $\vec{w} \wedge \vec{u} = \vec{v}$.

Application 2

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace,

Montrer que $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) \wedge \vec{w}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

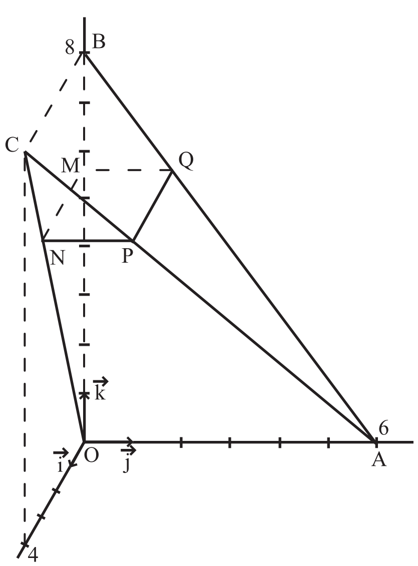
Application 3

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

1. Montrer que

$$\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\|^2 = \left(\vec{v} \wedge \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)\right).\vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2.\left\|\vec{v}\right\|^2 - \left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2.$$

20 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.On considère les points $A(0,6,0)$, $B(0,0,8)$ et $C(4,0,8)$.

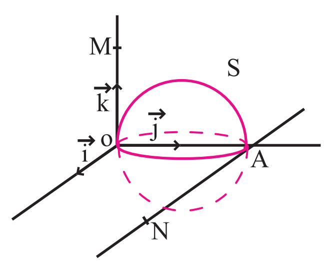


1. Montrer que
a. Les droites (BC) et (BA) sont orthogonales.
b. Les droites (CO) et (OA) sont orthogonales.
c. La droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).
2. Déterminer le volume du tétraèdre OABC.
3. Montrer que les quatre points O, A, B et C se trouvent sur une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.
4. A tout réel α de l'intervalle $]0,8[$ on associe le point $M(0,0,\alpha)$.

Le plan contenant M et orthogonal à la droite (OB) rencontre les droites (OC), (AC) et (AB) respectivement en N, P et Q.
a. Déterminer la nature du quadrilatère MNPQ.
b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ?
Pour quelle valeur de α, la droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (AC) ?
c. Déterminer MP^2 à l'aide de α. Pour quelle valeur de α la distance PM est-elle minimale ?

21 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On désigne par S la sphère de centre $J(0,1,0)$ et de rayon 1.
Soit α et β deux réels donnés, M et N sont les points définis par $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{k}$ et $\overrightarrow{AN} = \beta\vec{i}$ où $A(0,2,0)$.



1. Déterminer une équation cartésienne de la sphère S.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN) à l'aide de α et β.
3. a. Montrer que la droite (MN) est tangente à la sphère S si et seulement si $\alpha^2.\beta^2 = 4$.
b. Dans le cas où la droite (MN) est tangente à S, calculer les coordonnées du point de contact à l'aide de α et β.

22 Soit ABCD un tétraèdre. Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CD]$.

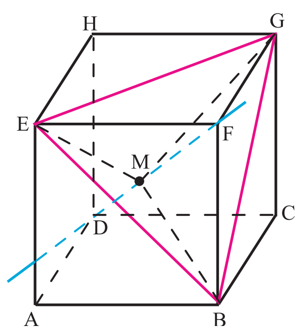
Soit K le point tel que $5\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

Soit L le point défini par $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$.

On munit l'espace du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, G, I, J, K et L.
2. Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (IK), (JL) et (AG).
3. En déduire que les droites (IK), (JL) et (AG) sont concourantes.

23 Le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous est d'arête 1. A chaque réel x on associe le point M de la droite (DF) défini par $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DF}$.



1. a. Montrer que $MB = MG = ME$.
b. Montrer que le triangle BEG est équilatéral.

2. a. Exprimer MB^2 en fonction de x et étudier les variations de la fonction ainsi obtenue.
b. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle BEG.

3. On désigne par α le réel tel que
$\widehat{EMB} = \widehat{BMG} = \widehat{GME} = \alpha$.

a. Montrer que $\cos(\alpha) = 1 - \frac{1}{3x^2 - 4x + 2}$

b. Etudier les variations de la fonction f définie par
$f(x) = 1 - \frac{1}{3x^2 - 4x + 2}$ et résoudre l'équation $f(x) = 0$.

c. En déduire qu'il existe deux points M_1 et M_2 de (DF) tels que les repères $\left(M_1, \overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1G}, \overrightarrow{M_1E}\right)$ et $\left(M_2, \overrightarrow{M_2B}, \overrightarrow{M_2G}, \overrightarrow{M_2E}\right)$ sont orthonormés.

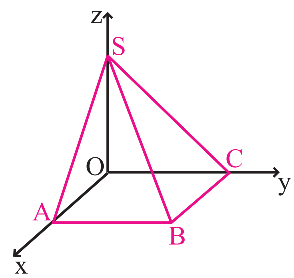
d. En quel point du segment $[DF]$ l'angle α est-il minimum ?

24 Soit $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ un repère orthonormé de l'espace. Soit B le point de coordonnées $(1,1,0)$.

Soit P le plan d'équation $x + y = a$ où a est un réel de l'intervalle $]0,1[$.

Le but du problème est de déterminer la section du plan P avec la pyramide SOABC et le maximum de l'aire de cette section.

1. Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (SA), (SB), (SC), (OC) et (OA).



2. On note I, J, K, L et M les points d'intersection respectifs du plan P avec les droites (SA), (SB), (SC), (OC) et (OA).
a. Déterminer les coordonnées des points I, J, K, L et M.
b. Vérifier que le quadrilatère IJKM est un rectangle.
c. Déterminer l'aire du pentagone IJKLM.

3. Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par

$f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{4}(4 - 3x)$.

a. Etudier les variations de f sur $]0,1[$.

b. En déduire la position du plan P qui réalise le maximum de l'aire du pentagone IJKLM.
Vérifier qu'il s'agit d'un plan qui passe par le centre de gravité du triangle OAC.

25 Soit ABCDEFGH un parallélépipède.

1. Soit A' le point tel que $\overrightarrow{FA'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

Soit D' le point tel que $\overrightarrow{DD'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EG}$.

Les droites (AD') et (DA') se coupent en O.
Déterminer le rapport de l'homothétie de centre O qui transforme A en D' et D en A'.
2. Existe-t-il une homothétie qui transforme (AD) en (EF) ?

26 Soit ABCD un tétraèdre. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.
E et F désignent respectivement les symétriques du point D par rapport à I et J
Montrer que le triangle BCD est l'image du triangle EFA par une translation que l'on déterminera.

27 Soit ABCD un tétraèdre de l'espace et O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
On désigne par E l'image du point D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et par F l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et O' le centre du cercle circonscrit au triangle DEF.
Montrer (en utilisant une translation) que les droites (OO'), (AD), (BE) et (CF) sont parallèles.

28 Soit ABCD un tétraèdre.
On désigne par M l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$, N l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$ et P l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DA}$.
Montrer que les points A, M, N et P sont coplanaires.

29 L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit les droites $D : \begin{cases} x = 1-\alpha \\ y = 2+\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -1-\alpha \end{cases}$ et

$$D' : \begin{cases} x = 1+2\beta \\ y = 2-2\beta \quad \beta \in \mathbb{R} \\ z = -1+2\beta \end{cases}$$

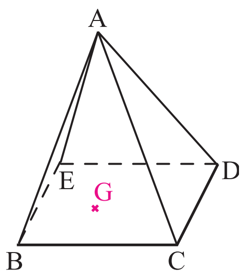
Montrer que D' est l'image de D par la translation de vecteur $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

30 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Soit S la sphère dont une équation cartésienne est
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - z = \frac{1}{2}$
Soit P le plan dont une équation cartésienne est $x + 2y + 2z - 1 = 0$.
1. Montrer que P coupe S suivant un cercle dont déterminera le centre et le rayon.
2. Déterminer les translations qui transforment P en un plan tangent à S.

31 Soit A, B et C des points non alignés de l'espace.
Un point M décrit une droite D strictement parallèle à la droite (BC) et ne contenant pas A.
Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité du triangle BCM, puis celui de centre de gravité du tétraèdre ABCM.

32 Soit ABCDEFGH un cube.
On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[EH]$ et $[BF]$, P le centre de gravité du triangle EHI et Q le centre de gravité du triangle FBG.
1. Montrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (ACF).
2. Soit K le milieu de $[FG]$.
a. Quelles sont les images des points H et B par l'homothétie de centre K et de rapport $\frac{1}{3}$?
b. Montrer alors que la droite (PQ) est orthogonale aux droites (EG) et (FC).

33 Soit ABCDE une pyramide à base carrée de sommet A.
On appelle P le plan parallèle au plan (BCD) passant par G le centre de gravité de la face ABC.



1. Montrer que P passe par les centres de gravité des quatre faces triangulaires de la pyramide.
2. Un point M décrit les côtés du carré BCDE et N désigne le point d'intersection de la droite (AM) avec le plan P.
a. Déterminer le lieu géométrique Γ du point N lorsque M décrit le carré BCDE.
b. Quel est le périmètre de Γ
c. Quel le volume de la pyramide de sommet A dont Γ est une base ?

34 Soit ABCD un tétraèdre, I est le milieu de $[CD]$ et E un point de la droite (AI) distinct de A et de I.
On note h l'homothétie de centre I qui transforme A en E.
1. Le plan P passant par E et parallèle au plan (ABC) coupe (CD) en M.
Le plan Q passant par E et parallèle au plan (ABD) coupe (CD) en N.
a. Montrer que $h(C) = M$.
b. Montrer que I est le milieu de $[MN]$.
2. a. Montrer que les plans P et Q sont sécants suivant une droite Δ.
b. Montrer que les droites Δ et (IB) sont coplanaires.

35 Soit ABCDEFGH un parallélépipède, I est le centre de gravité du triangle BDE et J le centre de gravité du triangle CFH
1. Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.
2. a. Montrer que $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.
b. Montrer que J est l'image de I par une homothétie de centre A dont on précisera le rapport.
c. En déduire que $AI = IJ = JG$.
3. Soit M, N et P les milieux respectives des segments $[BD]$, $[DE]$ et $[EB]$.
Déterminer les images des points M, N et P par h.

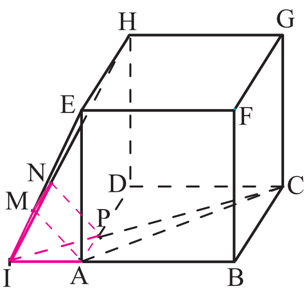
36 Soit IABCD une pyramide de sommet I et à base carrée. On désigne par h l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$ et on note P l'image du plan (ABCD) par h.
1. Montrer que P contient les centres de gravité des triangles IAB, IBC, ICD et IDA.
2. A tout point M sur les côtés du carré ABCD, on associe le point N intersection du plan P avec la droite (IM).
a. Déterminer l'ensemble (Γ) des points N lorsque M varie.
b. Exprimer le volume de la pyramide de sommet I dont la base est (Γ) à l'aide de celle de la pyramide IABCD.

37 Soit A, B et C trois points alignés de l'espace. On note O le milieu de $[AB]$ et O' le milieu de $[AC]$.
1. Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en C.
Montrer que h transforme la sphère S de diamètre $[AB]$ en la sphère S' de diamètre $[AC]$.
2. Une droite Δ passant par A et distincte de la droite (AB) recoupe S en M et recoupe la sphère S' en N.
Montrer que les droites (BM) et (CN) sont parallèles.

38 Soit ABCDEFGH un parallélépipède droit et I le point de l'espace défini par $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
La droite (IC) coupe la droite (AD) en O.
Soit h l'homothétie de centre O qui transforme A en D.
1. Déterminer le rapport de h.
2. La droite (OE) perce le plan (CDH) en J

Montrer que les points D, I et J sont alignés.
3. Soit P le plan parallèle au plan (IED) et passant par J
Montrer que la droite (AD) perce le plan P en un point K tel que $OD^2 = OA.OK$.

39 Soit ABCDEFGH un cube d'arête a
et I le point tel que $\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{IA}$.
On désigne par h l'homothétie de centre I
et de rapport $\frac{1}{3}$ et on note M et N les images respectives des points E et H par h.



1. Déterminer l'image du plan (BCE) par h.
2. La droite (IC) perce le plan (AMN) en P.
Montrer que $\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IP}$ et que P appartient à la droite (AD).
3. Exprimer en fonction de a le volume de la pyramide IAMNP.

40 L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
Soit f l'application de l'espace dans lui même, qui à tout point $M(x,y,z)$ associe le point $M'(x',y',z')$
tel que $\begin{cases} x' = 3x-2 \\ y' = 3y-3 \\ z' = 3z-4 \end{cases}$
1. Montrer que h est une homothétie dont on précisera le centre I et le rapport.
2. Déterminer les coordonnées du point J image du point O par h.
3. Soit P le plan dont une équation est $x-y+z=0$
Déterminer une équation du plan Q image de P par h.

Chapitre 7

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Pascal (1654) :"[…] j'exposerai aussi une méthode générale qui permet de reconnaître, à la simple inspection de ses chiffres, si un nombre donné est divisible par un autre nombre quelconque […]"
Cet écrit de Pascal expose une théorie de la divisibilité par un nombre quelconque A, fondée sur les restes dans les divisions euclidiennes des puissances successives de 10 par A.
Comme exemple de diviseur il choisit 7 et observe que les restes des puissances dans les divisions euclidiennes des puissances successives de 10 par 7 se reproduisent périodiquement, avec une période de longueur 6.

(J Dhombres et al, Mathématiques au fil des âges, 1987).

Chapitre 7

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Dans ce chapitre $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers.

I. Diviseurs et multiples d'entiers

Activité 1

1. Soit l'entier $a = 599873120$.
a. Déterminer l'entier p tel que $a = 4p$.
b. En déduire l'entier p' tel que $-a = 4p'$.
2. Déterminer l'entier q tel que $a = -11q$.
3. Existe-t-il un entier s tel que $-a = 6s$?

Définition

Soit a un entier et d un entier non nul.
On dit que d est un diviseur de a ou que a est divisible par d, s'il existe un entier q tel que $a = dq$.

Vocabulaire

Si un entier a est divisible par un entier d non nul, on dit que a est un multiple de d.

Conséquence

Soit d un entier non nul et a un entier.

- Si d divise a alors $-d$ divise a.
- Les multiples de d sont les éléments de l'ensemble $d\mathbb{Z} = \{dq, q \in \mathbb{Z}\}$.

Activité 2

1. Déterminer pour chacun des entiers a, l'ensemble D_a de tous ses diviseurs.
$a = -15$, $a = 143$, $a = -143$, $a = 1$, $a = -1$ et $a = 0$.
2. Soit p un nombre premier. Quels sont tous ses diviseurs ?

Activité 3

Soit a et b deux entiers non nuls et c un entier.
Que peut-on dire de a et b sachant que a divise b et b divise a ?
Que peut-on dire de a et c sachant que a divise b et b divise c ?

Propriétés

Soit a et b deux entiers non nuls et c un entier.

- Si a divise b et b divise a, alors $a = b$ ou $a = -b$.
- Si a divise b et b divise c, alors a divise c.
- Si a divise b et a divise c, alors a divise $\alpha b + \beta c$ pour tous entiers α et β.

Activité 4

1. L'entier $4200^3 + 3521^{10}$ est-il divisible par 7 ?
2. L'entier $260^{260} + 11$ est-il divisible par -13 ?
3. L'entier 42424242424241 est-il divisible par -42 ?
4. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que n divise $n - 6$.

Exercice résolu 1

Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $n - 1$ divise $n + 10$.

Solution

On pourra remarquer que $n - 1$ est nécessairement différent de 0.
L'écriture $n + 10 = n - 1 + 11$ prouve que $n - 1$ divise $n + 10$, si et seulement si, $n - 1$ divise 11, ce qui équivaut à, $n - 1$ est un élément de $\{-11, -1, 1, 11\}$.
Il en résulte que $n - 1$ divise $n + 10$, si et seulement si, $n \in \{-10, 0, 2, 12\}$.

II. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Activité 1

En tapant "12345 ÷ 57 =" , la calculatrice affiche le résultat 216.5789474
Donner la partie entière de chacun des nombres $\frac{12345}{57}$, $\frac{-12345}{57}$, $\frac{12345}{-57}$ et $\frac{-12345}{-57}$.

Pour tout réel x, il existe un entier unique n tel que $n \le x < n + 1$. Cet entier n est appelé partie entière du réel x.

Définition

Soit a et b deux entiers avec b non nul.
On appelle quotient de a par b l'entier q défini de la manière suivante

- q est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{a}{b}$ si $b > 0$,
- q est le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{a}{b}$ si $b < 0$.

Exercice résolu 2

Calculer le quotient de a par b dans chacun des cas ci-dessous.
1. $a = 12354878$; $b = 23458$. 2. $a = -12354878$; $b = 23458$. 3. $a = -12354878$; $b = -23458$.

Solution

Dans le premier et le deuxième cas b est strictement positif.
En tapant "12354878 ÷ 23458 =" , la calculatrice affiche le résultat 526.6807....
Le plus grand entier inférieur à 526.6807.est 526. Donc q=526.
En tapant "−12354878 ÷ 23458 =" , la calculatrice affiche le résultat −526.6807....
Le plus grand entier inférieur à −526.6807… est −527. Donc q = −527.
Dans le troisième cas b est strictement négatif.
En tapant "−12354878 ÷ −23458 =" , la calculatrice affiche le résultat 526.6807....
Le plus petit entier supérieur à 526.6807.... est 527. Donc q = 527.

Activité 2

Calculer le quotient de a par b dans chacun des cas ci-dessous.

1. $a = 98765123$ et $b = 56352$.
2. $a = 98765123$ et $b = -56352$.
3. $a = -98765123$ et $b = -56352$.

Activité 3

En tapant "12345 ÷ 57 × 216 =" , la calculatrice affiche le résultat 33.
Ecrire la division euclidienne de 12345 par 57.
En utilisant une calculatrice, écrire la division euclidienne de
a. 1234587 par 3547. b. 2358794 par 50111.

Définition

Soit a et b deux entiers avec b non nul.
On appelle reste de a par b l'entier r tel que $r = a - bq$, où q est le quotient de a par b.

Activité 4

Calculer le reste de a par b dans chacun des cas ci-dessous.

1. $a = 1238745$ et $b = 5017$.
2. $a = 1238745$ et $b = -5017$.
3. $a = -1238745$ et $b = -5017$.

Théorème

Pour tout entier a et pour tout entier b non nul, il existe un couple unique d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ et $0 \le r < |b|$.

Démonstration

Pour l'existence, il suffit de prendre le quotient de a par b et le reste de a par b.
Prouvons l'unicité.
Supposons qu'il existe deux couples d'entiers (q, r) et (q', r') tels que
$a = bq + r$, $0 \le r < |b|$ et $a = bq' + r'$, $0 \le r' < |b|$.
Il en résulte que $b(q - q') = r' - r$. Ce qui implique que $|b||q - q'| = |r - r'| < |b|$.
Par suite, $|b||q - q'| = 0$ et donc $q = q'$ et $r = r'$.

Vocabulaire

L'écriture $a = bq + r$, $0 \le r < |b|$ s'appelle division euclidienne de a par b, q est le quotient de a par b et r est le reste de a par b.

Conséquence

Le reste de tout entier n dans la division euclidienne par un entier non nul b est un élément de l'ensemble $\{0, 1, 2, ..., |b| - 1\}$.

Activité 5

Ecrire dans chacun des cas la division euclidienne de a par b.

1. $a = 125498$, $b = 3587$.
2. $a = -125498$, $b = 3587$.
3. $a = 125498$, $b = -3587$.
4. $a = -2008$, $b = -3587$.

Exercice résolu 3

Déterminer l'ensemble E de tous les entiers a tels que $|a| < 53$ et tels que le reste dans la division de a par 11 soit égal à 3.

Solution

Un entier a appartient à E, si et seulement si, $a = 11q + 3$ et $|11q + 3| < 53$.

On en déduit que a appartient à E, si et seulement si, $a = 11q + 3$ et $-56 < 11q < 50$.

Par suite $E = \{-52, -41, -30, -19, -8, 3, 14, 25, 36, 47\}$.

Activité 6

1. Déterminer les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier a par 2.
2. Soit a un entier.
   Montrer que a et a^2 sont de même parité.
3. Déterminer le reste de l'entier $(n+1)^3 - n^3$ dans la division euclidienne par 6.

Les entiers pairs sont les entiers dont le reste dans la division euclidienne par 2 est égal à 0.
Les entiers impairs sont les entiers dont le reste dans la division euclidienne par 2 est égal à 1.

III. Congruence modulo n

Activité 1

1. Soit a et b deux entiers et n un entier naturel non nul.
   Montrer que a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n, si et seulement si, $a - b$ est un multiple de n.
2. Montrer que pour tout entier naturel s, $(-2)^s$ et $(-2)^{s+1}$ ont le même reste dans la division euclidienne par 3.

Définition et notation

Soit n un entier naturel non nul et a et b deux entiers.
On dit que a est congru à b modulo n (ou a et b sont congrus modulo n) si $a - b$ est un multiple de n. On note alors $a \equiv b \pmod{n}$.

Théorème et définition

Soit n un entier naturel non nul .
Pour tout entier a, il existe un unique entier r appartenant à $\{0, ..., n-1\}$ tel que $a \equiv r \pmod{n}$. On dit que r est le reste modulo n de a.

Conséquence

Soit n un entier naturel non nul.
Deux entiers sont congrus modulo n, si et seulement si, ils ont le même reste modulo n.

Activité 2

Vérifier que les entiers -19, -129, 124 et 13610 ont le même reste modulo 11.

Activité 3

Répondre par vrai ou faux.

a. $31 \equiv 3 \pmod 7$.   b. $-31 \equiv 1 \pmod 5$.   c. $-2 \equiv 2 \pmod 4$.

d. $914 \equiv 21 \pmod{19}$.   e. $914 \equiv -21 \pmod{47}$.

Propriétés

Soit a, b et c trois entiers et n un entier naturel non nul.

- $a \equiv a \pmod n$.
- Si $a \equiv b \pmod n$ alors $b \equiv a \pmod n$.
- Si $a \equiv b \pmod n$ et $b \equiv c \pmod n$, alors $a \equiv c \pmod n$.

Démonstration

- La preuve des deux premières propriétés est évidente.
- Dire que $a \equiv b \pmod n$ et $b \equiv c \pmod n$ équivaut à dire que les entiers $a-b$ et $b-c$ sont des multiples de n.
  On en déduit que $a-c = a-b+b-c$ est un multiple de n.

Activité 4

1. Soit a et b deux entiers dont les restes respectifs modulo 6 sont 2 et 3.
   Montrer que ab est un multiple de 6.
2. Soit a un entier.
   a. Déterminer les restes possibles de a modulo 6.
   b. Déterminer les restes possibles de a^2 modulo 6.

Propriétés

Soit a, b, c et d quatre entiers et n un entier naturel non nul.

- Si $a \equiv b \pmod n$ et si $c \equiv d \pmod n$, alors
  $a + c \equiv b + d \pmod n$ et $a \times c \equiv b \times d \pmod n$.
- Si $a \equiv b \pmod n$ alors $ha \equiv hb \pmod n$ pour tout entier h et $a^m \equiv b^m \pmod n$ pour tout entier $m > 0$.

Démonstration

- Soit a, b, c et d quatre entiers tels que $a \equiv b \pmod n$ et $c \equiv d \pmod n$.

L'écriture $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$ implique que $(a+c)-(b+d)$ est multiple de n.

De même l'écriture $ac-bd=(a-b)c+(c-d)b$ implique que $ac-bd$ est un multiple de n.

- L'écriture $ha-hb=h(a-b)$ implique que $ha-hb$ est un multiple de n.

Soit m un entier naturel non nul.

On peut écrire $a^m-b^m=(a-b)k$, où k est un entier naturel. Il en résulte que a^m-b^m est un multiple de n dès que $a-b$ est un multiple de n.

Exercice résolu 4

Déterminer les restes modulo 17 de 55348932 et de 1968755.
En déduire le reste modulo 17 de 55348932×1968755.

Solution

En tapant "55348932 ÷17 =", la calculatrice affiche le résultat 3255819.529.
On en déduit que le quotient de 55348932 par 17 est 3255819.
En tapant "55348932 −17 ×3255819 =", la calculatrice affiche 9 et alors
$55348932\equiv 9\ (\text{mod } 17)$

En utilisant le même procédé, on obtient $1968755\equiv 2\ (\text{mod } 17)$.

Il en résulte que $55348932\times 1968755\equiv 18\ (\text{mod } 17)$. La relation
$18\equiv 1\ (\text{mod } 17)$ implique alors que $55348932\times 1968755\equiv 1\ (\text{mod } 17)$.

Activité 5

Vérifier que $566\equiv 6\ (\text{mod } 7)$.

En déduire que $566^2\equiv 1\ (\text{mod } 7)$ puis que $566^{2n}\equiv 1\ (\text{mod } 7)$, pour tout entier naturel n.

Exercice résolu 5

1. a. Discuter, suivant les valeurs de l'entier naturel k, le reste de 2^k modulo 7.
   b. En déduire le reste de 247^{349} modulo 7.
2. Calculer le reste de 298^{349} modulo 13.

Solution

1. a. Remarquons que $2\equiv 2\ (\text{mod } 7)$; $2^2\equiv 4\ (\text{mod } 7)$; $2^3\equiv 1\ (\text{mod } 7)$.

Par suite $2^k\equiv 1\ (\text{mod } 7)$ si $k\equiv 0\ (\text{mod } 3)$,
$2^k\equiv 2\ (\text{mod } 7)$ si $k\equiv 1\ (\text{mod } 3)$,
$2^k\equiv 4\ (\text{mod } 7)$ si $k\equiv 2\ (\text{mod } 3)$.

b. On vérifie facilement que $247\equiv 2\ (\text{mod } 7)$ et $349\equiv 1\ (\text{mod } 3)$.

On en déduit que $247^{349}\equiv 2\ (\text{mod } 7)$.

2. Lĕgalité $298 = 22 \times 13 + 12$ implique que $298 \equiv 12 \pmod{13}$.

   De plus, $12 \equiv -1 \pmod{13}$.

   On en déduit que $298 \equiv -1 \pmod{13}$ et par suite que $298^{349} \equiv -1 \pmod{13}$, ou encore $298^{349} \equiv 12 \pmod{13}$.

Activité 6

1. Déterminer le reste modulo 3 de 2008 .

   En déduire le reste modulo 3 de 2008^{2007}.

2. Déterminer le reste modulo 5 de chacun des entiers 2011^{2007}, $(-2011)^{2007}$ et 2008^{2007}.

Activité 7

Montrer que pour tous entiers naturels n, p et q , $4^n + 4^p + 4^q \equiv 0 \pmod{3}$.

Exercice résolu 6

Déterminer tous les entiers a et b tel que $ab \equiv 1 \pmod{6}$.

Solution

On sait que les restes possibles de a et b modulo 6 sont $0, 1, 2, 3, 4$ et 5.

Notons respectivement r et r'le s restes de a et b modulo 6 .

Les valeurs possibles de rr' sont consignées dans le tableau ci-dessous.

r' \ r	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	6	8	10
3	0	3	6	9	12	15
4	0	4	8	12	16	20
5	0	5	10	15	20	25

En déterminant les restes modulo 6 de rr', on obtient

rr'	0	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	20	25
Restes modulo 6 de ab	0	1	2	3	4	5	0	2	3	4	0	3	4	2	1

On conclut du tableau précédent que $ab \equiv 1 \pmod{6}$, si et seulement si,

$a \equiv 1 \pmod{6}$ et $b \equiv 1 \pmod{6}$ ou $a \equiv 5 \pmod{6}$ et $b \equiv 5 \pmod{6}$.

Activité 8

Déterminer tous les entiers a et b tels que $ab \equiv 0 \pmod{4}$.

Activité 9

1. Soit a un entier naturel.
   Montrer que 7 divise $(a^3 - 1)(a^4 + a)$.
2. Déterminer les entiers a tels que $a^{600} \equiv 1 \pmod{7}$.

Théorème de Fermat
Pour tout entier naturel a et tout nombre premier p ne divisant pas a,
$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Exercice résolu 7

Déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^9 - a$.

Solution

Les restes possibles d'un entier a modulo 9 sont $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Remarquons que l'on peut écrire $a^9 = (a^3)^3$, il suffit donc de déterminer le reste modulo 9 de a^3 et a^9.

L'étude de ces cas peut être présentée sous forme d'un tableau qu'on appelle un tableau de congruence.

Reste modulo 9 de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste modulo 9 de a^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8
Reste modulo 9 de a^9	0	1	8	0	1	8	0	1	8
Reste modulo 9 de $a^9 - a$	0	0	6	6	6	3	3	3	0

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Le quotient de -20 par 7 est

☐ -3. ☐ -2. ☐ 2.

2. Pour tout entier n,

☐ $n^3 - n \equiv 0 \pmod{6}$. ☐ $n^3 - n \equiv 0 \pmod{12}$. ☐ $n^3 - n \equiv n^2 \pmod{6}$.

3. Le nombre $100!$ est

☐ divisible par 2^{50}. ☐ divisible par 10^{50}. ☐ se termine par exactement cinq zéros.

4. Soit a un entier non nul. Si $a \equiv 19 \pmod{20}$ alors

☐ $a^{402} \equiv 1 \pmod{20}$. ☐ $a^{402} \equiv -1 \pmod{20}$. ☐ $a^{402} \equiv 19 \times 402 \pmod{20}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit a un entier et n un entier naturel non nul.

   a. Si $a \equiv 1 \pmod{n}$ alors $a^2 \equiv 1 \pmod{n}$.

   b. Si $a^2 \equiv 0 \pmod{n}$ alors $a \equiv 0 \pmod{n}$.

   c. Si $2a \equiv 4 \pmod{10}$ alors $a \equiv 2 \pmod{10}$.

2. Pour tout entier a et pour tout entier naturel non nul n, $a^n \equiv a \pmod{n}$.

3. Il existe un entier b non nul tel que $5b \equiv 0 \pmod{10}$.

1 Déterminer pour chacun des entiers a ci-dessous, l'ensemble D_a de tous ses diviseurs.
$a = -13$; $a = -57$; $a = 205$.

2 Le nombre -35763 est-il un multiple de 3 ? de 11 ? de 7 ?

3 1. Déterminer l'ensemble des diviseurs de 15.
2. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b) tels que $a^2 - b^2 = 15$.

4 Déterminer tous les entiers n tels que n divise $n+5$.

5 Déterminer tous les entiers n tels que $n-2$ divise $n-9$.

6 Soit un entier $n \geq 0$.
Montrer que $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

7 1. Ecrire la division euclidienne 3171 par 19.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3171 par -19.

8 Déterminer le reste de la division euclidienne de -307 par -7.

9 Déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, le quotient et le reste de la division de a par b.
1. $a = 1345791113$ et $b = 246812$.
2. $a = -1345791113$ et $b = 246812$.
3. $a = 1345791113$ et $b = -246812$.
4. $a = -1345791113$ et $b = -246812$.

10 Soit le polynôme
$P(x) = x^4 - 32x^3 + 186x^2 - 280x + 125$.
1. Montrer que si n est un entier tel que $P(n) = 0$, alors n divise 125.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.

11 Soit deux entiers non nuls a et b.
On désigne respectivement par q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
Dans chacun des cas, déterminer, si possible a et b.
1. $a + b = 44$, $q = 6$ et $r = 2$.
2. $a + b = -49$, $q = -13$ et $r = 11$.
3. $a + b = 42$, $q = -6$ et $r = 9$.

12 Déterminer les restes modulo 9 de -1, 10, -10, -27 et -25.

13 Déterminer les entiers n dans chacun des cas ci-dessous.
a. $n \equiv -2 \pmod 7$ et $-10 \leq n \leq 15$.
b. $n \equiv 6 \pmod{11}$ et $-6 \leq n \leq 20$.

14 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 1, non divisible par 3.
Montrer que $n+1$ ou $n-1$ est divisible par 3.
2. Soit n et p deux entiers naturels, montrer que l'un des entiers n , p , $n-p$ ou $n+p$ est divisible par 3.

15 Soit deux entiers a et b tels que $a \equiv 3 \pmod{15}$ et $b \equiv 11 \pmod{15}$.
Déterminer les restes modulo 15 de
$a+b$, $a-b$, $-a$, ab, $-a^2b$ et ab^2.

16 Soit trois entiers a, b et c tels que
$a \equiv 2 \pmod{17}$, $b \equiv 4 \pmod{17}$ et $c \equiv 5 \pmod{17}$.
Déterminer les restes modulo 17 de
$a + bc$ et $a^2 + b^2 + c^2$.

17 Soit deux entiers a et b tels que $a \equiv 5 \pmod 4$ et $b \equiv 2 \pmod 4$.

Déterminer le reste modulo 4 de $3a^2 + ab - 9$.

18 Soit un entier a tel que $a \equiv 7 \pmod{11}$.

Déterminer le reste modulo 11 de $a(a+1)(a+2)$.

19 1. Montrer que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. En déduire le reste modulo 7 de $1^2 + 2^2 + \ldots + 100^2$.

20 Déterminer le reste modulo 10 de chacun des entiers 30757, 15163 et 12924.

21 Déterminer les restes modulo 17 de

171^{171}, 186^{186}, 356^{583}.

22 1. Déterminer le reste modulo 10 de -1.

2. Déterminer le chiffre des unités de 9^{2007} et 9^{2008}.

23 Déterminer les restes modulo 16 de chacun des entiers 49^{316}, 15^{2008} et $(-49)^{237}$.

24 Déterminer le reste modulo 13 de 4^3 et de 121^{357}.

25 1. Déterminer le reste modulo 7 de 50^{99}.

2. Déterminer le reste modulo 17 de 50^{99}.

26 Déterminer le reste modulo 7 de $19^{52} \times 23^{41}$.

27 1. Déterminer le reste modulo 13 de 5^4.

2. En déduire les restes modulo 13 de chacun des entiers 5^{4k}, 5^{4k+1}, 5^{4k+2}, 5^{4k+3} avec $k \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer les restes modulo 13 de chacun des entiers $5^{202020202041}$ et $5^{555555555555}$.

4. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n, tels que $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$.

28 1. Déterminer les restes modulo 5 de -1 et de -2.

2. En déduire que $1^{2099} + 2^{2099} + 3^{2099} + 4^{2099}$ est divisible par 5.

29 1. Vérifier que $999 \equiv 0 \pmod{27}$.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $10^{3n} \equiv 1 \pmod{27}$.

b. En déduire le reste modulo 27 de $10^{100} + 100^{10}$.

30 Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $2^n \equiv 1 \pmod 5$, si et seulement si, n est multiple de 4.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $2^n \equiv 1 \pmod{11}$.

31 Soit n un entier.

Quels sont les restes possibles modulo 5 de n^2 ?

Quels sont les restes possibles modulo 7 de n^3 ?

32 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $2x \equiv 4 \pmod{10}$.

b. $4x \equiv 8 \pmod{10}$.

33 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $x^2 \equiv 0 \pmod 4$.

b. $x^2 \equiv 2 \pmod 4$.

c. $x^2 \equiv 3 \pmod 4$.

34 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $x^2 \equiv 4 \pmod{11}$.

b. $x^2 \equiv -1 \pmod{11}$.

c. $x^2 \equiv -2 \pmod{11}$.

35 Déterminer tous les entiers a et b tels que $ab \equiv -2 \pmod{8}$.

36 Résoudre dans $\mathbb{Z}$,

a. $x^2 + 6x + 5 \equiv 0 \pmod{7}$.

b. $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \pmod{8}$.

37 1. Vérifier que $10^{20} \equiv 1 \pmod{11}$.

2. En déduire le reste modulo 11 de 99999999999999999995.

38 Déterminer le reste modulo 103 de $10^{102} + 3\times 10^{204} + 106\times 10^{612}$.

39 Soit x un entier naturel.

1. Vérifier que $x\left(x^4-1\right) \equiv 0 \pmod{5}$. En déduire le reste modulo 5 de $\left(x^4 - x^2\right)\left(x^2+1\right)$.

2. Vérifier que $x\left(x^6-1\right) \equiv 0 \pmod{7}$. En déduire le reste modulo 7 de $\left(x^8 - x^5\right)\left(x^3+1\right)$.

40 Soit p un nombre premier et a un entier naturel non divisible par p. Déterminer les restes modulo p de
a^{p-1}, $a^{p-1} - 2$ et $2a^{10p-10} - 3$.

41 1. Soit un entier $n \geq 0$.

a. Déterminer le reste modulo 111 de 1000.
b. Montrer que les restes modulo 111 de n et 1000n sont égaux.
c. En déduire, sans utiliser la calculatrice, que chacun des nombres 111111, 100010001 et 100010000001 est divisible par 111.
2. Démontrer que 1001001001001 est divisible par 11111.

42 Soit n un entier naturel.

Quel est le reste modulo 4 de $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$?

43 Soit n un entier naturel.

1. Déterminer pour tout entier n de $\{0, 1, ..., 6\}$ le reste modulo 7 de 3^n.

2. Montrer que $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.

3. a. Calculer le reste modulo 7 de 3^{1000}.

b. Quelle est le chiffre des unités de 3^{1000} ?

c. Soit c la somme des diviseurs du nombre 3^{1000}.
Quel est le reste modulo 7 de c.

44 Soit a et b deux entiers.

1. Vérifier que, $a^3 \equiv a \pmod{3}$.

2. Montrer les équivalences ci-dessous.

$a^3 - b^3 \equiv 0 \pmod{3}$ équivaut à $a - b \equiv 0 \pmod{3}$.

$a^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{3}$ équivaut à $a + b \equiv 0 \pmod{3}$.

$a^3 + 2b^3 \equiv 0 \pmod{3}$ équivaut à $a + 2b \equiv 0 \pmod{3}$.

45 Soit a un entier.

1. Déterminer les restes modulo 11 de a, a^2, a^3.

2. En déduire que $a^3 - b^3 \equiv 0 \pmod{11}$,

si et seulement si, $a - b \equiv 0 \pmod{11}$.

46 Soit n un entier naturel non nul.

Montrer par récurrence que,

a. $16^n \equiv 1 - 10n \pmod{25}$,

b. $7^n \equiv 6n + 1 \pmod{36}$,

c. $4^n \equiv 3n + 1 \pmod{9}$,

d. $2^n + 3^n \equiv 5^n \pmod{6}$.

47 Soit un entier $n \geq 4$. On se propose d'étudier les solutions entières de l'équation $(E): x^2 + 9 = 2^n$.
On suppose que (E) possède une solution entière notée a.
1. Montrer que $a \equiv 1 \pmod 2$.
2. En déduire que $a^2 + 9 \equiv 2 \pmod 4$.
3. Montrer que (E) n'admet pas de solution.

48 Soit un entier n impair.
On se propose d'étudier les solutions entières de l'équation $(E): x^2 + 9 = 3^n$.
On suppose que (E) possède une solution entière notée a.
1. Montrer que $a \equiv 0 \pmod 2$.
2. En déduire que $a^2 + 9 \equiv 1 \pmod 4$.
3. Montrer que $3^n \equiv 3 \pmod 4$.
4. En déduire que (E) n'admet pas de solution.

49 Les nombres de Fermat sont définis par
$F_n = 2^{(2^n)} + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
Fermat pensait qu' ils étaient tous premiers. En fait les cinq premiers $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$ sont premiers et le sixième F_5 ne l'est pas.
On va montrer sans calculer explicitement F_5, que 641 divise F_5.
1. Vérifier les égalités $641 = 5 \times 2^7 + 1 = 5^4 + 2^4$.
2. Montrer que $5 \times 2^7 \equiv -1 \pmod{641}$,
$5^4 \times 2^{28} \equiv 1 \pmod{641}$ et $5^4 \equiv -2^4 \pmod{641}$.
3. En déduire que 641 divise $2^{32} + 1 = F_5$.

50 Soit n un entier. On désigne par $f(n)$ la somme des chiffres de n.
1. Montrer que $n \equiv f(n) \pmod 9$.

On pose $N = 4444^{4444}$.
2. a. Montrer que $4444 \equiv 7 \pmod 9$.
b. Ecrire la division euclidienne de 4444 par 3.
c. En déduire que $4444^{4444} \equiv 7 \pmod 9$
d. Montrer que $f(f(N)) \equiv 7 \pmod 9$.
3. a. Vérifier que $N < \left(10^4\right)^{5.10^3}$,
en déduire que $N \leq 10^{20000}$ puis que $f(N) \leq 180000$.
b. Montrer que $f(f(N)) \leq 54$.
4. Montrer que $f(f(f(N))) = 7$.

Chapitre 8

Identité de Bezout

Cryptographie à clé publique (Rivest et al, 1978)

Il s'agit d'un système permettant à tous les membres d'un réseau de coder leurs messages. Seul le chef du réseau qui a fourni la clé du codage possède la clé du décodage de tous les messages.

Le principe est le suivant :

- le chef du réseau choisit deux grands nombres premiers p et q ;
- il calcule $n = pq$ et $\phi(n) = (p-1)(q-1)$;
- il choisit un entier naturel d inférieur à $\phi(n)$ et premier à $\phi(n)$;
- il détermine un entier naturel e tel que $d.e \equiv 1 \pmod n$;
- il diffuse aux membres du réseau les nombres n et e, tout en gardant secrets les nombres p, q, $\phi(n)$ et d.

Le codage s'effectue de la manière suivante :

- le message est traduit en nombres N inférieurs à n ;
- chacun de ces nombres N est remplacé par un nombre C défini par $C \equiv N^{e} (\bmod n)$, c'est ce nombre codé qui est transmis.

Pour procéder au décodage, c'est à dire obtenir N à partir de C, il suffit de calculer C^{d}.

En effet, d'après le petit théorème de Fermat $C^{d} \equiv N^{ed} \equiv N^{1+\phi(n)} \equiv N (\bmod n)$.

Ce décodage nécessite la connaissance de d donc de $\phi(n)$.

Si l'on connaît $\phi(n)$, on procède à la recherche du PGCD de $\phi(n)$ et e en utilisant l'algorithme d'Euclide et on écrit les restes successifs en utilisant $\phi(n)$ et e. On aboutit alors à une Identité de Bezout de la forme $d.e + k\phi(n) = 1$, k un entier.

(J-L Chabert et al, Histoire d'algorithmes, 1993).

Chapitre 8

Identité de Bezout

Dans ce chapitre on désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers.

I. PGCD de deux entiers

Activité 1

Déterminer $a \wedge b$ dans chacun des cas suivants

1. $a = 465$; $b = 225$,
2. $a = 196$; $b = 116$,
3. $a = 144$; $b = 388$.

On rappelle que si a et b sont deux entiers naturels non nuls alors leur plus grand commun diviseur est l'entier naturel $a \wedge b$, tel que $a \wedge b$ divise a et b et tout diviseur commun à a et b divise $a \wedge b$.

Activité 2

Dans cette activité nous nous proposons d'utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels a et b

Le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels a et b est le dernier reste non nul dans la succession des divisions euclidiennes de l'algorithme d'Euclide de a et b.

1. Recherche de $4851 \wedge 616$.

En écrivant les divisions successives de l'algorithme d'Euclide pour les entiers 4851 et 616, on obtient $4851 = 616 \times 7 + 539$; $616 = 539 \times 1 + 77$; $539 = 77 \times 7 + 0$.

Le dernier reste non nul étant 77, on en déduit que $4851 \wedge 616 = 77$.

2. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer $a \wedge b$ dans chacun des cas ci-dessous.

1. $19625 \wedge 1155$. 2. $17680 \wedge 4960$. 3. $30870 \wedge 15750$.

Activité 3

On se propose de déterminer le plus grand commun diviseur de deux entiers en utilisant la calculatrice.

1. Recherche de $2003 \wedge 365$

En tapant 2003 $\boxed{a^b/_c}$ 365 = , la calculatrice affiche $5 \lrcorner 178 \lrcorner 365$.

Le résultat affiché signifie que $\dfrac{2003}{365} = 5 + \dfrac{178}{365}$ et que la fraction $\dfrac{178}{365}$ est irréductible, ou encore que $365 \wedge 178 = 1$.

La division euclidienne $2003 = 365 \times 5 + 178$ nous permet d'affirmer que $2003 \wedge 365 = 365 \wedge 178 = 1$.

2. Recherche de $4010 \wedge 365$.

En tapant 4010 $\boxed{a^b/_c}$ $365 =$, la calculatrice affiche $10 \ulcorner 72 \ulcorner 73$.

Ce qui signifie que $\dfrac{4010}{365} = 10 + \dfrac{72}{73}$ et que la fraction $\dfrac{72}{73}$ est irréductible, ou encore que $72 \wedge 73 = 1$

La division euclidienne $4010 = 365 \times 10 + 360$ et les propriétés du plus grand commun diviseur nous permettent d'affirmer que $4010 \wedge 365 = 365 \wedge 360 = 5(73 \wedge 72) = 5$.

3. Utiliser la calculatrice pour déterminer $a \wedge b$ dans chacun des cas ci-dessous.

$a = 8623$ et $b = 1155$; $a = 19662$ et $b = 865$; $a = 4830$ et $b = 3122$.

Activité 4

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et d un entier non nul, diviseur commun de $7a + 9b$ et $3a + 4b$.

1. Montrer que d est un diviseur commun de $21a + 27b$ et $21a + 28b$.
   En déduire que d divise b.
2. Montrer que d divise a.
3. Montrer que $(7a + 9b) \wedge (3a + 4b) = a \wedge b$.

Activité 5

Soit a et b deux entiers non nuls et d un entier.

Montrer que d divise a et b, si et seulement si, d divise $|a|$ et $|b|$.

Théorème et définition

Si a et b sont deux entiers non nuls, alors il existe un unique entier naturel d qui vérifie les deux conditions suivantes:

1. d divise a et d divise b,
2. Si un entier k divise a et b alors il divise d.

L'entier d défini plus haut est noté $a \wedge b$ et appelé le plus grand commun diviseur de a et b.

Conséquences

Pour tous entiers a et b non nuls, $a \wedge b > 0$.

Pour tous entiers a et b non nuls, $a \wedge b = |a| \wedge |b|$.

Activité 6

En utilisant la calculatrice, déterminer $a \wedge b$ dans chacun des cas ci-dessous.

1. $a = 462$; $b = -1155$. 2. $a = -196625$; $b = 654$.

L'égalité $a \wedge b = |a| \wedge |b|$ nous permet de généraliser les propriétés du plus grand commun diviseur de deux entiers naturels non nuls à celles du plus grand commun diviseur de deux entiers non nuls.

Propriétés

Soit a et b deux entiers non nuls.

- Si b divise a alors $a \wedge b = |b|$.
- Si b ne divise pas a et si r est le reste modulo b de a alors $a \wedge b = b \wedge r$.
- $a \wedge b = b \wedge a$.
- Pour tout entier non nul k, $ka \wedge kb = |k|(a \wedge b)$.
- $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

Activité 7

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer le quotient et le reste de -2921 par 18.
2. Existe-t-il deux entiers a et b tels que $a - b = -2921$ et $a \wedge b = 18$?

II. Entiers premiers entre eux

Définition

Deux entiers non nuls a et b sont dits premiers entre eux, si $a \wedge b = 1$.

Activité 1

Soit n un entier et d un entier naturel non nul.

1. Montrer que si d est un diviseur commun de $n+1$ et $n+9$, alors d divise 8.
2. En déduire que si n est pair alors $(n+1)$ et $(n+9)$ sont premiers entre eux.

Théorème

Soit a et b deux entiers non nuls. Alors il existe un unique couple d'entiers (a', b') tel que $a = (a \wedge b)a'$, $b = (a \wedge b)b'$ et $a' \wedge b' = 1$.

Démonstration

Soit a et b deux entiers non nuls. Posons $d = a \wedge b$.
L'entier d étant un diviseur commun à a et b, il existe deux entiers non nuls a' et b' tels
Que $a = da'$ et $b = db'$. On en déduit que $d = a \wedge b = da' \wedge db' = d(a' \wedge b')$.
Ce qui prouve que $a' \wedge b' = 1$.
L'unicité est évidente.

Activité 2

Déterminer dans chaque cas les entiers premiers entre eux a' et b' tels que
$a = (a \wedge b).a'$ et $b = (a \wedge b).b'$.

1. $a = -60$ et $b = 84$ 2. $a = 77$ et $b = -150$ 3. $a = -240$ et $b = -150$.

Exercice résolu 1

Pour tout entier n, on pose $a = 2n + 5$ et $b = n - 3$.

1. Montrer que tout diviseur commun de a et b est un diviseur de 11.
2. En déduire, suivant les valeurs de n, la valeur de $a \wedge b$.
3. Application

Déterminer $a \wedge b$ lorsque $a = 2 \times 12^{3120} + 5$ et $b = 12^{3120} - 3$.

Solution

1. Si un entier non nul d divise a et b, alors il divise $a - 2b = 11$.
2. D'après la question précédente, tout diviseur commun de a et b est un élément de l'ensemble $\{-11 , -1 , 1 , 11\}$. Il en résulte que $a \wedge b = 11$ ou $a \wedge b = 1$.

Par ailleurs, $n - 3 \equiv 0 \pmod{11}$, si et seulement si, $n \equiv 3 \pmod{11}$ et dans ce cas $2n + 5 \equiv 0 \pmod{11}$.

Il en résulte que $a \wedge b = 11$, si et seulement si, $n \equiv 3 \pmod{11}$.

Par suite, $a \wedge b = 1$, si et seulement si, n n'est pas congru à 3 modulo 11.

3. Les entiers $a = 2 \times 12^{3120} + 5$ et $b = 12^{3120} - 3$ sont de la forme $2n + 5$ et $n - 3$, avec $n = 12^{3120}$.

   Les relations $12 \equiv 1 \pmod{11}$ et $12^{3120} \equiv 1 \pmod{11}$ impliquent que $\left(2 \times 12^{3120} + 5\right) \wedge \left(12^{3120} - 3\right) = 1$.

Activité 3

Pour tout entier n, on pose $a = n - 2$ et $b = 3n + 1$. Déterminer $a \wedge b$, suivant les valeurs de n.

Activité 4

Soit a et b deux entiers non nuls tels que $a \wedge b = 1$ et soit c un entier non nul.

1. Justifier que $ac \wedge bc = |c|$.
2. Montrer que si a divise bc alors a divise c.

L'activité précédente permet d'énoncer le théorème ci-dessous.

Lemme de Gauss

Soit a, b et c trois entiers non nuls. Si $a \wedge b = 1$ et a divise bc alors a divise c.

Activité 5

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 43x + 71y = 0$.

1. Montrer que si (a , b) est solution de (E) alors 43 divise b et 71 divise a.
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Activité 6

Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations ci-dessous.
a. $13x+9y=0$. b. $20x=17y$. c. $21x+35y=0$.

Exercice résolu 2

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a\wedge b=1$.
1. Montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.
2. Montrer que $a+b$ et a^2-ab+b^2 sont soit premiers entre eux, soit divisibles par 3.

Solution

1. Soit p un diviseur premier de ab.
L'égalité $a\wedge b=1$ implique l'une des deux possibilités suivantes:
ou bien p divise a et ne divise pas b et dans ce cas p ne divise pas $a+b$,
ou bien p divise b et ne divise pas a et dans ce cas p ne divise pas $a+b$.
Il en résulte que $a+b$ et ab n'ont aucun diviseur premier commun et alors $(a+b)\wedge ab=1$.
2. On peut écrire $(a+b)^2-\left(a^2-ab+b^2\right)=3ab$. Il en résulte que tout diviseur d commun à $a+b$ et a^2-ab+b^2 divise nécessairement 3ab.
Les entiers $a+b$ et ab étant premiers entre eux, on déduit du lemme de Gauss que d divise 3, c'est-à-dire $d=1$ ou $d=3$. Ce qui prouve le résultat.

Exercice résolu 3

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E): $2x\equiv 12y \pmod{10}$.
1. Montrer que si $2x\equiv 12y \pmod{10}$ alors $x-y\equiv 0 \pmod{5}$.
2. a. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $x\equiv y \pmod{5}$.
   b. En déduire les solutions de $2x\equiv 12y \pmod{10}$.

Solution

1. a. Un couple (x, y) est solution de $2x\equiv 12y \pmod{10}$, si et seulement si, $2x-12y$ est divisible par 10, ou encore, si et seulement si, $2(x-6y)$ est divisible par 10.
Il en résulte que 5 divise $x-6y$ et par suite 5 divise $x-y$ car $x-6y=x-y-5y$.
On en déduit que si $2x\equiv 12y \pmod{10}$ alors $x\equiv y \pmod{5}$.
2. a Les solutions de l'équation $x\equiv y \pmod{5}$ sont tous les couples de la forme $(x, x+5k)$ tels que $x\in\mathbb{Z}$ et $k\in\mathbb{Z}$.
b. D'après ce qui précède si un couple (x, y) est solution de $2x\equiv 12y \pmod{10}$ alors ce couple est de la forme $(x, x+5k)$ avec $x\in\mathbb{Z}$ et $k\in\mathbb{Z}$.

Montrons que tout couple de cette forme est solution de (E).
Si $(x,y)=(x,x+5k)$ avec $x\in\mathbb{Z}$ et $k\in\mathbb{Z}$ alors $12(x+5k)=12x+60k=2x+10(6k+x)$.
Ce qui prouve que $2x\equiv 12y \pmod{10}$.
En conclusion
$2x\equiv 12y \pmod{10}$, si et seulement si, $(x,y)=(x,x+5k)$ avec $x\in\mathbb{Z}$ et $k\in\mathbb{Z}$.

Activité 7

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier soit divisible par 187.
2. Un entier qui est divisible par 2 et par 28 est-il nécessairement divisible par 56 ?
3. Soit a et b deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux.
   Montrer que si a divise n et b divise n alors ab divise n.

L'activité précédente nous permet d'énoncer le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit a et b deux entiers naturels non nuls et n un entier.
Si $a\wedge b=1$, $n\equiv 0 \pmod{a}$ et $n\equiv 0 \pmod{b}$ alors $n\equiv 0 \pmod{ab}$.

Activité 8

Déterminer les restes respectifs modulo 13 et modulo 17 de 129286.
En déduire le reste modulo 221 de 129286.

III. PPCM de deux entiers

Activité 1

Soit a et b deux entiers non nuls, $d=a\wedge b$ et a' et b' les entiers tels que $a'\wedge b'=1$, $a=da'$ et $b=db'$.
On pose $m=d|a'b'|$

1. Vérifier que m est un multiple commun à a et à b et que tout multiple commun à a et b est un multiple de m.
2. En déduire que m est le plus petit multiple commun strictement positif de a et b.

Théorème et définition

Pour tous entiers a et b non nuls il existe un unique entier m strictement positif qui vérifie les deux conditions suivantes.
- m est un multiple de a et b,
- tout multiple commun de a et b est un multiple de m.

L'entier m ainsi défini est le plus petit commun multiple de a et b et est noté $a\vee b$.

Conséquences

- Pour tous entiers a et b non nuls, $a\vee b=|a|\vee|b|$.
- Pour tous entiers a et b non nuls, $(a\vee b)\times(a\wedge b)=|ab|$.

Cette dernière conséquence nous permet d'affirmer que les propriétés du plus petit commun multiple de deux entiers non nuls sont les mêmes que celles du plus petit commun multiple de deux entiers naturels non nuls.

Propriétés

Soit a et b deux entiers non nuls.
- Si b divise a alors $a \vee b = |a|$.
- Pour tout entier non nul k, $ka \vee kb = |k|(a \vee b)$.
- $a \vee b = b \vee a$.
- $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

Activité 2

Déterminer $a \wedge b$ dans chacun des cas. En déduire $a \vee b$.

1. $a = 495$ et $b = 2541$ 2. $a = -24$ et $b = -56$ 3. $a = 123$ et $b = -82$.

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ les systèmes ci-dessous.

$S : \begin{cases} ab = -1176, \\ a \vee b = 84. \end{cases}$ $S' : \begin{cases} ab = 168, \\ a \vee b = 24. \end{cases}$

Activité 4

Soit a un entier non nul et $a\mathbb{Z}$ l'ensemble de tous les multiples de a.

1. Déterminer $2\mathbb{Z}$.
2. Déterminer les ensembles E, F et G définis par

$E = \{n \in 6\mathbb{Z} \text{ et } |n| < 31\}$, $F = \{n \in -5\mathbb{Z} \text{ et } |n| < 31\}$ et G l'intersection de E et F.

Activité 5

1. a. Montrer que si $a \equiv 0 \pmod{8}$ et $a \equiv 0 \pmod{12}$, alors $a \equiv 0 \pmod{24}$.

   b. La réciproque est-elle vraie ?

2. Déterminer les entiers a vérifiant $\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{8}, \\ a \equiv 1 \pmod{12}, \\ |a| \leq 225. \end{cases}$

IV. Inverses modulo b

Activité 1

1. Soit u un entier.

   a. Déterminer à l'aide d'un tableau de congruence les restes possibles de 6u modulo 9.

   b. Existe-t-il un entier u tel que $6u \equiv 1 \pmod{9}$?

2. Déterminer un entier u tel que $34u \equiv 1 \pmod{7}$.

Théorème

Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $b \geq 2$ et $a \wedge b = 1$.
Alors il existe un unique entier non nul u appartenant à $\{0, 1, ..., b-1\}$ tel que $au \equiv 1 \pmod{b}$. On dit que u est un inverse de a modulo b.

Démonstration

Soit m et n deux entiers.

La congruence $ma \equiv na \pmod{b}$ est équivalente à $(m-n)a \equiv 0 \pmod{b}$.

Les entiers a et b étant premiers entre eux, il résulte de ce qui précède que $ma \equiv na \pmod{b}$, si et seulement si, b divise $m-n$ (*).

Soit i et j deux entiers tels que $0 \leq i < j \leq b-1$. Remarquons que b ne divise pas $j-i$ car $0 < j-i < b$. On déduit alors de (*) que ia et ja ont nécessairement des restes modulo b distincts. Par suite, à chaque élément ia de $E = \{0, a, ..., (b-1)a\}$, il correspond un unique reste appartenant à $\{0, 1, 2, ..., b-1\}$. Ce qui équivaut à dire que la relation $au \equiv 1 \pmod{b}$ possède une unique solution dans $\{0, 1, ..., b-1\}$.

Exercice résolu 4

1. Déterminer un inverse de 4 modulo 13.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $4x \equiv 1 \pmod{13}$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de $43x \equiv 1 \pmod{13}$.

Solution

1. Les entiers 4 et 13 étant premiers entre eux, il existe un entier u_0 appartenant à $\{0, 1, 2, ..., 12\}$ tel que $4u_0 \equiv 1 \pmod{13}$.
La division euclidienne $40 = 3 \times 13 + 1$ implique $u_0 = 10$.
2. Si x est solution de $4x \equiv 1 \pmod{13}$ alors $4x \equiv 4u_0 \pmod{13}$, ou encore, $4(x-10) \equiv 0 \pmod{13}$.
Ce qui implique nécessairement que $x \equiv 10 \pmod{13}$ car 13 ne divise pas 4.
Réciproquement, si $x \equiv 10 \pmod{13}$ alors $4x \equiv 1 \pmod{13}$.
Les solutions cherchées sont tous les entiers $x = 10 + 13k,\ k \in \mathbb{Z}$.
3. On vérifie facilement que $43 \equiv 4 \pmod{13}$ et par suite $43x \equiv 4x \pmod{13}$.
Il en résulte que $43x \equiv 1 \pmod{13}$, si et seulement si, $4x \equiv 1 \pmod{13}$.
Les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $43x \equiv 1 \pmod{13}$ sont donc les entiers $x = 10 + 13k,\ k \in \mathbb{Z}$.

V. Identité de Bezout

Activité 1

1. a. Déterminer un inverse de 25 modulo 13.
   b. En déduire deux entiers u et v tels que $25u + 13v = 1$.
2. Déterminer deux entiers u et v tels que $27u + 10v = 1$.
3. Déterminer, dans chacun des cas suivants, deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
   $a = 9$ et $b = 14$; $a = -9$ et $b = -8$.

Théorème (Identité de Bezout)

Deux entiers non nuls a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

Démonstration

Nous démontrerons d'abord le théorème dans le cas où a et b sont des entiers naturels premiers entre eux. Puis nous déduirons le cas général.
Supposons que a et b sont deux entiers naturels premiers entre eux et montrons l'existence de deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.
Si $b = 1$ alors $a \times 0 + b \times 1 = 1$ et les entiers 0 et 1 conviennent.
Si $b > 1$ alors la relation $au \equiv 1 \pmod b$ possède une unique solution w dans $\{0, 1, 2, ..., b-1\}$ et alors il existe un entier k tel que $aw = bk + 1$.
Il suffit donc de prendre $u = w$ et $v = -k$.
Réciproquement, supposons qu'il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$. Alors tout diviseur d commun à a et b divise nécessairement 1, ce qui veut dire que $a \wedge b = 1$.
Le théorème est ainsi démontré lorsque a et b sont deux entiers naturels non nuls.
Supposons à présent que a est un entier négatif non nul et b un entier naturel non nul.
On sait d'après ce qui précède qu'il existe deux entiers u et v tels que $(-a)u + bv = 1$. On en déduit que $a(-u) + bv = 1$. Ce qui démontre le théorème.
Les autres cas se traitent de la même manière.

Corollaire

Soit a et b deux entiers non nuls et $d = a \wedge b$. Alors il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = d$.

Démonstration

On sait qu'il existe deux entiers a' et b' tels que $a = (a \wedge b)a'$, $b = (a \wedge b)b'$ et $a' \wedge b' = 1$.
D'après le théorème de Bezout il existe deux entiers u et v tels que $a'u + b'v = 1$ et alors $da'u + db'v = au + bv = d$.

Exercice résolu 5

1. Montrer que les entiers 22826 et 537 sont premiers entre eux.
2. Trouver deux entiers u et v tels que $22826u + 537v = 1$.

Solution

1. En tapant '22826 $\boxed{ab/c}$ 537 = la calculatrice affiche 42 ⌐ 272 ⌐ 537 .
On en déduit que $22826 \wedge 537 = 272 \wedge 537 = 1$.
2. Nous donnons un procédé pour trouver deux entiers u et v tels que $22826u + 537v = 1$.

On écrit les divisions euclidiennes successives jusqu'à obtenir un reste nul.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant.

r	22826	537	272	265	7	6	1	0
q		42	1	1	37	1	6	

On complète alors le tableau ci-dessous en respectant la loi

		q
α	β	$q\beta+\alpha$
γ	δ	$q\delta+\gamma$

q		42	1	1	37	1	6
0	1	$42\times1+0=42$	$1\times42+1=43$	$1\times43+42=$ 85	$37\times85+43=$ 3188	$1\times3188+85=$ 3273	$6\times3273+3188=$ 22826
1	0	$42\times0+1=1$	$1\times1+0=1$	$1\times1+1=2$	$37\times2+1=75$	$1\times75+2=77$	$6\times77+75=537$

Les deux dernières colonnes donnent $22826\times77-3273\times537=1$.

Activité 2

1. Vérifier que 11413 et 191 sont premiers entre eux.
2. Utiliser le procédé de l'exercice précédent pour déterminer deux entiers u et v tels que $11413u+191v=1$.

VI. Exemples d'équations de la forme $ax+by=c$; a , b et c entiers

Activité 1

Soit a, b et c trois entiers et $d = a \wedge b$. On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): ax+by=c$.

1. Montrer que si d ne divise pas c alors (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
2. Montrer que si d divise c alors (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Théorème

Soit a, b et c trois entiers et $d = a \wedge b$. L'équation $ax+by=c$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, si et seulement si, d divise c.

Activité 2

On se propose de résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 2x+3y=1$.

1. Déterminer une solution particulière (x_0, y_0) de (E).
2. a. Vérifier que (x, y) est solution de (E), si et seulement si, $2(x-x_0)+3(y-y_0)=0$.

   b. En déduire les solutions de (E).

3. Soit lẻquation $(E_1): 2x+3y=5$.

   Montrer que $(5x_0, 5y_0)$ est une solution particulière de (E_1).

   Donner alors les solutions de (E_1).

Activité 3

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $7x+11y=1$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes.
   a. $7x+11y=2$.
   b. $7x+11y=-5$.
   c. $7x-11y=-5$.

Activité 4

Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $35x-14y=7$.

Activité 5

On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 46x+115y=a$ où a est un entier non nul.

1. a. Déterminer $46\wedge 115$.
   b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que l'équation (E) admette au moins une solution.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E), dans chacun des cas ci-dessous.
   • $a=23$. • $a=230$. • $a=15$.

Activité 6

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations $5x+3y=1$ et $5x-3y=1$.
2. En déduire les solutions entières de l'équation $25x^2-9y^2=7$.

Problème résolu

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(7,12)$, $B(7,0)$ et $C(0,12)$.

1. a. Déterminer les points de coordonnées entières qui appartiennent à la droite (OA).
   b. En déduire les points de coordonnées entières qui appartiennent au segment $[OA]$.
2. a. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ les équations $12x-7y=1$ et $12x-7y=-1$.
   b. Montrer qu'à l'intérieur du rectangle ABOC. il existe deux points I et Jde coordonnées entières et tels que la distance de chacun d'entre eux à la droite soit minimale.
3. Vérifier que le quadrilatère OIAJest un parallélogramme et calculer son aire.

Solution

1. On vérifie facilement que la droite (OA) est d'équation $12x-7y=0$.

Déterminer les points M de coordonnées entières appartenant à (OA), revient à résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $12x-7y=0$.

Les entiers 12 et 7 étant premiers entre eux, il en résulte que (x, y) est une solution de de $12x = 7y$ si et seulement si, 7 divise x, 12 divise y et $y = \frac{12}{7}x$.

On en déduit que les solutions entières de $12y - 7x = 0$ sont les couples $(7k, 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b. Un point $M(x, y)$ de (OA) appartient à $[OA]$, si et seulement si, $0 \le x \le 7$ et $0 \le y \le 12$.

Les seuls couples $(7k, 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$ qui vérifient les conditions précédentes sont $(0,0)$ et $(7,12)$, donc les seuls points de $[OA]$ de coordonnées entières sont les points O et A.

2. a. L'égalité $12 \times 3 - 7 \times 5 = 1$ implique que $(3,5)$ est une solution particulière de $12x - 7y = 1$.

On en déduit que $12x - 7y = 1$, si et seulement si, $12(x-3) = 7(y-5)$.

Par suite, les solutions entières de $12x - 7y = 1$ sont les couples $(7k+3, 12k+5)$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'équation $12x - 7y = -1$ est équivalente à l'équation $12(-x) - 7(-y) = 1$.

Par suite, les solutions entières de $12x - 7y = -1$ sont les couples $(7k'-3, 12k'-5)$, $k' \in \mathbb{Z}$.

b. Soit $M(x, y)$ un point à coordonnées entières intérieur au triangle ABOC.

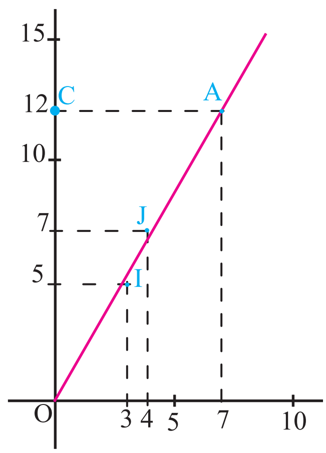
Remarquons que x est un entier strictement compris entre 0 et 7 et y est un entier strictement compris entre 0 et 12.

De plus la distance de M(x,y) à la droite (OA) est minimale, si et seulement si,

$$d(M, (OA)) = \frac{|12x - 7y|}{\sqrt{144+49}} = \frac{|12x-7y|}{\sqrt{193}} \text{ est minimale.}$$

L'entier non nul $|12x - 7y|$ est minimum lorsqu'il vaut 1.

On en déduit qu'un $M(x, y)$ à coordonnées entières et intérieur au rectangle ABOC se trouve à une distance minimale de (OA), si et seulement si, $12x - 7y = 1$ ou $12x - 7y = -1$, avec les conditions $0 \le x \le 7$ et $0 \le y \le 12$.



Il résulte alors des questions précédentes que seuls les points $I(3,5)$ et $J(4,7)$ répondent à la question.

3. Le milieu S de $[OA]$ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{2}, 6\right)$.

On vérifie facilement que S est le milieu de $[IJ]$. Par suite, le quadrilatère OIAJ est un parallélogramme.

De plus, l'aire $\mathcal{A}$ du parallélogramme OIAJ est le double de l'aire $\mathcal{A}'$ du triangle AOI.

On en déduit que $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}' = OA \times d(I, (OA)) = \sqrt{193} \times \frac{1}{\sqrt{193}} = 1$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. L'entier 5 est un inverse modulo 6 de

☐ 5.   ☐ -5.   ☐ 1.

2. Soit p un nombre premier.

☐ $p \wedge p^2 = 1$.   ☐ $p \wedge p^2 = p$.   ☐ $p \wedge p^2 = p^2$.

3. L'ensemble des solutions entières de l'équation $11x - 5y = 1$ est

☐ $\{(1+5k, 2+11k), k \in \mathbb{Z}\}$.   ☐ $\{(1+11k, 2+5k), k \in \mathbb{Z}\}$.   ☐ $\{(2+5k, 1+11k), k \in \mathbb{Z}\}$.

4. L'ensemble des solutions entières de l'équation $13x - 17y = 0$ est

☐ $\{(17k, 13k), k \in \mathbb{Z}\}$.   ☐ $\{(13k, 17k), k \in \mathbb{Z}\}$.   ☐ $\{(17+13k, 13+17k), k \in \mathbb{Z}\}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit n un entier.

   $n \equiv 0 \pmod{143}$, si et seulement si, $n \equiv 0 \pmod{13}$ et $n \equiv 0 \pmod{11}$.

2. Pour tous entiers a et b,

   a. $-3a \wedge 3b = 3(a \wedge b)$.

   b. Si $a \wedge b = a \vee b$ alors $a = b$.

3. L'équation $25x - 80y = 3$ admet des solutions entières.

4. Tout entier admet un inverse modulo 14.

5. Pour tout entier $n \geq 2$, $(n-1)$ est son propre inverse modulo n.

1 Déterminer $a \wedge b$ dans chacun des cas ci-dessous.

1. $a = 558$ et $b = -1235$.
2. $a = 924$ et $b = 990$.
3. $a = -999$ et $b = 888$.
4. $a = 1890$ et $b = -5250$.

2 Calculer $a \wedge b$ et $a \vee b$ dans chacun des cas ci-dessous.

1. $a = 588$ et $b = -1235$.
2. $a = 51$ et $b = -255$.
3. $a = 2n+1$ et $b = n$, où n est un entier non nul.

3 Trouver les valeurs possibles de l'entier a sachant que $a \wedge 180 = 36$ et $|a| < 360$.

4 Trouver tous les couples (a, b) d'entiers non nuls tels que $a \wedge b = 19$ et $ab = 2166$.

5 Montrer qu'il n'existe aucun couple (a, b) d'entiers tels que $a \wedge b = 19$ et $a^2 - b^2 = 490$.

6 1. Montrer que
$2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ et $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$.
2. En déduire les congruences
$2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$ et $2^{340} \equiv 1 \pmod{31}$.
3. Montrer que 341 divise $2^{340} - 1$.

7 La décomposition de 561 en facteurs premiers est $561 = 3 \times 11 \times 17$.
Soit a un entier premier avec 561.
1. Vérifier que a est premier avec chacun des entiers 3, 11 et 17.
2. Montrer que
a. 3 divise $a^2 - 1$.
b. 11 divise $a^{10} - 1$.
c. 17 divise $a^{16} - 1$.
3. En déduire les congruences
$a^{560} \equiv 1 \pmod{3}$, $a^{560} \equiv 1 \pmod{11}$ et $a^{560} \equiv 1 \pmod{17}$.
3. Montrer que 561 divise $a^{560} - 1$.

8 Soit a, b et d trois entiers non nuls tels que $a \wedge b = d$.
1. Montrer que si un entier n divise $4a + 5b$ et $5a + 2b$ alors n divise 17a et 17b.
2. En déduire que $(4a+5b) \wedge (5a+2b) = d$ ou $(4a+5b) \wedge (5a+2b) = 17d$.

9 Soit a, b et n trois entiers non nuls.
1. Montrer que si d divise a et b alors d divise $a + bn$ et $a + b(n-1)$.
2. Montrer que si d divise $a + bn$ et $a + b(n-1)$ alors d divise a et b.
3. En déduire que $a \wedge b = (a+bn) \wedge (a + b(n-1))$.

10 1. a. Donner une solution particulière de $5x \equiv 1 \pmod{17}$.
b. En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de $5x \equiv 1 \pmod{17}$.
c. Donner les solutions dans $\mathbb{Z}$ de $345x \equiv 1 \pmod{17}$.
2. a. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ $5x \equiv 2 \pmod{17}$.
b. Donner les solutions dans $\mathbb{Z}$ de $430x \equiv 2 \pmod{17}$.

11 Résoudre dans $\mathbb{Z}$
a. $17x \equiv 1 \pmod{33}$.
b. $17x \equiv -9 \pmod{33}$.

12 Déterminer l'ensemble des couples (x, y) tels que $12x \equiv 30y \pmod{15}$.

13 Déterminer l'ensemble des couples (x, y) tels que $11x \equiv 99y \pmod{77}$.

14 1. Vérifier que $2015 \wedge 2007 = 1$.
2. Déterminer deux entiers a et b tels que $2007a + 2015b = 1$.

15 1. Vérifier que $391 \wedge 323 = 17$.
2. Déterminer deux entiers a et b tels que $391a - 323b = 17$.
3. En déduire une solution de $391a - 323b = 204$.

16 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $97x + 11y = 1$.
2. Soit l'équation $(E): 97x + 77y = 7$.
a. Donner une solution particulière de (E).
b. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).

17 On pose $u = 2 + \sqrt{3}$.
1. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, où a_n et b_n sont des entiers naturels.
b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de a_n et b_n.
2. a. Montrer que
$a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ et $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = 1$.
b. En déduire que
$a_n \wedge b_n = a_{n+1} \wedge a_n = b_{n+1} \wedge b_n = 1$.

18 Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes.
a. $7x - 14y = 5$. b. $5x - 10y = 10$. c. $29x + 58y = 3$.

19 Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ chacune des équations suivantes.
a. $(4x - 3y - 5)(4x + 3y - 1) = 0$. b. $x^2 - 9y^2 = 2$.

20 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 13x - 8y = 1$.
2. On considère les triplets (x, y, z) de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ vérifiant le système $S: \begin{cases} 5x + y - 2z = 1, \\ 8x - 9y + 2z = 0. \end{cases}$
Montrer que si (x, y, z) est solution de S alors (x, y) est solution de (E). Résoudre S dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

21 1. Déterminer deux entiers u et v tels que $9u - 11v = 1$.
2. Soit a, b et x trois entiers. Montrer que si $x \equiv a \pmod{9}$ et $x \equiv b \pmod{11}$, alors $x \equiv 45b - 44a \pmod{99}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $\begin{cases} x \equiv 6 \pmod{9}, \\ x \equiv 8 \pmod{11}. \end{cases}$

22 Pour tout entier n, on considère les nombres $a = 2n - 3$ et $b = 3n - 1$.
1. Quelles sont les valeurs possibles de $a \wedge b$?
2. a. Vérifier que pour tout n, le couple (a, b) est solution de l'équation $(E): 3x - 2y = -7$.
b. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E).
3. Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $a \wedge b = 7$.

23 Soit p, q et u trois nombres premiers.
On pose n = pqu et on suppose que p–1, q–1 et u–1 divisent n–1.
Soit a un entier premier avec n.
1. Montrer que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$.
et $a^{u-1} \equiv 1 \pmod{u}$.
En déduire les congruences
$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$, $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{q}$.
et $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{u}$.
2. Montrer que $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.
3. Décomposer 561 en produit de facteurs premiers et montrer que $224^{560} \equiv 1 \pmod{561}$.
4. Montrer que $561^{1728} \equiv 1 \pmod{1729}$.

24 1. Soit a et b des entiers naturels non nuls tels que $(a+b)\wedge ab = p$, où p est nombre premier.
a. Montrer que p est un diviseur commun de a et b.
b. Montrer que $a \wedge b = p$.
2. On désigne par a et b deux entiers naturels tels que $a \leq b$.
a. Résoudre le système $\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ a \vee b = 170 \end{cases}$.
b. En déduire les solutions du système
$\begin{cases} (a+b)\wedge ab = 5 \\ a \vee b = 170 \end{cases}$.

25 On désigne par x et y deux entiers naturels non nuls tels que $x < y$.
Soit S l'ensemble des couples $(x,\ y)$ tels que $x \wedge y = y - x$.
1. Calculer $363 \wedge 484$.
Le couple $(363, 484)$ appartient-il à S ?
2. Soit n un entier naturel non nul.
Le couple $(n, n+1)$ appartient-il à S ?
3. a. Montrer que $(x,\ y)$ appartient à S, si et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$.
b. En déduire que pour tout couple $(x,\ y)$ de S, $x \vee y = k(k+1)(y-x)$.
4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.
b. En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ de S tels que $x \vee y = 228$.

26 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{3+4i}{5}\bar{z} + \frac{1-2i}{5}$.
1. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
b. Quelle est la nature de f ?
2. a. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
b. Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $4x - 3y = 2$.
c. En déduire les points de D dont les coordonnées sont entières.
3. On considère les points M d'affixe $z = 1 + iy$, où $y \in \mathbb{Z}$.
Déterminer les entiers y tels que $\mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z')$ soient entiers.

27 Soit a et b deux entiers.

1. Montrer que si $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$ alors a et b sont premiers entre eux.
On considère l'équation $(E) : \left(x^2 + xy - y^2\right)^2 = 1$.
2. Déterminer les solutions entières de (E) telles que $x = y$.
3. Soit (p, q) une solution de (E).
a . Montrer que $(q, p+q)$ est une solution de (E).
b. En déduire que $(p+q, p+2q)$ est une solution de (E).
c. Donner six solutions de (E).

28 Le but de l'exercice est déterminer l'ensemble E des triplets (x, y, z) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$.
1. Montrer que pour tout couple (a, b) d'entiers naturels non nuls tels que a $\cancel{b}$,
$(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ est un élément de E.
2. Soit (x, y, z) un élément de E tel que $x \wedge y = 1$.
a. Montrer que $x \wedge z = 1$ et $y \wedge z = 1$.
b. Montrer que x et y ne sont pas tous les deux pairs.
c. Montrer que l'équation $a^2 \equiv 2 \pmod 4$ ne possède pas de solution entière.
d. Montrer que si x et y sont tous les deux impairs alors $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod 4$. En déduire que x et y ne peuvent pas être tous les deux impairs.
e. On suppose que x est impair et y est pair.
Montrer que z est impair et que z+x et z-x sont pairs.
En déduire qu'il existe deux entiers strictement positifs p et q, premiers entre eux, tels que
$x = p - q$, $z = p + q$ et $y^2 = 4pq$ et p et q sont des carrés parfaits.
3. En déduire l'ensemble des éléments de E.
4. Donner tous les triplets de E tels que $z \leq 18$.

29 On considère les dix caractères A, B, C, D, E, F, G, H, I et J auxquels on associe dans l'ordre les entiers de 1 à 10.

On note $\Omega=\{1,2,3,...,10\}$. On appelle message tout mot ayant un sens ou non formé avec ces dix caractères.

Soit a un entier compris entre 1 et 10. On désigne par f l'application qui à tout élément i de Ω associe le reste de a^i modulo 11.

1. On suppose que a = 5.

a. Coder à l'aide de f le message « BAC » en utilisant la grille de chiffrement ci-dessous

Message	B	A	C
i	2	1	3
$f(i)$	3		
Code	C		

b. Coder à l'aide de f le message « FADE ».

Peut-on déchiffrer avec certitude le message codé ?

2. On suppose que a = 2.

Donner la grille de chiffrement de f.

Peut-on déchiffrer avec certitude un message codé?

3. On se propose de déterminer les valeurs possibles de l'entier a pour que l'application f permette de chiffrer et de déchiffrer avec certitude tous les messages.

a. Soit i et i' deux entiers compris entre 1 et 9 tels que $i<i'$. Montrer que

$a^i \equiv a^{i'} \pmod{11}$ équivaut à $a^{i'-i} \equiv 1 \pmod{11}$.

b. En déduire que f permet de chiffrer et de déchiffrer avec certitude tous les messages , si et seulement si, a^i n'est pas congru à 1 modulo 11 pour tout $i\in\{1,2,3,...,9\}$.

c. On suppose que k est le plus petit entier de Ω tel que $a^k \equiv 1 \pmod{11}$. Montrer que k est un diviseur de 10.

d. Conclure.

30 On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par $F_0=0$; $F_1=1$ et $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, $n\geq 0$.

1. Calculer les termes de cette suite jusqu'à F_{10}.

2. Montrer que pour tout entier non nul n,

$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n$.

3. En déduire que pour tout entier non nul n, $F_n \wedge F_{n+1}=1$.

4 . Soit n un entier non nul. Montrer par récurrence sur l'entier m que $F_{m+n}=F_m F_{n+1}+F_{m-1}F_n$.

5. En déduire que $F_m \wedge F_n = F_m \wedge F_{m+n}$.

31 Pour tout entier naturel n, on note $\varphi(n)$ le nombre d'entier naturels inférieurs à n et premiers avec n.

On pose $\varphi(1)=1$.

1. Vérifier que $\varphi(7)=6$ et $\varphi(8)=4$.

2. Montrer que $\varphi(n)\leq n-1$.

Soit k un entier naturel non nul, p et q deux nombres premiers et a un entier non divisible par p et q.

3. a. Montrer que $\varphi(p)=p-1$.

b. Montrer que $a^{\varphi(p)}\equiv 1 \pmod{p}$.

4. a. Montrer que $\varphi(pq)=\varphi(p)\varphi(q)$.

b. Montrer que $a^{\varphi(pq)}\equiv 1 \pmod{pq}$.

c. En déduire les congruences ci-dessous

$10^{1536}\equiv 1 \pmod{1649}$;

$10430^{10200}\equiv 1 \pmod{10403}$.

5. a. Montrer que $\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}$.

b. Déterminer $\varphi(125)$, $\varphi(256)$ et $\varphi(1331)$.

6. a. Montrer que $(1+up)^{p^{k-1}}\equiv 1 \pmod{p^k}$

(On pourra utiliser que tout entier non nul n divise C_n^j, $j\neq 0$ et $j\neq n$).

b. Montrer que $a^{\varphi(p^k)}\equiv 1 \pmod{p^k}$.

En déduire les congruences ci-dessous

$17^{100}\equiv 1 \pmod{125}$; $17^{128}\equiv 1 \pmod{256}$.

Chapitre 9

Probabilités

Un homme du monde a proposé deux problèmes à Pascal et Roberval,
le second fut à l'origine des calculs de probabilité.
C'est le problème "des points" ou "des parties" ou "de division".
Le prix d'un tournoi est gagné par le premier des participants qui obtient un certain nombre de points.
Comment partager ce prix si le tournoi est interrompu ?
Toutes les solutions qui en furent ensuite données étaient fausses.
Le calcul des probabilités fut présenté au monde en 1657 par Huyghens.
Pour la première fois, les concepts fondamentaux, énoncés et correctement utilisés, sont dans le domaine public.

(Dieudonné,
Abrégé d'histoire des mathématiques,
1978).

Chapitre 9

Probabilités

A. Probabilité sur un ensemble fini

Dans cette partie l'univers E de l'expérience aléatoire considérée est un ensemble fini.

I. Expériences aléatoires

Activité 1

On désigne par E l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à 500.
On note
A l'ensemble des entiers de E qui sont multiples de 10,
B l'ensemble des entiers de E qui sont multiples de 6,
C l'ensemble des entiers de E qui sont multiples de 15.

1. Dénombrer E, A, B et C.
2. Déterminer et dénombrer chacun des ensembles $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap C}$, $(A \cap B) \cup C$.

Activité 2

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CHOIX ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot POSSIBLE ?
3. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BACCALAUREAT ?

Activité 3

Une urne contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.
On effectue p tirages, en tirant les boules une à une et en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.

1. On note A_3 l'ensemble des tirages qui n'amènent pas le numéro 3.
   Déterminer le cardinal de A_3.
2. On note $A_{2,3}$ l'ensemble des tirages qui n'amènent ni le numéro 2 ni le numéro 3.
   Déterminer le cardinal de $A_{2,3}$.
3. On note B l'ensemble des tirages qui n'amènent pas en même temps les numéros 1, 2 et 3. Déterminer le cardinal de B.

Activité 4

Dans une librairie douze titres de revues différentes sont disponibles.
Trois clients commandent chacun une revue.

1. Combien y a-t-il de commandes possibles ?

2. Combien y a-t-il de commandes possibles si on suppose qu'aucun titre n'est choisi deux fois ?
3. Combien y a-t-il de commandes possibles si on suppose que les clients commandent la même revue ?
4. Combien y a-t-il de commandes si exactement deux clients choisissent le même titre ?

Définition

Soit $E=\{a_1, a_2,...,a_n\}$ un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul.

* Le nombre des p- uplets d'éléments de E est l'entier n^p.
* Le nombre de n- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier $n!$

* Si $1 \leq p \leq n$ alors
• le nombre des p- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$,
• le nombre de parties à p éléments de E est l'entier $C_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

(L'entier C_n^p est aussi noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ et on convient que $C_n^0=1$).

Activité 5

1. a. Déterminer le nombre de parties d'un ensemble à quatre éléments.
   b. Déterminer le nombre de parties d'un ensemble à cinq éléments.
2. Soit E un ensemble à n éléments $(n\geq 1)$.
   a. Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} C_n^k=2^n$.
   b. En déduire le nombre de parties de l'ensemble E.

Activité 6

Soit un entier $n\geq 2$ et un entier $2\leq p\leq n$.

On considère un ensemble E de cardinal n et a, b deux éléments de E.

1. a. Déterminer le nombre des parties à p éléments contenant a et b.
   b. Déterminer le nombre des parties à p éléments contenant a ou bien b.
   c. Déterminer le nombre des parties à p éléments ne contenant ni a ni b.
2. En déduire que $C_n^p=C_{n-2}^{p-2}+2C_{n-2}^{p-1}+C_{n-2}^{p}$.

II. Définition d'une probabilité sur un ensemble fini

Définition

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard et est donc imprévisible.
L'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers.
Les éléments de E sont appelés événements élémentaires.
Une partie A de E est appelée événement.

Activité 1

Une expérience consiste à lancer une pièce de monnaie trois fois de suite.
On note à chaque fois le côté exposé (P pour pile et F pour face).
1. Dénombrer les issues de cette expérience.
2. Déterminer le cardinal de chacun des événements ci-dessous.
   A : « La face pile apparaît une seule fois »
   B : « Obtenir P pour la première fois au deuxième lancer »
3. Déterminer le cardinal de $A \cap B$ et de $A \cup B$.

Définition

Soit E l'univers d'une expérience aléatoire et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des événements de E.
On appelle probabilité sur E, toute application p, de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$ vérifiant les conditions ci-dessous.
- L'image $p(E)$ de E est égale à 1.
- L'image $p(\varnothing)$ de l'ensemble vide est égale à 0.
- L'image $p(A)$ d'un événement A, est la somme des images des événements élémentaires de A, c'est-à-dire $p(A) = \sum_{a_i \in A} p(a_i)$.

Vocabulaire

Le triplet $(E, \mathscr{P}(E), p)$ est appelé espace probabilisé fini.
L'événement E est appelé certain.
L'événement vide est appelé événement impossible.
L'événement contraire d'un événement A est noté $\overline{A}$.
Deux événements sont dits incompatibles si leur intersection est vide.

Activité 2

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
1. On suppose que la probabilité d'apparition de 6 est le triple de la probabilité d'apparition de chacun des nombres 1, 2, 3, 4 et 5.
   Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.

2. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.
A « obtenir un nombre pair »,
B « obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 3 »,
C « obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3»,
D « obtenir un multiple de 3 ou un nombre pair ».

Propriétés

Soit $\left(E, \mathscr{P}(E), p\right)$ un espace probabilisé et A et B deux événements de E.

- $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)$. • $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
- Si $A\cap B=\varnothing$ alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
- Si $A_1, A_2, ..., A_k$ sont des événements deux à deux incompatibles , alors $p(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k)=p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_k)$.

Exercice résolu 1

Un appareil, fabriqué en très grande série, peut présenter deux sortes de défauts désignés par D_1 et D_2.
Dans un lot de 1000 appareils, on constate que 60 appareils ont le défaut D_1, 50 appareils ont le défaut D_2 et 20 appareils ont les deux défauts.
Un client achète un appareil. (on admet que son achat a été fait au hasard).
Déterminer les probabilités des événements suivants.
A « L'appareil a les deux défauts »,
B « L'appareil a au moins un défaut »,
C « L'appareil n'a pas de défaut »,
D_1' « L'appareil a le défaut D_1 et n'a pas le défaut D_2 »,
D_2' « L'appareil a le défaut D_2 et n'a pas le défaut D_1 »,
D : « L'appareil a un seul défaut ».

Solution

On désigne par D_1 : « L'appareil a le défaut D_1 » et par D_2 :« L'appareil a le défaut D_2 ».
Il en résulte que $A=D_1\cap D_2$.
D'après les données, 20 appareils parmi 1000 ont les deux défauts D_1 et D_2.
On en déduit que $p(A)=\dfrac{20}{1000}=0.02$.
L'événement B est la réunion des événements D_1 et D_2.
On en déduit que $p(B)=p(D_1)+p(D_2)-p(D_1\cap D_2)=\dfrac{60}{1000}+\dfrac{50}{1000}-\dfrac{20}{1000}=0.09$.
L'événement C est l'événement contraire de B. Par suite, $p(C)=1-p(B)=0.91$.

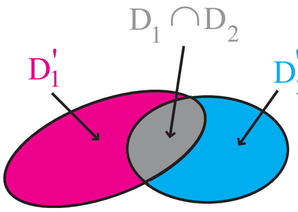
On vérifie facilement que $D_1 = D'_1 \cup (D_1 \cap D_2)$ et que D'_1 et $D_1 \cap D_2$ sont incompatibles.

Il en résulte que $p(D'_1) = p(D_1) - p(D_1 \cap D_2) = \frac{60}{1000} - \frac{20}{1000} = 0.04$.

De même $p(D'_2) = p(D_2) - p(D_1 \cap D_2) = 0.03$.

Il est clair que $D = D'_1 \cup D'_2$ et les événements D'_1 et D'_2 sont incompatibles.

On en déduit que $p(D) = p(D'_1 \cup D'_2) = 0.07$.



III. Equiprobabilité

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on jette un dé non pipé ou on effectue un tirage au hasard, les issues ont la même probabilité de réalisation, on dit qu'on est en présence d'une situation d'équiprobabilité.

Définition et théorème

Soit E l'univers d'une expérience aléatoire dans une situation d'équiprobabilité et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

L'application p définie de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$ par $p(a) = \frac{1}{\text{card}(E)}$, pour tout événement élémentaire a de E est une probabilité sur E, appelée probabilité uniforme.

Propriété

Si $(E, \mathscr{P}(E), p)$ est un espace probabilisé tel que la probabilité p est uniforme, alors $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$, pour tout événement A de E.

Exercice résolu 2

On jette deux dés équilibrés de couleurs rouge et verte et dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Déterminer l'univers E de l'expérience et donner son cardinal
2. Calculer la probabilité d'obtenir le même chiffre sur les deux dés.
3. Calculer la probabilité d'obtenir deux chiffres distincts.

Solution

1. Les dés sont discernables par leur couleur.
   On en déduit que $E = \{(i, j) \text{ tels que } 1 \le i \le 6 \text{ et } 1 \le j \le 6\}$ et $\text{card}(E) = 36$.
2. L'événement A « Obtenir le même chiffre sur les deux dés » est tel que
   $A = \{(i, i), 1 \le i \le 6\}$. Par suite, $\text{card}A = 6$ et $p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
3. La probabilité d'obtenir deux chiffres distincts est $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = \frac{5}{6}$.

Activité

Un code comporte deux lettres suivies de deux chiffres.

1. Dénombrer les codes possibles.
2. Un enfant compose un code au hasard. Calculer la probabilité d'obtenir,
   a. un code commençant par la lettre A,
   b. un code contenant les lettres A et Z,
   c. un code contenant le chiffre 0 deux fois,
   d. un code ne contenant pas de chiffre pair.

IV. Probabilité conditionnelle

Activité 1

Un enquêteur effectue un sondage auprès de familles ayant deux enfants et s'intéresse à la composition des enfants suivant le sexe (F ou G) et leurs âges.
On suppose que les naissances des filles et des garçons sont équiprobables.

1. Il choisit une famille au hasard.
   a. Déterminer les quatre éléments possibles de l'univers de cette expérience.
   b. Quelle est la probabilité que l'aîné des enfants soit une fille ?
   c. Quelle est la probabilité que cette famille ait deux filles ?
   d. Quelle est la probabilité que cette famille ait deux garçons ?
   e. Quelle est la probabilité que cette famille ait un garçon et une fille ?
2. Il sonne à la porte de la demeure de l'une de ces familles. Une fille vient ouvrir la porte.
   a. Quelle est alors la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?
   b. Quelle est alors la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

Théorème

Soit $\left(E, \mathscr{P}(E), p\right)$ un espace probabilisé et B un événement tel que $p(B) \neq 0$.

L'application p_B de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$, définie par $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, pour tout événement A, est une probabilité sur E.

Démonstration

L'égalité $E \cap B = B$ nous permet de déduire que $p_B(E) = \dfrac{p(E \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B)}{p(B)} = 1$.

De plus, $p_B(\varnothing) = \dfrac{p(\varnothing \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(\varnothing)}{p(B)} = 0$.

Si α_j est un élément de B alors $\{\alpha_j\} \cap B = \{\alpha_j\}$ et $p_B(\alpha_j) = \dfrac{p(\alpha_j)}{p(B)}$.

De plus si A est un événement de E tel que $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, on peut écrire $A \cap B = \{\alpha'_1\} \cup \{\alpha'_2\} \cup \dots \cup \{\alpha'_m\}$, où $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m$ sont les éléments qui appartiennent à A et à B. Par suite, $p(A \cap B)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires $\{\alpha'_1\}, \{\alpha'_2\}, \dots, \{\alpha'_m\}$.

On en déduit alors que $p_B(A) = \dfrac{p(\alpha'_1)}{p(B)} + \dfrac{p(\alpha'_2)}{p(B)} + \dots + \dfrac{p(\alpha'_m)}{p(B)}$.

Définition

Soit $\left(E, \mathscr{P}(E), p\right)$ un espace probabilisé et B un événement tel que $p(B) \neq 0$.

L'application p_B ainsi définie s'appelle probabilité B-conditionnelle.

Le réel $p_B(A)$ est noté $p(A/B)$ (on lit « probabilité de A, sachant B »).

Activité 2

Une urne contient quatre boules rouges numérotées $(1, 1, 2, 2)$ et deux boules vertes numérotées $(1, 2)$. Un joueur tire une boule.

On désigne par R l'événement « obtenir une boule rouge » et par D l'événement « obtenir une boule numérotée 2 ».

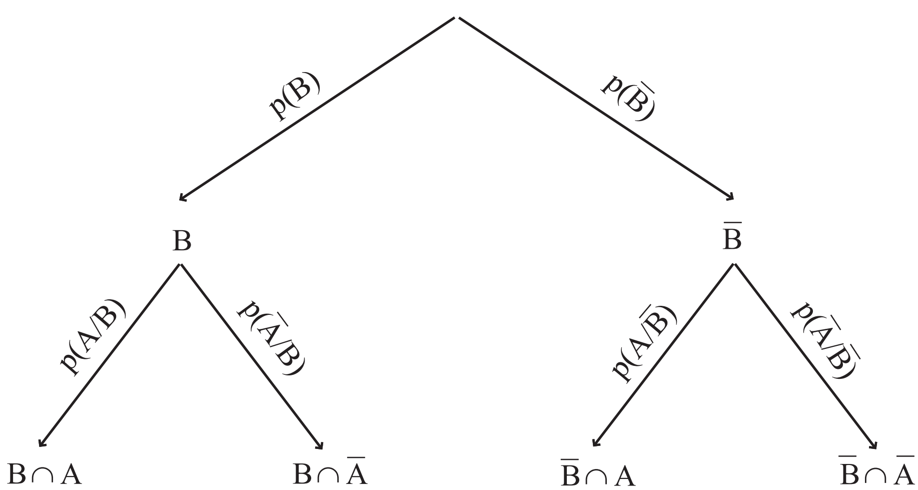
1. Quelle est la probabilité que le joueur tire une boule rouge ?
2. Le joueur a tiré une boule rouge.
   a. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 2 ?
   b. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 1 ?
3. Le joueur a tiré une boule verte.
   a. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 2 ?
   b. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 1 ?
4. a. Quelle est la probabilité que le joueur tire une boule rouge et numérotée 2 ?
   b. Quelle est la probabilité que le joueur tire une boule verte et numérotée 1 ?

Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de choix.

L'arbre de probabilité ci-dessous modélise la situation de conditionnement suivante.

On effectue une expérience (I) comportant deux issues contraires B et $\overline{B}$.

L'expérience (I) étant effectuée, on procède à une expérience (II) comportant deux issues contraires A et $\overline{A}$.



Exercice résolu 3

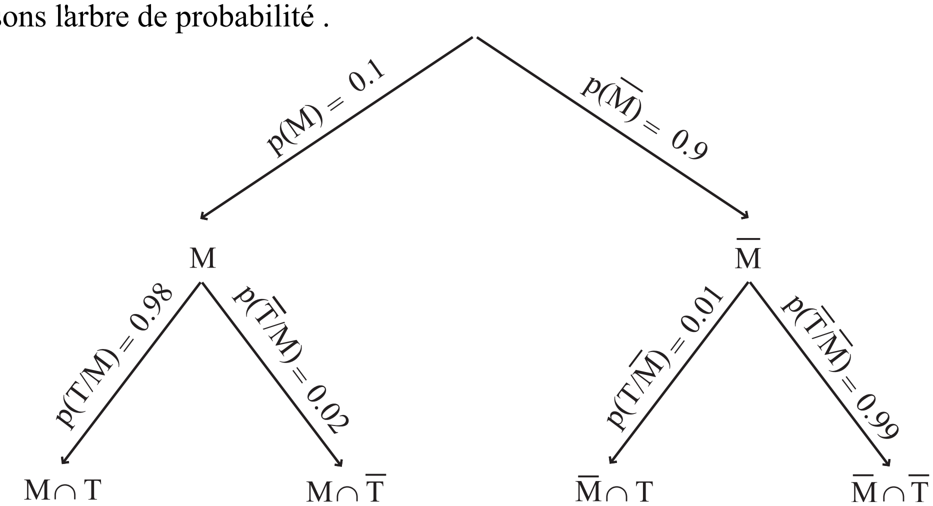
Un centre de santé se propose de dépister une maladie auprès d'une population de 1000 individus.
On dispose des données suivantes :
La proportion des personnes malades est de 10%.
Sur 100 personnes malades, 98 ont un test positif.
Sur 100 personnes non malades, une seule personne a un test positif.
On choisit une personne au hasard et on la soumet à un test de dépistage.
On note M « la personne est malade » et T « la personne a un test positif ».
1. Déterminer la probabilité qu'une personne malade ait un test positif.
ainsi que la probabilité qu'une personne malade ait un test négatif.
2. Déterminer la probabilité qu'une personne non malade ait un test négatif, ainsi que la probabilité qu'une personne non malade ait un test positif.
3. Déterminer, à l'aide d'un arbre, les probabilités des événements ci-dessous.
« La personne choisie est malade et a un test positif ».
« La personne choisie est malade et a un test négatif ».
« La personne choisie n'est pas malade et a un test positif ».
« La personne choisie n'est pas malade et a un test négatif ».
4. Déterminer les probabilités des événements ci-dessous.
« La personne choisie a un test positif ».
« La personne choisie est malade sachant qu'elle a un test négatif ».

Solution

1. On sait que sur 100 personnes malades, 98 ont un test positif et donc deux personnes ont un test négatif. Par suite, $p(T/M) = 0.98$ et $p(\overline{T}/M) = 0.02$

2. On sait que sur 100 personnes non malades, une seule a un test positif. C'est-à-dire que parmi 100 personnes non malades, 99 personnes ont un test négatif. Par suite,
$p(T/\overline{M}) = 0.01$ et $p(\overline{T}/\overline{M}) = 0.99$.

3. Dressons l'arbre de probabilité .



On déduit de l'arbre que

$p(T\cap M)=0.098$, $p(\overline{T}\cap M)=0.002$, $p(T\cap \overline{M})=0.009$, $p(\overline{T}\cap \overline{M})=0.891$.

4. On peut écrire $T=(T\cap M)\cup(T\cap \overline{M})$.

Les événements $(T\cap M)$ et $(T\cap \overline{M})$ étant incompatibles,

$p(T)=p(T\cap M)+p(T\cap \overline{M})=0.107$.

Il s'agit de déterminer la probabilité de l'événement M sachant que l'événement $\overline{T}$ est réalisé.

On sait que $p(M/\overline{T})=\dfrac{p(\overline{T}\cap M)}{1-p(T)}$. Il en résulte que $p(\overline{T}/M)=\dfrac{0.002}{0.893}=0.0022$.

Evénements indépendants

Activité 3

On jette un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère les événements.
A « Obtenir un numéro pair »,
B « Obtenir un multiple de 3 »,
C « Obtenir un multiple de 6 ».
Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, $A\cap B$ et $A\cap C$.

Définition

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$.
Dans le cas où $p(B)\neq 0$, la réalisation de B n'influence pas celle de A, c'est à dire $p(A/B)=p(A)$.

Activité 4

Une urne U_1 contient trois boules noires et six boules vertes.

Une urne U_2 contient deux boules noires et trois boules vertes.

On choisit une urne au hasard et on tire successivement deux boules, en remettant chaque fois la boule, dans l'urne choisie.
On considère les événements
A « obtenir une boule verte au premier tirage » et B « obtenir une boule verte au deuxième tirage ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Activité 5

Trois personnes A, B et C participent à un jeu télévisé. L'animateur dispose de deux cadeaux qu'il se propose d'offrir au hasard aux candidats, pour cela il leur fait un tirage au sort (un candidat pourra recevoir deux cadeaux).
On considère les événements A « la personne A ne reçit aucun cadeau » et
B « la personne B ne reçit aucun cadeau ».
1. Calculer les probabilités des événements A, B et $A\cap B$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Formule des probabilités totales

Activité 6

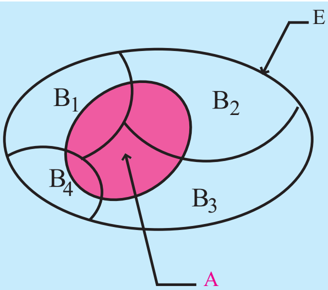
Dans une usine, le tiers de la production provient de la machine A, le quart provient de la machine B et le reste provient de la machine C. Les trois machines fabriquent des ampoules de types 1 et 2.
On a constaté que
Sur 1000 ampoules produites par la machine A, 2 seulement sont défectueuses,
sur 1000 ampoules produites par la machine B, 10 seulement sont défectueuses,
et sur 1000 ampoules produites par la machine C, 5 seulement sont défectueuses.
On choisit au hasard une ampoule emballée.
Déterminer à l'aide d'un arbre les probabilités des événements ci-dessous.
a. « L'ampoule est défectueuse».
b. « L'ampoule fonctionne ».
c. «L'ampoule provient de la machine A sachant qu'elle est défectueuse ».
d. «L'ampoule ne provient pas de la machine A sachant qu'elle fonctionne ».

Définition

Soit E un ensemble fini, les parties $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de E lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est E.

Théorème

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé,
$B_1, B_2, \dots, B_n$ des événements formant une partition de E tels que pour tout i, $p(B_i) \neq 0$.
Alors pour tout événement A,
$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i).p_{B_i}(A).$$



Démonstration

Les parties $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ forment une partition de A.

D'après l'additivité de la probabilité, $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i)$.

On déduit alors de la formule $p(A \cap B_i) = p(B_i).p_{B_i}(A)$, que $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i).p_{B_i}(A)$.

Exercice résolu 4

Une urne U_1 contient sept boules noires et trois boules vertes.
Une urne U_2 contient deux boules noires et huit boules vertes.
On effectue une suite de tirages en remettant à chaque fois la boule tirée dans lurne, suivant la règle suivante.

Si au $(n-1)^{ème}$ tirage , on a obtenu une boule noire alors le $n^{ème}$ tirage s'effectue dans U_1,

Si au $(n-1)^{ème}$ tirage , on a obtenu une boule verte alors le $n^{ème}$ tirage s'effectue dans U_2.

1. On choisit une urne au hasard et on fait le premier tirage.
   Déterminer la probabilité p_1 d'obtenir une boule noire.
2. On désigne par p_n la probabilté de tirer une boule noire au $n^{ème}$ tirage.
   a. Calculer p_2.
   b. Montrer que $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{5}$, $n \geq 2$.
3. a. Montrer que la suite (q_n) définie par $q_n = p_n - \frac{2}{5}$, $n \geq 1$ est une suite géométrique.
   b. Déterminer p_n en fonction de n en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

Solution

1. Notons

E_1 : « obtenir une boule noire au premier tirage »,

U_1 : « le premier tirage s'effectue dans U_1 »,

U_2 : « le premier tirage s'effectue dans U_2 ».

Remarquons que le choix de l'urne étant fait au hasard, $p(U_1) = p(U_2) = 0.5$

$E_1 = (E_1 \cap U_1) \cup (E_1 \cap U_2)$. Les événements $E_1 \cap U_1$ et $E_1 \cap U_2$ étant incompatibles, on obtient $p_1 = p(E_1 \cap U_1) + p(E_1 \cap U_2) = p(E_1 / U_1)p(U_1) + p(E_1 / U_2)p(U_2)$.

De plus, $p(E_1 / U_1) = \frac{7}{10}$ et $p(E_1 / U_2) = \frac{2}{10}$. Par suite, $p_1 = \frac{9}{20}$.

2. a. Notons E_2 : « obtenir une boule noire au deuxième tirage ».

On peut alors écrire $E_2 = (E_2 \cap E_1) \cup (E_2 \cap \overline{E_1})$. Les événements $E_2 \cap E_1$ et $E_2 \cap \overline{E_1}$ étant incompatibles, on en déduit que $p_2 = p(E_2 / E_1)p(E_1) + p(E_2 / \overline{E_1})p(\overline{E_1})$.

De plus, $p(E_2 / E_1) = \frac{7}{10}$, $p(E_2 / \overline{E_1}) = \frac{2}{10}$.

On en déduit que $p_2 = \frac{7}{10}p_1 + \frac{2}{10}(1 - p_1) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{5} = \frac{17}{40}$.

b. Notons E_n : « obtenir une boule noire au $n^{ème}$ tirage ».

On peut alors écrire $E_n = (E_n \cap E_{n-1}) \cup (E_n \cap \overline{E_{n-1}})$. Les événements $E_n \cap E_{n-1}$ et $E_n \cap \overline{E_{n-1}}$ étant incompatibles, on en déduit que

$p_n = p(E_n / E_{n-1})p(E_{n-1}) + p(E_n / \overline{E_{n-1}})p(\overline{E_{n-1}})$.

Les égalités $p(E_n / E_{n-1}) = \frac{7}{10}$, $p(E_n / \overline{E_{n-1}}) = \frac{2}{10}$ impliquent que $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

3. a. Un simple calcul montre que la suite (q_n) est une suite géométrique de raison 0.5 et de premier terme $q_1 = \dfrac{1}{20}$.

b. On déduit de la question 3. a, que $p_n = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{20}(0.5)^{n-1}$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{2}{5}$.

Activité 7

Le cycle d'un feu tricolore dure une minute : vert 25s, orange 5s et rouge 30s.

1. Quelle est la probabilité que le feu soit vert ? orange ? rouge ?
2. Un automobiliste arrive à 10 mètres d'un feu tricolore et aucun véhicule ne le précède. On suppose que l'automobiliste passe sans s'arrêter,
   au feu vert avec une probabilité de 99%,
   au feu orange avec une probabilité de 80%
   et au feu rouge avec une probabilité de 1%.
   Quelle est la probabilité que l'automobiliste passe sans s'arrêter ?

Activité 8

Une personne qui fait du sport un jour donné, fait du sport le lendemain avec la probabilité 0.4.
Si elle ne fait pas de sport ce jour là elle en fera le lendemain avec la probabilité 0.8.
Cette personne a fait du sport le lundi. Quelle est la probabilité quelle en fasse le jeudi ?

V. Variables aléatoires ou aléa numériques.

Activité 1

Une urne contient deux boules numérotées 4 et trois boules numérotées -2, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne.

1. a. Quelle est la probabilité de tirer deux boules numérotées 4 ?
   b. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant des numéros différents ?
   c. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant le même numéro ?
2. On note X l'application qui à tout événement élémentaire associe la somme des numéros des deux boules tirées. Quelles sont les différentes valeurs prises par X ?

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé.
On appelle aléa numérique ou variable aléatoire toute application $X : E \to \mathbb{R}$.

Notation

L'événement $\{\omega \in E ; X(\omega) = x_i\}$ est noté $(X = x_i)$.

L'ensemble $X(E)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par X.

Activité 2

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée trois fois de suite.

1. Déterminer l'ensemble de toutes les issues possibles.
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque événement élémentaire associe le nombre de côtés « face » obtenus.

a. Quelle est la probabilité de l'événement $(X=0)$?

b. Quelle est la probabilité de l'événement $(X=1)$?

c. Quelle est la probabilité de l'événement $(X=2)$?

d. Quelle est la probabilité de l'événement $(X=3)$?

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire.

On appelle loi de probabilité de X ou distribution de X, l'application

$$P_X : X(E) \to [0,1]$$
$$x_i \mapsto p(X = x_i).$$

Conséquences

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé. Si X est une variable aléatoire sur E telle que

$X(E)=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, alors $\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i) = 1$.

Démonstration

Les parties $(X=x_1)$, $(X=x_2)$,..., $(X=x_n)$, forment une partition de E.

On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i) = p(E) = 1$.

Activité 3

Une entreprise organise un concours pour recruter un cadre. Trois candidats se présentent.
Chacun d'eux passe un test et le premier qui y satisfait est engagé.
La probabilité qu'a un candidat de réussir le test est p.
On définit la variable aléatoire X de la manière suivante,
$X = j$ si le $j^{\text{ème}}$ candidat qui se présente est engagé et $X = 4$ si aucun candidat n'est engagé.
Déterminer la loi de X.

VI. Espérance et variance d'une variable aléatoire

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E telle que

$X(E)=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

On appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Activité 1

On lance un dé de six faces numérotées de 1 à 6 et on désigne par X l'aléa numérique qui à chaque lancer associe le numéro obtenu et par Y l'aléa qui à chaque lancer associe 1 si le numéro obtenu est pair et -1 si le numéro obtenu est impair.
Calculer $E(X)$, $E(-3X)$, $E(Y)$ et $E(X+Y)$.

Théorème

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires sur E. Alors

- Pour tout réel α, $E(\alpha X) = \alpha E(X)$.
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E.

On appelle variance de X le nombre $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$.

On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé.

Si X est une variable aléatoire sur E alors $V(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$.

Activité 2

Un marchand de glaces propose 5 parfums au choix.
Trois personnes choisissent, au hasard et indépendamment, un des parfums proposés.

1. a. Calculer la probabilité de l'événement « les trois personnes choisissent des parfums deux à deux différents ».
   b. Calculer la probabilité de l'événement « les trois personnes choisissent le même parfum ».
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque événement élémentaire associe le nombre de parfums choisis par les trois personnes.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

Activité 3

Une enveloppe contient les douze figures d'un jeu de carte, les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets.

1. On tire, simultanément et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer son espérance et son écart-type.
2. On tire, successivement et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe en remettant chaque fois la carte dans l'enveloppe.

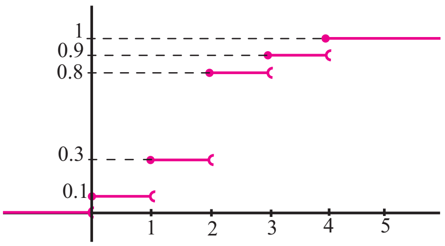
Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.
a. Déterminer la loi de probabilité de Y.
b. Calculer son espérance et son écart-type.
3. Comparer les résultats des questions 1.b et 2. b. Interpréter.

VII. Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Activité 1

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E.
On a représenté ci-contre la fonction

$$F:\ \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto p(X \le x).$$



où $(X \le x)$ désigne l'ensemble $\{a \in E ; X(a) \le x\}$.
Déterminer graphiquement
1. les valeurs prises par X,
2. $p(X \le -1)$, $p(X \le 1.3)$, $p\left(X \le \frac{11}{3}\right)$, $p(X \le 1)$, $p(X < 2)$, $p(X = 2)$, $p(1 \le X \le 6)$,
3. la loi de probabilité de X.

Activité 2

Une pièce de monnaie est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile est égale à 0.6.
On lance la pièce trois fois et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de piles obtenus.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. On considère l'application $F:\ \mathbb{R} \to [0,1]$

$$x \mapsto p(X \le x).$$

Déterminer l'expression de F et la représenter.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E.
On appelle fonction de répartition de X, l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ par $F: x \mapsto p(X \le x)$.

Activité 3

Trois urnes contiennent chacune des jetons numérotés de 1 à 6. On tire au hasard un jeton de chaque urne, et on note X la variable aléatoire associant à chaque tirage le plus grand des numéros tirés.
1. Soit k un entier inférieur ou égal à 6.
a. Dans chaque urne, quelle est la probabilité de tirer un numéro inférieur ou égal à k ?
b. En déduire $p(X \le k)$.

2. Déterminer la fonction de répartition de X et tracer sa courbe.
3. Déterminer la loi de probabilité de X.

VIII. Loi binomiale

Activité 1

La probabilité qu'un joueur de fléchettes atteigne sa cible est égale à 0.9.

1. On suppose que le joueur effectue deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès réalisés.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer la probabilité de l'événement « le joueur atteint au moins une fois sa cible ».
2. On suppose que le joueur effectue dix tirs et on note Y la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès réalisés.
   a. Calculer la probabilité des événements suivants
      « le joueur réalise neuf succès »
      « le joueur réalise au moins un succès »
   b. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Théorème et définition

Soit une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques, indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec.
Soit p la probabilité de l'événement succès.
On considère la variable aléatoire X associant à cette expérience le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves.
Alors la loi de probabilité de X est donnée par

$p(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0,\ 1, \ldots,\ n\}$.

On dit que X suit une loi binomiale de paramètre (n,p).

Notation

La loi binomiale de paramètre (n,p) est notée $B(n,p)$.

Lorsque $n=1$, on dit que X suit une loi de Bernoulli.

Activité 2

Un mobile se déplace sur un axe $(O,\ \vec{i})$.

A l'instant $t=0$, il est au point O, à chaque seconde, son abscisse augmente de 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou diminue de 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. A l'instant $t=2$
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit au point d'abscisse 2 ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il soit au point O ?
2. A l'instant $t=n$
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit au point d'abscisse n ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il soit au point d'abscisse $-n$?

Activité 3

On lance n fois $(n \geq 1)$ un dé. On note A l'événement « obtenir au moins un 6 ».

1. Calculer $p(A)$ pour $n = 3$.
2. Exprimer $p(A)$ en fonction de n.
3. Combien de fois au moins faut-il lancer le dé pour que la probabilité de A soit supérieure ou égale à 0.9 ?

Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire suivant à une loi binomiale B(n, p).
On a $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

B/ Exemples de lois continues

I. La loi uniforme

Activité 1

1. a. Soit l'intervalle $I = [-1, 1]$. Quelle est son amplitude ?

   b. Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{1}{2}$.

   Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

   c. Montrer que pour tout intervalle $[c, d]$ de $[-1, 1]$, $0 \leq \int_{c}^{d} f(x)dx \leq 1$.

2. Soit f une fonction constante sur un intervalle $[a, b]$.

   a. Quelle valeur doit-on donner à f pour que $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$?

   b. Montrer que dans ce cas que $0 \leq \int_{c}^{d} f(x)dx \leq 1$, pour tout intervalle $[c, d]$ de $[a, b]$.

Définition

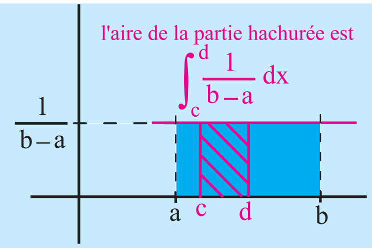
Soit un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). La fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$ est appelée densité de la loi de probabilité uniforme sur $[a, b]$.

On appelle probabilité uniforme sur $[a, b]$ l'application qui à tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[a, b]$ associe le réel $P([c, d]) = \int_{c}^{d} f(x)dx$.

Conséquences

Pour tout réel c de $[a,b]$, $P(\{c\}) = \int_c^c f(x)\,dx = 0$.

Si on désigne par $\overline{[c,d]}$ le complémentaire de $[c,d]$ dans $[a,b]$, alors $P\left(\overline{[c,d]}\right) = 1 - P([c,d])$.



Activité 2

Un joueur lance une fléchette sur une cible circulaire de rayon 30 cm.
Le joueur n'est pas expérimenté de sorte qu'il atteint aléatoirement la cible.
On désigne par d la distance entre le centre de la cible et le point d'impact.

1. Quelles sont les valeurs possibles de d ?
2. On partage l'intervalle $[0,30]$ en 10 intervalles de même amplitude.
   a. Quelle est l'amplitude de ces intervalles ?
   b. Le réel d a-t-il plus de chances d'appartenir à un intervalle plutôt qu'à un autre ?
   c. Quelle est selon vous la probabilité que d appartienne à l'intervalle $[0,30]$? $[4,5]$? $[9,10]$?

Dans l'activité précédente le réel d varie de façon aléatoire dans l'intervalle $[0,30]$, mais de façon équirépartie.
On dit alors que d est une variable aléatoire à valeurs dans $[0,30]$.

Définition

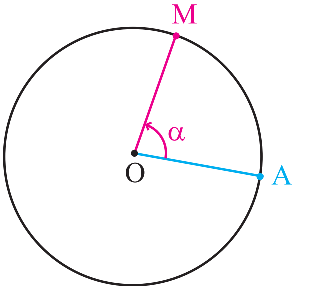
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle $[a,b]$ suit la loi de probabilité uniforme P si $P(c \le X \le d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

Activité 3

On considère un mobile M qui se déplace sur un cercle de centre O à partir d'un point A et qui s'arrête d'une manière aléatoire.
On mesure alors l'angle α que fait $[OA)$ avec $[OM)$.

Soit P la probabilité uniforme sur $[0,\ 2\pi]$.

Calculer $P\left(\frac{\pi}{4} \le X \le \pi\right)$, $P\left(\frac{\pi}{4} \le X \le \frac{\pi}{2}\right)$ et $P(0 \le X \le \pi)$.



Activité 4

On suppose que la durée (en minutes) du trajet qui sépare un employé de son travail est une variable aléatoire X à valeurs dans l' intervalle $[30,50]$ qui suit la loi de probabilité uniforme P.

1. Calculer $P(30 \le X \le 40)$ et $P(30 \le X \le 43)$.
2. On considère l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 30 \\ P(30 \le X \le x) & \text{si } x \in [30,50] \\ 1 & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

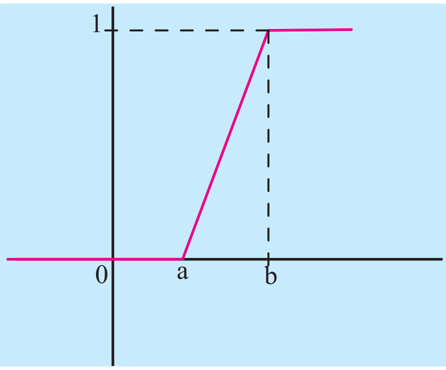
Déterminer l'expression de F et la représenter.

Définition

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme P sur l'intervalle $[a,b]$.

On appelle fonction de répartition de X, l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ P(a \le X \le x) & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$



II. La loi exponentielle

Activité 1

1. Soit λ un réel strictement positif et f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

   a. Calculer $\int_0^x f(t)\,dt$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt$.

   b. Montrer que pour tout intervalle $[c,d]$ de $[0,+\infty[$, $0 \le \int_c^d f(x)\,dx \le 1$.

Définition

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application P qui

- à tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $P([c, d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.
- à tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $P([c,+\infty[) = e^{-\lambda c}$.

Conséquences

1. Pour tout réel $c > 0$, $P(\{c\}) = \int_c^c f(x)dx = 0$.

2. Pour tout réel $c > 0$, $P([0,c]) = \int_0^c f(x)dx = 1 - e^{-\lambda c}$.

3. $P([c,+\infty[) = 1 - P([0,c])$.

Activité 2

On s'intéresse à la durée de vie t (en semaines) d'un appareil électronique.
On suppose que la probabilité que l'appareil soit encore fonctionnel au bout d'un temps t est une loi de probabilité exponentielle de paramètre 0.5.
Quelle est la probabilité que la durée de vie soit entre 100 et 200 semaines ?
Dans l'activité précédente le réel t varie de faşon aléatoire mais se lon une loi appelée loi exponentielle. On dit alors que t est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0.5.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ,
si $P(c \le X \le d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ et $P(X \ge c) = e^{-\lambda c}$.

Activité 3

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer λ sachant que $P(X \ge 10) = 0.5$.

2. Déterminer alors $P(0 \le X \le 10)$, $P(100 \le X \le 300)$ et $P(X \ge 300)$.

3. On considère l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ P(0 \le X \le x) & \text{si } x \in [0,+\infty[. \end{cases}$$

a. Déterminer l'expression de F.

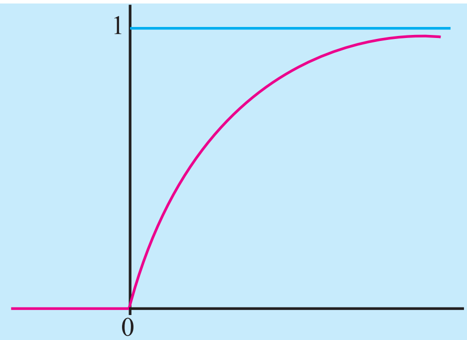
b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

c. Représenter F.

Définition

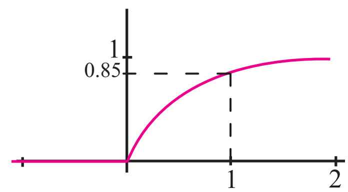
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle P de paramètre λ.
On appelle fonction de répartition de X, l'application $F: \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ P(0 \leq X \leq x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$



Activité 4

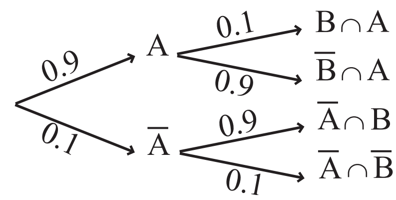
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle P de paramètre λ.
Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction de répartition de X.



1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre λ.
2. Calculer $p(X \geq 2)$.

QCM

Cocher la réponse exacte.



1. On représente une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité ci-contre.
   a. La probabilité de B sachant A est égale à
   ☐ 0.9. ☐ 0.1. ☐ 0.09.

b. La probabilité de l'événement $\overline{A} \cap \overline{B}$ est égale à
☐ 0.01. ☐ 0.1. ☐ 0.2.

c. La probabilité de l'événement A sachant B est égale à
☐ 0.09. ☐ 0.5. ☐ 0.9.

2. Si X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0.1 alors l'arrondi au centième de $p(X > 10)$ est
☐ 0.63. ☐ 0.37. ☐ 0.91.

3. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{3}$.
   La probabilité de l'événement $X > 2$ est
☐ $\left(\frac{1}{3}\right)^3$. ☐ $\left(\frac{2}{3}\right)^3$. ☐ $C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si deux événements A et B sont indépendants alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
2. Si $A \cup B$ est l'événement certain alors pour tout événement C,
$p(C) = p(A \cap C) + p(B \cap C)$.
3. Dans une expérience aléatoire, la probabilité d'un événement A est égale à 0.2.
   On répète huit fois cette expérience de façon indépendante.
   La probabilité que l'événement A se réalise au moins une fois est égale à $1 - (0.8)^8$.
4. Les situations de tirages sans remise obéissent à une loi binomiale.
5. La probabilité de choisir au hasard un réel entre 0 et 0.0000001 est égale à 0.

1 Dans une urne, une boule est numérotée 1, deux boules sont numérotées 2, trois boules sont numérotées 3, quatre boules sont numérotées 4,... et enfin neuf boules sont numérotées 9.

1. Combien y a-t-il de boules dans l'urne ?
2. On tire deux boules simultanément et au hasard.
a. Quelle est la probabilité que les deux numéros soient pairs ?
b. Quelle est la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit supérieure ou égale à 3 ?
c. Quelle est la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit inférieure ou égale à 15 ?
3. On tire quatre boules successivement, sans les remettre dans l'urne, et on les aligne dans l'ordre où on les a tirées.
La probabilité d'obtenir 1983 est-elle la même que celle d'obtenir 1389 ?
4. On tire quatre boules successivement, en les remettant dans l'urne, et on les aligne dans l'ordre où on les a tirées.
La probabilité d'obtenir 1983 est-elle la même que celle d'obtenir 1389 ?

2 Un élève effectue un sondage dans sa classe (qui comprend 40 élèves). Les 40 élèves ont répondu par oui ou par non au trois questions « Aimez-vous les mathématiques ? », « Aimez-vous la philosophie ? » et « Aimez vous le sport ? ».
La première question a obtenu 31 « oui », la deuxième question, un « oui » et la troisième question, 9 « oui ».
Un supplément d'enquête a donné les résultats suivants.
1 élève aime seulement la philosophie,
3 élèves aiment seulement le sport,
25 élèves aiment seulement les mathématiques.
Quelle est la probabilité qu'un élève interrogé au hasard,
1. Aime à la fois les trois matières ?
2. Aime les mathématiques et n'aime pas le sport ?
3. N'aime pas la philosophie et les mathématiques ?
4. N'aime aucune matière ?
5. Aime au moins une matière ?

3 Le programme d'une épreuve d'examen comporte 100 questions. Un candidat n'en étudie que 80. lors d'un examen, le candidat tire au sort trois questions, quelle est la probabilité qu'il ait étudié,
1. les trois questions proposées,
2. deux questions seulement,
3. une seule question,
4. aucune des trois,
5. au moins une des trois.

4 Lors d'un concours la première épreuve est une épreuve de mathématiques, la deuxième épreuve est une épreuve de sciences physiques.
Un élève a 80% de chance de réussir la première épreuve, s'il réussit la première épreuve il aura 75% de chance de réussir la deuxième épreuve,
et s'il ne réussit pas la première épreuve il aura 40% de chance de réussir la deuxième épreuve.
On désigne par M l'événement « l'élève réussit la première épreuve » et par S l'événement « l'élève réussit la deuxième épreuve ».
Déterminer $p(M)$, $p(S/M)$, $p(S/\overline{M})$ et $p(S)$.

5 Le personnel d'une grande entreprise est réparti en trois catégories, les ingénieurs, les techniciens et le personnel administratif.
10% des employés sont des ingénieurs et 80 % sont des techniciens.
80% des employés sont des femmes, 60% des ingénieurs sont des hommes et 90% des techniciens sont des femmes.
On intérroge un employé au hasard.
1. a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme ingénieur ?
b. Quelle est la probabilité d'interroger un homme technicien ?
c. Quelle est la probabilité d'interroger une femme du personnel administratif ?
2. On sait que l'employé interrogé est une femme.
a. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit technicienne ?
b. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit ingénieur ?
3. On sait que l'employé interrogé est un ingénieur.
a. Quelle est alors la probabilité que ce soit une femme ?
b. Quelle est alors la probabilité que ce soit un homme ?

6 Un magasin vend deux types de téléphones portables : des modèles de marque A et des modèles de marque B.

Le magasin propose deux types d'abonnement : un abonnement de type I et un abonnement de type II.
Le service marketing effectue une enquête sur un échantillon de 2000 clients ayant acheté chez ce magasin un seul téléphone et choisi un seul abonnement.
Sur les 2000 clients, 1200 ont acheté le modèle A.
Sur les 2000 clients, 960 ont choisi l'abonnement I.
On note S l'événement « avoir acheté le modèle A » et C «avoir choisi l'abonnement I »
Un client est choisi au hasard dans l'échantillon.
1. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté le modèle A ?
2. Parmi les clients qui ont acheté le modèle A , 32% ont choisi l'abonnement I.
a. Quelle est la probabilité que le client ait acheté le modèle A et choisi l'abonnement I ?
b. Quelle est la probabilité que le client ait acheté le modèle B et choisi l'abonnement II ?

7 Une urne contient huit jetons :

- trois noirs portant tous le numéro 1,
- trois noirs portant tous le numéro 2,
- un vert portant le numéro 1,
- un vert portant le numéro 2.

Une épreuve consiste à extraire au hasard deux jetons selon une procédure déterminée par le lancer d'une pièce truquée.
Si l'on obtient pile, on extrait deux jetons simultanément.
Si l'on obtient face, on extrait les deux jetons successivement sans remise.
Lors du lancer de la pièce, la probabilité d'obtenir pile est égale à $\frac{7}{15}$.
On note P l'événement « obtenir pile », F l'événement « obtenir face », A « les deux jetons portent le même numéro ou ont la même couleur »,
B « les deux jetons portent le même numéro et ont la même couleur »,
C « les deux jetons tirés ont la même couleur »,
D « les deux jetons tirés portent le même numéro ».
1. Déterminer les probabilités $p(C/P)$, $p(D/P)$, $p(B/P)$ et $p(A/P)$.
2. Déterminer $p(A/F)$ et en déduire $p(A)$.

8 Deux joueurs X et Y s'entraînent au tir à la cible.

Le joueur X est expérimenté et atteint sa cible 9 fois sur 10 et le joueur Y est débutant et atteint sa cible 4 fois sur 10.
X laisse Y s'entraîner et n'effectue qu'un tir sur trois.
Un des joueurs tire et la cible est atteinte.
Quelle est la probabilité que ce soit Y ?

9 Un joueur est en présence de deux urnes A et B.

Dans l'urne A, il y a trois boules blanches et cinq boules rouges.
Dans l'urne B, il y a sept boules blanches et cinq boules rouges.
Le joueur dispose de deux dés non pipés et de couleurs différentes qu'il lance une fois.
Si le total des points obtenus est inférieur ou égal à 7, il choisit l'urne A.
Si le total des points obtenus est strictement supérieur à 7, il choisit l'urne B.
Il tire alors dans l'urne choisie successivement quatre boules sans remise.
1. Calculer la probabilité qu'il obtienne 2 boules blanches et 2 boules rouges.
2. Calculer la probabilité qu'il n'obtienne que des boules rouges.
3. Le joueur n'obtient que des boules rouges. Quelle est la probabilité p que ce soit l'urne B qui ait été choisie ?

10 Deux amis se rendent indépendamment l'un de l'autre sur un lieu de vacances.

Les jours d'arrivée possibles pour chacun des deux amis sont numérotés de 1 à 8.
Les deux amis choisissent chacun leur jour d'arrivée au hasard, il reste alors trois jours dans ce lieu à attendre l'autre, puis repart.
Leurs séjours possibles se situent au cours de la période comportant les journées numérotées de 1 à 10.
1. Calculer la probabilité que les deux amis arrivent le même jour.
2. Calculer la probabilité que les deux amis arrivent avec un jour d'écart.
3. Calculer la probabilité que les deux amis puissent se rencontrer.
4. On sait que les deux amis se sont rencontrés. Quelle est la probabilité qu'ils aient pu passer ensemble au moins deux jours ?

11 Un individu essayant de réduire sa consommation de cigarettes, applique les conditions suivantes

C_1 : s'il reste un jour sans fumer alors la probabilité pour qu'il fume le lendemain est de 0.2

C_2 : par contre s'il cède et fume un jour alors la probabilité qu'il fume le lendemain est égale 0.7.
On note F_n l'événement « l'individu fume le $n^{\text{ème}}$ jour » et p_n la probabilité de l'événement F_n.
1. A l'aide d'un arbre de choix, déterminer les probabilités des événements
$\left(F_{n+1}/F_n\right)$, $\left(\overline{F_{n+1}}/F_n\right)$, $\left(F_{n+1}/\overline{F_n}\right)$ et $\left(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}\right)$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,
$p_{n+1} = 0.5\, p_n + 0.2$
3. Soit (a_n) la suite définie par
$a_n = p_n - 0.4$, $n \geq 1$.
a. Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et la limite.
b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter.

12 Des personnes P_1, P_2,..., P_n,... se transmettent une information dans cet ordre. Chaque personne transmet l'information de manière fidèle avec une probabilité égale à 0.9 ou la change en son contraire avec une probabilité égale à 0.1.
On suppose que la première personne possède l'information non déformée.
Pour tout $n \geq 1$, on note A_n l'événement « la $n^{\text{ème}}$ personne possède l'information non déformée » et p_n sa probabilité.
1. Calculer p_1 et p_2.
2. Utiliser un arbre pour calculer p_3.
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0.8p_n + 0.1$
4. a. Soit (q_n) la suite définie par $q_n = p_n - \frac{1}{2}$, $n \geq 1$.
Montrer que (q_n) est une suite géométrique.
b. Exprimer alors p_n en fonction de n.
5. Quelle est la probabilité que la $20^{\text{ème}}$ personne possède l'information non déformée ?
6. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

13 Un dé cubique a trois faces portant le numéro 1, deux faces portant le numéro 2 et une face portant le numéro 3.
On lance le dé deux fois et on désigne par X la variable aléatoire qui donne la somme des nombres obtenus.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer la fonction de répartition F de X et tracer sa courbe.

14 Un sac contient 10 jetons dont quatre sont rouges et six sont blancs.
On extrait les jetons un à un sans remise.
Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier jeton rouge.
Trouver la loi de X, son espérance et sa variance.

15 On lance deux dés identiques bien équilibrés.
On note X la variable aléatoire égale au plus grand des nombres obtenus et Y la variable aléatoire égale au plus petit des nombres obtenus.
1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Calculer l'espérance de X et celle de Y, ainsi que leurs variances.

16 On jette 20 fois une pièce de monnaie.
1. Déterminer le nombre moyen de faces obtenus.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces égal à 10.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 9 et 11.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 8 et 12.
5. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 7 et 13.

17 Dans une production d'ampoules, la probabilité qu'une ampoule soit défectueuse est égale à 0.1.
Dans un lot de 400 ampoules, déterminer la moyenne et l'écart type de la distribution des pièces défectueuses.

18 On dispose de trois tétraèdres parfaitement équilibrés.
Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance simultanément les trois tétraèdres.
1. Quelle est la probabilité qu'aucune face rouge ne soit visible ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucune face bleue ne soit visible ?
3. Soit A l'événement « les six faces rouges sont visibles.» Calculer $p(A)$.
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.

Calculer la probabilité p_n que l'événement A soit réalisé une et une seule fois.

19 1. On lance 2 dés non pipés. On désigne par A_2 « le total des numéros amenés est pair ».
Calculer $p(A_2)$.
2. On lance 3 dés non pipés.
On désigne par A_3 « le total des numéros amenés est pair ».
Calculer $p(A_3)$.
3. On lance n dés non pipés.
On désigne par A_n « le total des numéros amenés est pair ».
Montrer par récurrence sur n que la suite $(p(A_n))$ est constante.

20 Un gène peut avoir deux états A « allèle dominant » ou a « allèle récessif ».
Un individu peut avoir l'un des trois génotypes suivants : « AA », « Aa » ou « aa ».
Un enfant récupère un allèle de chacun de ses deux parents.
1. On suppose que l'un des parents a le génotype « AA » et l'autre « Aa ».
a. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « AA » ?
b. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « Aa » ?
2. On suppose que les deux parents sont de génotype « Aa ».
a. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « AA » ?
b. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « Aa » ?
c. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « aa » ?
3. On note p_n, q_n et r_n les probabilités respectives qu'un individu de la $n^{ème}$ génération soit de type « AA », « Aa » ou « aa ».
A l'aide d'un arbre, montrer que

a. $p_{n+1} = \left(p_n + \dfrac{q_n}{2}\right)^2$.

b. $r_{n+1} = \left(\dfrac{q_n}{2} + r_n\right)^2$.

c. $q_{n+1} = 1 - \left(p_n + \dfrac{q_n}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{q_n}{2} + r_n\right)^2$.

4. On note $\alpha = p_0 - r_0$.
a. Montrer que pour tout n, $p_n - r_n = \alpha$.
b. Montrer que pour tout n, $2r_n + q_n = 1 - \alpha$.
5. En déduire que les suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont constantes.

21 Dans une foire une publicité annonce « Un billet sur deux est gagnant, achetez deux billets »
Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant.
1. Un jour , cent billets sont mis en vente. Un promeneur en achète deux.
Calculer la probabilité qu'il ait au moins un billet gagnant.
2. Un autre jour, 2n billets sont mis en vente. Un promeneur en achète deux.
Soit p_n la probabilité qu'il ait au moins un billet gagnant.
a. Montrer que $p_n = \dfrac{3n-1}{4n-2}$.
b. Calculer p_1 et expliquer le résultat.
c. Montrer que pour tout entier n non nul,
$\dfrac{3}{4} \le p_n \le 1$.
3. Tous les jours, 2n billets sont mis en vente.
Un promeneur revient chaque jour, pendant 3 jours, acheter deux billets.
a. Quelle est la probabilité q_n, qu'il obtienne au cours des ces 3 jours au moins un billet gagnant ?
b. Etudier la limite de la suite (q_n).

22 Dans une loterie, on suppose que chaque billet a une chance sur 100 d'être gagnant.
1. On suppose qu'on achète n billets et on note A l'événement « avoir au moins un billet gagnant ».
Exprimer en fonction de n la probabilité de l'événement A.
2. Combien de billets faut-il acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieur à 0.5 ?

23 Un sac contient n boules rouges et 2n boules noires indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'être tirée. On tire simultanément trois boules du sac.

1. Quelle est la probabilité p_n pour que parmi ces trois boules, il y ait une seule rouge ?
En déduire que (p_n) possède une limité finie que l'on notera p.
2. Quelle est la probabilité q_n pour que parmi ces trois boules, il y ait au moins une Rouge ? En déduire que (q_n) possède une limité finie que l'on notera q.
3. On effectue trois tirages successifs d'une seule boule en remettant la boule tirée dans le sac avant d'effectuer le tirage suivant.
a. Montrer que la probabilité d'obtenir une seule boule rouge est égale à p.
b. Montrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est égale à q.

24 Un lot de n pièces contient une pièce défectueuse.

1. Une machine les teste une par une, jusqu'à détecter la pièce défectueuse.
Elle effectue le $n^{\text{ème}}$ test, dans le cas où il ne reste que la pièce défectueuse.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués.
a. Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul test ?
b. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux tests ?
c. Déterminer la loi de probabilité de X.
d. Calculer l'espérance et la variance de X.
(On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).
2. Dans cette question, on suppose que les tests sont effectués par un homme et que s'il ne reste que deux pièces, celui-ci ne fait alors qu'un test supplémentaire.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués.
a. Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul test ?
b. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement $n-1$ tests ?
c. Déterminer la loi de probabilité de Y.
d. Calculer l'espérance et la variance de Y.

25 Un joueur joue à pile ou face avec la règle suivante :
Il gagne dès que le nombre de fois où pile apparaît dépasse de deux le nombre de fois où face apparaît.
Il perd dès que le nombre de fois où face apparaît dépasse de deux le nombre de fois où pile apparaît.
On suppose que la pièce utilisée par le joueur est truquée de sorte qu'elle amène pile avec la probabilité $\frac{5}{12}$ et face avec la probabilité $\frac{7}{12}$.

1. Montrer que le joueur doit jouer un nombre pair de lancers pour gagner.
2. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 2 lancers.
3. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 4 lancers.
4. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de n lancers.
5. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 20 lancers.

26 On choisit un nombre x au hasard dans l'intervalle $[0,1]$.

1. Quelle est la probabilité que x soit égal à 0.1 ? 0.0005 ? 0.99999 ?
2. Quelle est la probabilité que x appartienne à l'intervalle $[0.5,1]$?
3. Quelle est la probabilité que x appartienne à l'intervalle $[0.001,\ 0.002]$?
4. Quelle est la probabilité que x soit plus petit que 0.99999 ?
5. Quelle est la probabilité que x soit plus gand que 0.99999 ?

27 Dans la journée, un bus passe toutes les 20 minutes à une station.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0, 20]$.

1. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 2 et 5 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 10 et 13 minutes ?
3. Quelle est la probabilité que cette personne attende exactement 3 minutes ?
4. Quelle est la probabilité que cette personne attende moins de 3 minutes ?

5. Quelle est la probabilité que cette personne attende plus de 3 minutes ?

28 On suppose que la durée de vie X, exprimée en années d'une machine suit une loi exponentielle de paramètre 0.2.

1. a. Calculer la probabilité que $X = 10$.
   b. Calculer la probabilité que $X \leq 10$.
   c. Calculer la probabilité que $X \geq 10$.
2. Déterminer le réel c tel que $P(X \leq c) = P(X \geq c)$.

29 La durée de vie exprimée en années, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne suit une loi exponentielle de paramètre 0.0005.

1. Calculer la probabilité qu'un robot ait une durée de vie comprise entre 5 et 8 ans.
2. Calculer la probabilité qu'un robot dépasse 5 ans de durée de vie.
3. Calculer la probabilité qu'un robot dépasse 8 ans de durée de vie.

30 Une machine fabrique des cylindres. On mesure l'écart X, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre 1.5.

1. Calculer à 10^{-3} prés, $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 2)$ et $P(1 \leq X \leq 2)$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté.
Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas.
Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

2. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
a. Quelle est la probabilité qu'il soit accepté ?
b. On sait qu'il est accepté, quelle est alors la probabilité qu'il ait subit une rectification ?

31 La durée de vie d'une machine, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer λ à 10^{-1} prés, pour que $P(X > 6) = 0.3$.

Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0.2$.

2. A quel instant t, à un mois prés, la probabilité qu'une machine tombe en panne pour la première fois est-elle de 0.5 ?
3. Calculer la probabilité qu'une machine n'ait pas de panne au cours des deux premières années de sa vie.
4. On considère un lot de cinq machines fonctionnant de manière indépendante.
Déterminer la probabilité que dans ce lot, il ait au moins une machine qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Chapitre 10

Statistiques

Huygens (1669) : Espérance de vie.

"Par les observations faites à Londres avec beaucoup d'exactitude.
De 100 personnes conçues, il en meurt […].
Donc, de 100 personnes, ceux qui atteignent l'âge de 6 ans sont 64, de 16 ans sont 40, de 26 ans sont 25, de 36 ans sont 16, de 46 ans sont 10, de 56 ans sont 6, de 66 ans sont 3, de 76 ans est 1 et de 86 ans est 0.
Qui gagerait qu'un enfant conçu virait jusqu'à 6 ans, peut mettre 64 contre 36 ou 16 contre 9. Et qui gagerait […].
De 100 enfants conçus, il en meurt 36 avant l'age de 6 ans, lesquels on peut dire ont vécu l'un portant l'autre 3 ans.
Des 64 restants, il en meurt 24 avant l'âge de 16 ans […]."
Une correspondance de Huygens sur la statistique démographique.
Huygens aboutit au total 1822 en multipliant 36 par 3, 24 par 11, jusqu'à 1 par 81 et en ajoutant tous les produits ainsi obtenus puis calcul le quotient de 1822 par 100 et déclare :" Et le quotient qui est ici 18 ans et environ 2 mois et demi, ce n'est pas à dire qu'il soit apparent qu'il vivra si longtemps, car il est beaucoup plus apparent qu'il mourra avant ces termes."

(J Dhombres et al,
Mathématiques au fil des âges,
1987).

Chapitre 10

Statistiques

Il arrive que l'on soit amené à effectuer deux séries de mesure X et Y sur un même échantillon composé de n individus et que l'on s'interroge sur les relations possibles entre ces mesures.

On dit alors que l'on a une série statistique double (X, Y).

I. Distributions marginales

Activité 1

On a relevé dans le tableau ci-dessous, l'intensité de travail X (en kilojoules par minute) et la fréquence cardiaque Y de 100 personnes.

Y \ X	9.6	12.8	18.4	31.2	36.8	47.2	49.6	56.8	Total
70	4	2							6
86	3	5	6	4	1			2	21
90	2	5	12	3	4	1	1		28
104		1	$\boxed{12}$	14	8	5	3	2	45
Total	9	13	30	21	13	6	4	4	100

1. a. Quelle est la signification du nombre 12 encadré dans le tableau ?
   b. Quelle est le nombre d'individus dont la fréquence cardiaque est supérieure à 100 ?
   c. Quelle est le nombre d'individus qui ont fourni un travail d'intensité supérieure à 49 ?
   d. Quelle est le nombre d'individus qui ont fourni un travail d'intensité supérieure à 49 et ayant une fréquence cardiaque supérieure à 100 ?
2. Déterminer la distribution marginale de X, puis calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X.
3. Déterminer la distribution marginale de Y, puis calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y.

Activité 2

On a recueilli dans le tableau ci-contre la distance parcourue avant la première grande panne et la puissance en chevaux de 20 voitures.

1. a. Quelle sont les valeurs prises par Y ?

   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y .

2. Compléter le tableau suivant donnant la répartition des 20 voitures suivant la distance parcourue.

X (distance parcourue en mille km)	Effectifs
Moins de 50	
$[50,60[$	
$[60,70[$	
70 et plus	

3. Déterminer le pourcentage des voitures ayant parcouru une distance inférieure à 60000 km et qui ont une puissance supérieure ou égale à 6 chevaux.

(X) Distance parcourue en mille km	(Y) Puissance en chevaux
42	4
55	5
57	6
81	6
64	4
70	7
75	6
58	5
61	4
65	5
48	4
58	4
65	4
72	6
75	4
80	7
65	7
73	5
43	6
61	5

Définitions

Soit (X,Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n et soit $(x_i,y_i)_{1\leq i\leq n}$ les valeurs numériques prises respectivement par les variables X et Y.

La distribution marginale de la variable X est la distribution des valeurs $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ prises par la variable X .

La distribution marginale de la variable Y est la distribution des valeurs $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ prises par la variable Y .

Soit X une série statistique sur un échantillon de taille n.

Si $\overline{X}$, $V(X)$ et σ_X désignent respectivement la moyenne, la variance et l'écart-type de la série, alors $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i x_i$, $V(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p}n_i\left(x_i-\overline{X}\right)^2$, $\sigma_X=\sqrt{V(X)}$, où les valeurs x_1, x_2,..., x_p désignent les valeurs distinctes prise par la variable X si elle est discrète, ou les centres des classes si la variable X est continue. L'entier n_i désigne l'effectif de la valeur x_i .

Activité 3

Dans le tableau suivant, on a reproduit les effectifs d'individus d'un échantillon selon leur poids X (en kg)et leur taille Y(en cm).

Y \ X	$[40,45[$	$[45,50[$	$[50,55[$	$[55,60[$	Effectif selon la taille	Fréquence selon la taille
$[120,155[$	20	9	1	0	30	0.30
$[155,160[$	2	18	4	1	25	0.25
$[160,165[$	0	5	12	6	23	0.23
$[165,170[$	0	1	7	14	22	0.22
Effectif selon le poids	22	33	24	21	100	1
Fréquence selon le poids	0.22	0.23	0.24	0.21	1	

1. Déterminer la distribution marginale de X et celle de Y.
2. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.
3. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

II. Covariance d'une série statistique double

II. 1 Cas d'un échantillon simple

Activité 1

Dans le tableau ci-dessous, on a relevé les exportations (en million de dinars) et les importations (en million de dinars) mensuelles de la Tunisie pour l'année 2006.

Mois	exportations (X)	importations (Y)
Janvier	1081.1	1312.1
Février	1225.6	1367.6
Mars	1378.6	1641.6
Avril	1193.7	1613.1
Mai	1205.8	1827.3
Juin	1374.6	1705.8
Juillet	1283.8	1713.4
Août	1157.8	1494.1
Septembre	1349.4	1859.8
Octobre	1230.1	1668.1
Novembre	1488.5	1902.6
Décembre	1347.3	1660.6

1. Déterminer la taille de l'échantillon étudié.
2. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.

   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.
3. Calculer $\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$.

Définition

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n.

On appelle covariance de (X, Y) le réel, noté $\operatorname{cov}(X, Y)$ défini par

$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$, où (x_i, y_i) est la valeur observée pour l'individu i si X et Y sont discrètes, ou le centre de la classe si l'une des variables est continue.

Il découle de la définition que $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$.

Interprétation de la covariance

La covariance mesure la tendance qu'ont les variables X et Y à varier ensemble.
La covariance est positive si X et Y ont tendance à varier dans le même sens.
La covariance est négative si X et Y ont tendance à varier en sens contraire.

Activité 2

On a relevé dans le tableau suivant le nombre de logements (en milliers) et le nombre de logements modernes (villa, appartement) durant quelque années.

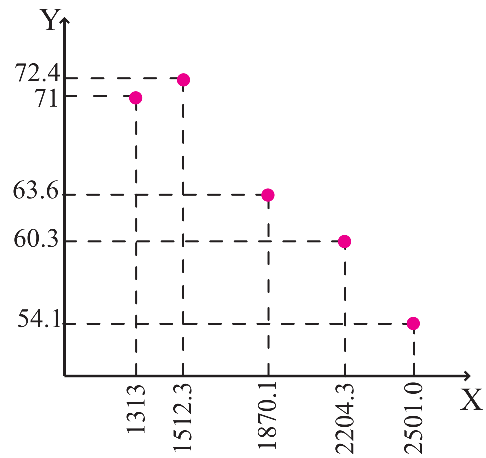
Année	1984	1989	1994	1999	2004
X : Nombre de logements (en milliers)	1313.1	1512.3	1870.1	2204.3	2501.0
Y : Nombre de logements modernes(en milliers)	265.2	343.3	630.2	848.7	1128.0

1. Représenter le nuage de points de la série (X, Y).
2. a. Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

   b. Calculer $\operatorname{cov}(X, Y)$. Interpréter le résultat.

Activité 3

Dans le graphique ci-contre, on a représenté les points $M(X,Y)$, où X désigne le nombre de logements (en milliers) et Y le pourcentage des logements traditionnels pour la même année.
Quel est le signe de $cov(X,Y)$?



II. 2 Cas d'un échantillon groupé

Définition

Soit (X,Y) une série statistique double de taille n.

Soit n_{ij} le nombre de fois qu'apparaît le couple (x_i,y_j).

Alors $cov(X,Y)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p}n_{ij}x_iy_j-\overline{X}\overline{Y}$.

Exercice résolu

Le tableau ci-dessous donne le poids Y (en kg) de 63 nouveaux-nés ainsi que le poids maternel X.

Y \ X	$]40,50]$	$]50,60]$	$]60,70]$	$]70,80]$	Total
$]1.5,2.5]$	1	0	1	0	2
$]2.5,3.5]$	11	17	13	2	43
$]3.5,4.5]$	4	4	8	2	18
Total	16	21	22	4	63

1. Calculer $\overline{X}$ et σ_X, ainsi que $\overline{Y}$ et σ_Y.
2. Déterminer la covariance de X et Y. Interpréter.

Solution

1. • Etude de la variable X

x_i (centres des classes de la variable X)	45	55	65	75	
n_i	16	21	22	4	$\sum_{i=1}^{4} n_i = 63$
x_i^2	2025	3025	4225	5625	
$n_i x_i$	720	1155	1430	300	$\sum_{i=1}^{4} n_i x_i = 3605$
$n_i x_i^2$	32400	63525	92950	22500	$\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 = 211375$

Le calcul donne

$$\overline{X} = \frac{1}{63}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i \simeq 57.2222,\ V(X) = \frac{1}{63}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 - \left(\overline{X}\right)^2 \simeq 80.776,$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} \simeq 8.9875.$$

• Etude de la variable Y

y_j	2	3	4	
n_j	2	43	18	$\sum_{j=1}^{3} n_j = 63$
y_j^2	4	9	16	
$n_j y_j$	4	129	72	$\sum_{j=1}^{3} n_j y_j = 205$
$n_j y_j^2$	8	387	288	$\sum_{j=1}^{3} n_j y_j^2 = 683$

Le calcul donne

$$\overline{Y} = \frac{1}{63}\sum_{j=1}^{3} n_j y_j \simeq 3.2539\ ,\ V(Y) = \frac{1}{63}\sum_{j=1}^{3} n_j y_j^2 - \left(\overline{Y}\right)^2 \simeq 0.2529\ ,\ \sigma_Y = \sqrt{V(Y)} \simeq 0.5029.$$

2. Dressons les couples distincts des valeurs observées et leurs effectifs.

Couples (x_i, y_j)	$(45,2)$	$(45,3)$	$(45,4)$	$(55,3)$	$(55,4)$	$(65,2)$	$(65,3)$	$(65,4)$	$(75,3)$	$(75,4)$
Effectifs n_{ij}	1	11	4	17	4	1	13	8	2	2
$n_{ij}.x_i.y_j$	90	1485	720	2805	880	130	2535	2080	450	600

Le calcul donne $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} n_{ij}x_iy_j = 11775$.

D'où $\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{63}\times 11775 - \overline{X}\,\overline{Y} \simeq 0.7$.

Interprétation

La covariance est positive donc X et Y ont tendance à varier dans le même sens.

Utilisation d'une calculatrice

Les calculatrices et les ordinateurs actuels permettent de retrouver les résultats précédents. A titre d'exemple, on donne le mode d'emploi d'une calculatrice.

- Pour choisir le mode de fonctionnement en statistique appuyer sur $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$.
- Appuyer sur $\boxed{1}$ pour sélectionner le sous mode statistique à deux variables.
- Pour entrer les données taper $\boxed{x_i}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{y_j}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{n_{ij}}$ $\boxed{\text{M}+}$

Par exemple pour le couple $(55,3)$ taper $\boxed{55}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{17}$ $\boxed{\text{M}+}$.

- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{n}$ la calculatrice affiche 63.
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sum x}$ la calculatrice affiche 3605 (la valeur de $\sum_{i=1}^{4} n_i x_i$).
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sum x^2}$ la calculatrice affiche 211375 (la valeur de $\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2$).
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\overline{X}}$ la calculatrice affiche 57.22222222.
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sigma_X}$ la calculatrice affiche 8.987547725.
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sigma_X}$ $\boxed{x^2}$ la calculatrice affiche 80.77601411 (la valeur de V(X)).
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sum xy}$ la calculatrice affiche 11775 (la valeur de $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} n_{ij}x_iy_j$).
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sum xy}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{63}$ $\boxed{-}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\overline{X}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\overline{Y}}$ la calculatrice affiche

0.705467372 (la valeur de $\operatorname{cov}(X,Y)$).

Activité 1

Dans une population de 100 ménages, on a considéré le nombre d'enfants X et le revenu du chef de famille Y (en DT).

Y \ X	0	1	2	3	4	5	Total
Moins de 200	6	4	1	0	0	0	11
$[200, 400[$	3	11	10	5	1	0	30
$[400, 600[$	1	3	16	13	4	1	38
$[600, 800[$	0	1	3	5	8	4	21
Total	10	19	30	23	13	5	100

1. a. Déterminer le nombre de ménages qui ont 4 enfants et dont le revenu est supérieur à 600 dinars.
   b. Déterminer le nombre de ménages qui n'ont pas d'enfants et ayant un revenu inférieur à 200 dinars.
   c. Déterminer le nombre de ménages qui ont moins de 4 enfants et dont le revenu est compris entre 400 et 600 dinars.
2. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.
   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.
3. a. Peut-on prévoir le signe de la covariance de X et Y ?
   b. Calculer la covariance de X et Y.

III. Ajustement d'une série statistique double

Lorsque un statisticien étudie une série statistique double. L'une des questions qu'il se pose est : peut-on prévoir la valeur de Y lorsqu'on connaît la variable X ?
Pour répondre à une telle question, le statisticien essaiera de trouver une fonction f qui modélise le phénomène étudié, grâce à la relation $Y = f(X)$.

Dans ce cas , on dit que X est la variable explicative et Y est la variable expliquée.
La fonction f cherchée dépendra de l'allure du nuage de points.
Si le nuage de point a l'allure d'une droite, le statisticien essaiera de trouver une fonction affine f qui sera la plus proche des points du nuage. On dit que le statisticien effectue un ajustement affine.
Par conséquent faire un ajustement affine consiste à déterminer deux réels a et b tels que $Y = aX + b$ soit un modèle acceptable du phénomène étudié.
La droite d'équation $y = ax + b$ sera appelée droite d'ajustement affine de Y en X.

III. 1 Méthode de Mayer

Activité 1

On a relevé dans le tableau ci-contre, le montant total (en million de dinars) du commerce extérieur en Tunisie (importations et exportations) depuis l'année 1990 jusqu'à l'année 2004.

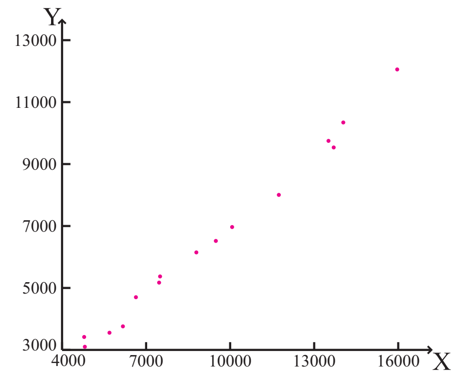
Année	Importations (X)	Exportations (Y)
1990	4826.4	3087.4
1991	4788.9	3417.1
1992	5688.8	3549.7
1993	6172.1	3760
1994	6647.3	4696.6
1995	7464.3	5172.5
1996	7498.8	5372
1997	8793.5	6147.9
1998	9489.5	6518.3
1999	10070.5	6966.9
2000	11738	8004.8
2001	13697.3	9536.2
2002	13510.9	9748.6
2003	14038.9	10342.6
2004	15960.3	12054.9

1. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart-type σ_X de la variable X.

b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

2. On a représenté ci-contre, dans un même repère, le nuage de points de la série double (X, Y).

Placer le point $G\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)$.



3. On scinde l'ensemble des 15 points du nuage en deux parties. La première partie (I) correspond aux valeurs observées entre 1990 et 1997 et la deuxième partie (II) correspond aux valeurs observées entre 1998 et 2004.

On désigne par G_1 et G_2 les points moyens respectifs de la partie I et de la partie (II).

a. Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.

Vérifier que G, G_1 et G_2 sont alignés et tracer la droite (G_1G_2).

b. Comment semblent se répartir les points du nuage autour de la droite (G_1G_2).

c. Donner alors un ajustement affine de la série double (X, Y).

d. Donner une estimation du montant des exportations si le montant de l'importation est égal à 17000 millions de dinars.

Définition

Soit (X,Y) une série statistique double de valeurs $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$.

L'ensemble des points M_i de coordonnées (x_i, y_i) dans un repère orthogonal est appelé nuage de points représentant la série statistique.

Le point moyen du nuage est le point dont les coordonnées sont les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

Principe de la méthode de Mayer

Soit un nuage de points représentant une série statistique double (X,Y) et G son point moyen.

On scinde le nuage de points de (X,Y) en deux parties contenant à peu prés le même nombre de points.

On considère alors les points moyens G_1 et G_2 des deux nuages obtenus.

La droite (G_1G_2) définit un ajustement affine du nuage de points représentant la série statistique double (X,Y).

La droite (G_1G_2) est appelée droite de Mayer et passe par le point moyen G du nuage global.

Activité 2

Le mur d'une habitation est constitué par une couche de béton et une couche de polystyrène d'épaisseur variable X (en cm). On a mesuré la résistance thermique R (en $m^2.°C/W$) de ce mur pour divers valeurs de X et on a obtenu les résultats ci-dessous.

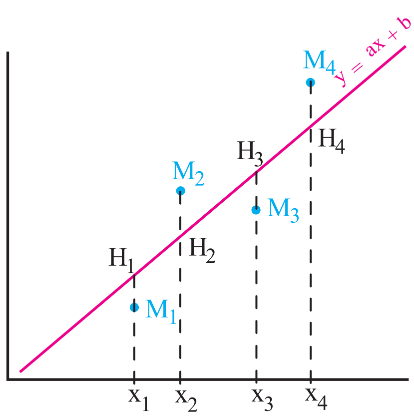
X	2	4	6	8	10	12	14	16	18
R	0.83	1.34	1.63	2.3	2.44	2.93	3.44	3.85	4.28

1. Tracer le nuage de la série (X,R).
2. Déterminer un ajustement affine de R en X par la méthode de Mayer.
3. Quelle résistance thermique peut-on espérer obtenir avec une épaisseur de polystyrène de 25 cm ?

III. 2 Méthode d'ajustement par les moindres carrés

Nous avons représenté ci-contre le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$, $1\leq i\leq n$ d'une série statistique double, ainsi qu'une droite D d'équation $y = ax + b$.

Pour tout entier $1\leq i\leq n$, on note $H_i(x_i, z_i)$ le point de la droite D de même abscisse que M_i.



Le principe de la méthode d'ajustement par la méthode des moindres carrés consiste à déterminer les réels a et b tels que la somme $\sum_{i=1}^{n} M_iH_i^2$ soit minimale.

Dans ce cas, le statisticien pourra faire des prévisions en remplaçant la valeur observée y_i par la valeur théorique $z_i = ax_i + b$.

Activité 1

Le tableau ci-dessous donne le chiffre d'affaire annuel en mille DT d'une société pendant huit années consécutives.

Rang de l'année (X)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires en mille DT	13.6	15	15.8	17	18	20	19	20

1. a. Représenter le nuage de points de la série (X, Y).
   b. Un ajustement affine de cette série est-il justifié ?
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
3. a. Tracer dans le même repère la droite D d'équation $y = 1.6x + 10.1$.
   b. Calculer la somme $S_D = \sum_{i=1}^{8} \left[y_i - (1.6x_i + 10.1)\right]^2$.
4. On considère une droite Δ d'ajustement de Y par rapport à X obtenue par la méthode de Mayer.
   a. Déterminer l'équation de Δ sous la forme $y = ax + b$. (on donnera a et b à 10^{-1} prés)
   b. Calculer la somme $S_\Delta = \sum_{i=1}^{8} \left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$.
5. Comparer S_D et S_Δ.
6. Estimer le chiffre d'affaires de cette société à sa dixième année.

Théorème (admis)

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n et telle que $\sigma_X \neq 0$.

Soit $(x_i, y_i)_{1 \le i \le n}$ les valeurs observées de la série. Alors la somme $\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ est minimale pour le couple (a_0, b_0) tel que $a_0 = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}$ et $b_0 = \left(\overline{Y} - \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}\overline{X}\right)$.

Définition

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n.

La droite d'équation $y = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}(x - \overline{X}) + \overline{Y}$ est appelée droite des moindres carrés de Y en X, ou droite de régression de Y en X.

La droite d'équation $x = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_Y^2}(y - \overline{Y}) + \overline{X}$ est appelée droite des moindres carrés de X en Y, ou droite de régression de X en Y.

Conséquence

Les droites des moindres carrés de Y en X et de X en Y passent par le point moyen G du nuage associé à la série (X, Y).

Activité 2

Dans le tableau ci-dessous, on a relevé le poids (en Kg) et la surface corporelle (en m^2) correspondante de 15 sujets.

	Masse (X)	Surface corporelle (Y)
1	15	0.58
2	20	0.7
3	25	0.8
4	29	0.9
5	34	1
6	39	1.1
7	44	1.2
8	50	1.3
9	55	1.4
10	60	1.5
11	65	1.56
12	70	1.64
13	74	1.74
14	80	1.8
15	85	1.9

1. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.

b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

2. Déterminer la covariance la série (X,Y).

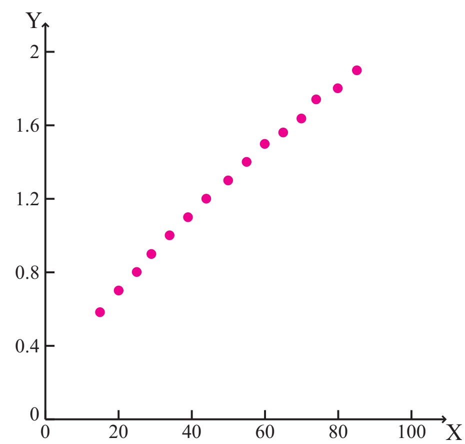
3. On a représenté ci-contre le nuage de la série (X, Y).

a. Placer le point $G\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$.

b. Comment semblent se répartir les points du nuage ?

c. Donner alors un ajustement affine par les moindres carrés de la série double (X,Y).

4. Donner une estimation de la surface corporelle d'un sujet qui pèse 62 KG.



III. 3 Coefficient de corrélation linéaire

On peut toujours au vu des formules précédentes construire une droite de régression. Mais parfois cette dernière n'est d'aucune efficacité, dans la mesure où les prédictions que l'on fait à partir de cette droite ne sont pas raisonnables.
Pour savoir s'il est pertinent d'ajuster un nuage de point par les moindres carrés, on calcule un réel appelé coefficient de corrélation linéaire.

Définition

Soit (X,Y) une série statistique double. On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel noté ρ_{XY} défini par $\rho_{XY} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$.

Propriétés

Soit (X,Y) une série statistique double. Alors $-1 \le \rho_{XY} \le 1$.
Le coefficient de corrélation linéaire est invariant par changement d'unité ou d'origine.

Interprétation du coefficient de corrélation linéaire

Les statisticiens conviennent que lorsque $|\rho_{XY}| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, l'ajustement affine est justifié et les prédictions faites au moyen de cet ajustement sont raisonnables.

Activité 1

Le tableau suivant donne l'effectif de la population scolaire de la $3^{\text{ème}}$ année de l'enseignement secondaire du mois d'octobre 1997 au mois d'octobre 2002.

Année (X)	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Population scolaire en $3^{\text{ème}}$ année (Y)	67755	74581	79266	76138	80123	90087

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
2. Déterminer un ajustement par les moindres carrés de la série double (X, Y) puis donner une estimation de la population scolaire en $3^{\text{ème}}$ année secondaire au mois d'octobre 2010.

Activité 2

On donne la série double suivante, relative aux voitures selon leur puissance Y et la durée des pneumatiques X (en millier de kilomètres).

Y \ X	2	3	4	
20	0	8	30	38
25	5	20	7	32
30	25	3	2	30
	30	31	39	100

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
2. Un ajustement par les moindres carrés est-il justifié ?

III. 4 Exemple d'ajustement non affine

Exercice résolu

Le tableau ci-contre indique l'évolution du personnel paramédical tunisien dans le secteur public (techniciens supérieurs, infirmiers, auxiliaires de santé) de 1990 à 2005.

1. En numérotant les années de 0 à 15, déterminer les valeurs de la série double $(X, \ln Y)$, où X est le rang de l'année et Y est le nombre de paramédicaux de l'année correspondante.
2. On pose $Z = \ln Y$.
   a. Calculer le coefficient de corrélation et justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par les moindres carrés de la série (X, Z).
   b. Donner la droite de régression de Z en X.
3. Quel sera le nombre de paramédicaux en 2010 ?

Année	Paramédicaux
1990	23743
1991	24555
1992	25070
1993	25291
1994	25466
1995	25874
1996	26130
1997	26369
19989	26676
1999	27050
2000	27392
2001	30292
2002	28629
2003	29976
2004	29584
2005	29607

Solution

1.

x_i	y_i	$z_i = \ln(y_i)$	x_i^2	z_i^2	$x_i z_i$
0	23743	10.075	0	101.505	0
1	24555	10.108	1	102.171	10.108
2	25070	10.129	4	102.597	20.258
3	25291	10.138	9	102.778	30.414
4	25466	10.145	16	102.921	40.580
5	25874	10.160	25	103.230	50.800
6	26130	10.170	36	103.430	61.020
7	26369	10.179	49	103.612	71.253
8	26676	10.191	64	103.860	81.528
9	27050	10.205	81	104.142	91.845
10	27392	10.218	100	104.410	102.180
11	30292	10.318	121	106.461	113.498
12	28629	10.262	144	105.310	123.144
13	29976	10.308	169	106.254	134.004
14	29584	10.294	196	105.970	144.116
15	29607	10.295	225	105.990	154.425

2. a. Le calcul donne $\overline{X} = 7.5$, $\sigma_X \simeq 4.6$, $\overline{Z} \simeq 10.199$, $\sigma_Z \simeq 0.074$.

$\text{Cov}(X,Z) \simeq 0.326$, $\rho_{XZ} \simeq 0.960$.

Le coefficient de corrélation est très proche de 1
L'ajustement est donc justifié.

b. La droite de régression est d'équation $z = \dfrac{0.326}{(4.61)^2}(x - 7.5) + 10.199$.

Soit $z = 0.015(x - 7.5) + 10.199$.

3. Le nombre de paramédicaux sera de $e^{0.015(20-7.5)+10.199} \simeq 32419$.

Utilisation d'une calculatrice

Dans cet exercice la série est à données simples.

- Pour entrer les données taper $\boxed{x_i}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{y_i}$ $\boxed{\text{M+}}$.
- Pour afficher la valeur du coefficient de corrélation, appuyer sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{r}$.
- Pour afficher la valeur de la pente de la droite de régression de Y en X, appuyer sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{b}$.
- Pour afficher la valeur de l'ordonné à l'origine de la droite de régression de Y en X, appuyer sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{a}$.

Activité

La résistance à l'avancement d'un poids lourd est une fonction de la vitesse. L'objet de cette activité est de déterminer la meilleur expression possible de cette fonction dans un intervalle de vitesse compris entre 10 km/h et 100 km/h. Cette résistance est mesurée en kW.

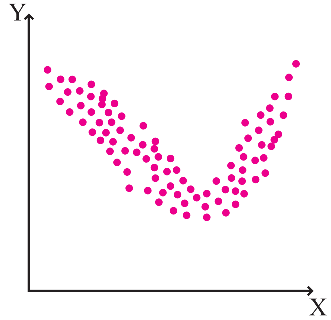
Les résultats de ces mesures sont consignés dans le tableau ci-dessous.

V (km/h)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
R (kW)	2.6	5.8	9.9	15.4	23.6	34.5	49	67.2	89.1

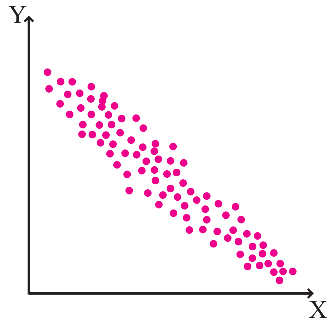
1. Dresser le tableau des valeurs de la série (X, Y) où $X = V^2$ et $Y = \frac{R}{V}$.
2. Donner le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y et une équation de la droite de régression de Y en X.
3. En déduire une relation entre R et V.
4. Donner une évaluation de la valeur de R pour une vitesse de 100 km/h.

1 Pour chacun des graphiques suivants, indiquer si le nuage de points justifie la recherche d'un ajustement affine.

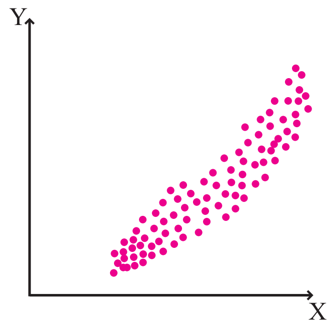
1.



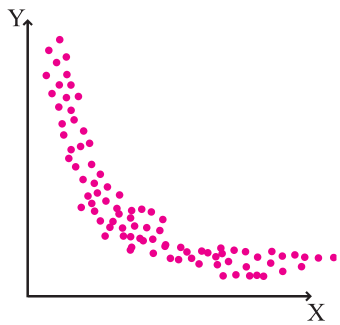
2.



3.



4.



2 On a relevé dans le tableau ci-dessous les poids (en kg) respectif de 12 pères et de leurs fils aînés.

X Poids du père	Y Poids du fils
65	63
63	61
67	66
64	62
68	67
62	60
70	69
66	65
68	67
67	67
69	66
71	70

1. Tracer le nuage de la série (X, Y).
2. Déterminer un ajustement affine par la méthode de Mayer.
3. Quel poids devrait avoir le fils aîné d'un homme qui pèse 77 kg ?

3 Le tableau ci-dessous indique l'évolution du nombre de médecins en Tunisie de l'année 1990 à l'année 2003.

Année	Rang de l'année (X)	Nombre de médecins (Y)
1990	1	4425
1991	2	4500
1992	3	5099
1993	4	5257
1994	5	5344
1995	6	5965
1996	7	6177
1997	8	6464
1998	9	6819
1999	10	7149
2000	11	7444
2001	12	7767
2002	13	7964
2003	14	8189

1. Tracer le nuage de la série (X, Y).
2. Déterminer le point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$
3. Déterminer un ajustement affine par la méthode de Mayer.
4. Donner une estimation du nombre de médecin en Tunisie dans l'année 2010 ?

4 Le tableau suivant donne la répartition d'une population de 100 ménages selon les deux caractères X le nombre de pièces habitées et Y le nombre d'enfants.

X \ Y	0	1	2	3	4	Total
1	6	2	1	0	0	9
2	5	12	8	1	1	27
3	2	7	15	11	3	38
4	0	1	8	14	3	26
Total	13	22	32	26	7	100

1. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X.
b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y.
2. a. Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.
b. Un ajustement affine de la série (X, Y) est-il justifié ?

5 Le tableau ci-dessous donne la charge maximale Y, en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur X, en mètres, de la flèche.

X	Y
9	1.4
10	1.25
12	1
14	0.84
16	0.7
18	0.62
20	0.55
22	0.5

1. Les réponses numériques à cette question seront données à 10^{-2} près.
a. Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal.
b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
c. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.
Construire cette droite sur le graphique précédent.
d. Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 23 mètres.

6 Le tableau suivant recense par clinique le nombre de postes du personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique.

Clinique	Nombre de lits (X)	Nombre de postes (Y)
C_1	122	185
C_2	177	221
C_3	77	114
C_4	135	164
C_5	109	125
C_6	88	118
C_7	185	193
C_8	128	160
C_9	120	151
C_{10}	146	172
C_{11}	100	150

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (X, Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
3. Donner une équation de la droite de régression de Y en X .
Pour les coefficients, on prendra les valeurs décimales arrondies à 10^{-1} près.
Tracer cette droite dans le repère précédent.
4. Une clinique possède 35 lits.

En utilisant les résultats obtenus dans la question 3, combien devrait-elle embaucher de personnel occupant un poste non médical ?

7 A/ Un club sportif a été crée en 1999, à l'origine le nombre d'adhérents était égal à 600.
On donne dans le tableau suivant le nombre d'adhérents de 1999 à 2005.

Année	Rang (X)	Nombre d'adhérents (Y)
1999	0	600
2000	1	690
2001	2	794
2002	3	913
2003	4	1045
2004	5	1207
2005	6	1380

On pose $Z = \ln Y$.
1. a. Vérifier qu'on peut réaliser un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de la série (X, Z).
b. Déterminer une prévision du nombre d'adhérents en 2006.
2. Justifier que $Y \simeq 602 \times (1.15)^X$.

B/ En fait le club a compté 2400 adhérents lors de l'année 2006.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \frac{3600}{1 + 0.5e^{-x}}$$

On suppose que le nombre d'adhérents en $(2006 + n)$ est égal à $f(n)$ où n est un entier naturel.
1. Déterminer la limite de $f(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.
2. a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Année	2007	2008	2009	2010	2011
n	1	2	3	4	5
$f(n)$	3040				

b. Calculer la moyenne M du nombre prévisionnel d'adhérents entre 2007 et 2011.
3. Calculer la valeur moyenne $\bar{f}$ de f sur l'intervalle $[0.5, 5.5]$.

8 On a relevé la taille et le poids de 16 jeunes filles. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant.

Tailles X (en cm)	Poids Y (en kg)
160	46
165	48
167	48
160	46
168	49
170	51
160	45
162	45
165	48
170	49
170	51
168	50
172	50
165	48
165	47
170	50

1. a. Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série (X, Y).
b. Un ajustement affine est-il justifié ?
2. a. Déterminer le coefficient de corrélation entre X et Y.
b. Ecrire une droite de régression de Y en X.
c. Donner une estimation de la masse d'une jeune fille mesurant 180 cm.
3. Un journal de santé publie la loi de Lorentz qui donne une relation entre le poids M et la taille T pour une jeune fille, $M = (T - 100) - \frac{T - 130}{2}$.
Utiliser cette relation pour estimer la masse d'une jeune fille mesurant 180 cm.

9 Onze élèves de $7^{\text{ème}}$ année de base travaillent sur la proportionnalité.
Ils mesurent le rayon d'un disque puis évaluent l'aire de ce disque.
Les rayons, exprimés en cm, forme la série (X).

Les aires correspondantes, exprimées en cm^2, forment la série (Y).

Les résultat de cette expérience sont donnés dans le tableau suivant.

X (en cm)	Y (en cm^2)
2	12
2.5	20
3	28
3.5	38
4	50
4.5	64
5	78
5.5	95
6	113
6.5	133
7	154

1. Les deux séries sont-elles proportionnelles ?
2. On pose $Z = \sqrt{Y}$.
a. Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série (X, Z) .(les valeurs de Z seront arrondis à 10^{-1} près).
b. Calculer le coefficient de corrélation ρ_{XZ}.
Interpréter le résultat.
c. Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X. (les coefficients seront arrondis à 10^{-1} prés).
d. En déduire une valeur approchée de π.

10 Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit.
Une étude a permis d'établir le tableau suivant où, pour différentes observations, X désigne la quantité de produit que la clientèle est disposée à acheter, et Y le prix de vente (en DT) d'une unité.

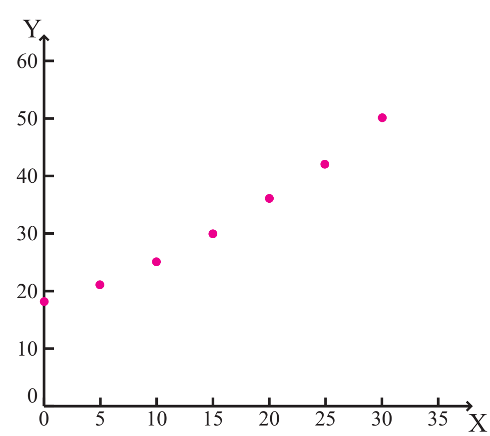
X	350	400	450	500	550	600
Y	140	120	100	95	85	70

1. Calculer le coefficient de corrélation ρ_{XY}.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X. (les coefficients seront arrondis à 10^{-1} prés).
3. Soit $r(x)$ la recette correspondant à la vente de x articles au prix unitaire y.
a. Montrer que $r(x) = (226.5 - 0.3x)x$.
b. Etudier le variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = -0.3x^2 + 226.5$.
c. En déduire le prix de vente pour lequel la recette est maximale. Calculer cette recette maximale.

11 Le tableau suivant donne la population d'une ville entre les années 1975 et 2005.

Année	Rang de l'année (X)	Population (en milliers d'habitants) (Y)
1975	0	18
1980	5	21
1985	10	25
1990	15	30
1995	20	36
2000	25	42
2005	30	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté graphiquement ci-après.



A/ 1. Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.
2. a. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.
b. Tracer cette droite sur le graphique ci-dessus.
c. En déduire une estimation de la population en 2008 à un millier prés.

B/ 1. L'allure du nuage suggère à chercher un ajustement par une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=ae^{bx}$ où a et b sont des réels.
Déterminer a et b tels que $f(0)=18$ et $f(30)=50$.
On donnera une valeur arrondie de b au millième.
2. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2008 à un millier prés.
3. Tracer la courbe de f sur le même graphique.
4. La population en 2008 était de 55 milliers.
Lequel des deux ajustement vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.

C/ On considère maintenant que, pour une année, la population est donnée en fonction du rang x par $f(x)=18e^{0.034x}$.
1. Calculer la valeur moyenne $\overline{f}$ de la fonction f sur $[0,30]$. On donnera le résultat arrondi au dixième.
2. A l'aide d'une lecture graphique, déterminer l'année au cours de laquelle la population atteint cette valeur moyenne.

12 Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays de 1965 à 2000.
T désigne le rang de l'année et P la population en millions d'habitants.

Année	Rang de l'année (T)	P
1965	0	8
1970	5	8.9
1975	10	9.9
1980	15	11
1985	20	12
1990	25	13.5
1995	30	15
2000	35	16.6

A/ 1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (T,P) dans un repère orthogonal.
• Sur l'axe des abscisses, choisir 2 cm pour 5 unités (5 ans).
• Sur l'axe des ordonnées, placer 8 à l'origine, puis choisir 2 cm pour une unité (1 million d'habitants).
2. Les experts cherchent à modéliser cette évolution par une fonction f dont la courbe est voisine du nuage de points.
On pose $Y=\ln P$.
a. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut du coefficient de corrélation linéaire de la série (T,Y).
b. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en T. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).
c. En déduire l'expression de la population P en fonction du rang T de l'année.

B/ On admet que la fonction f définie sur $[0,35]$ par $f(t)=8.e^{0.02t}$ est une modélisation satisfaisante de l'évolution de la population (en millions d'habitants) de 1965 à 2000.
1. Étudier le sens de variation de f sur $[0,35]$ et dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.
2. Construire la courbe représentative de f, notée (C), dans le repère de la partie A.
3. On pose $I=\int_0^{35} f(t)dt$.
a. Donner une valeur approchée de I arrondie à 10^{-2} près.
b. En déduire la population moyenne m du pays durant ces 35 années et la représenter sur le graphique.

4. Calculer le rapport $\dfrac{f(t+1)-f(t)}{f(t)}$ et en donner une interprétation en terme de pourcentage.
5. Si le modèle exponentiel étudié dans la partie B restait valable après 2000, en quelle année la population aurait-elle dépassé les 19 millions d'habitants ?

15 On étudie la croissance d'une plante à partir d'un instant considéré comme initial.
Le tableau ci-dessous indique le diamètre D de la tige après T semaines.

Temps T en semaines	Diamètre D en centimètres
0	0.4
2	1.2
6	5.4
8	5.8
10	6.4
12	6.9

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique.

2. On pose $U = \ln\left(\frac{8}{D} - 1\right)$.

a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (T, U).

b. Déterminer par les moindres carrés une équation de la droite d'ajustement de U en T.

c. Vérifier que pour cette plante, le diamètre de sa tige principale est donné par une relation de la forme $D(t) = \frac{8}{1 + ce^{-at}}$ où a et c sont deux réels que l'on précisera.

3. a. Pour les valeurs de a et c trouvées, tracer dans le repère précédent la fonction $f : t \mapsto D(t)$ pour $t \geq 0$

b. Le diamètre de la plante dépassera-t-il 8 cm ?