REPUBLIQUE TUNISIENNE

MINISTERE DE L'EDUCATION

Mathématiques

4éme année de l'enseignement secondaire

Section Mathématiques

TOME 1

Hikma Smida
Professeur universitaire

Ridha Bouida
Professeur Principal hors classe

Khadija Kaâniche Ben Messaoud
Inspecteur Principal

Nabil Mziou
Inspecteur

Mourad El Arbi
Professeur Principal

Taoufik Charrada
Inspecteur

Mohamed Sakrani
Professeur Principal

Evaluateurs

Belhassen Dehman
Professeur universitaire

Néjiba Mhammdi
Inspecteur

Ali Béji Hammas
Inspecteur

Centre National Pédagogique

Remerciements

Les auteurs remercient toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce manuel, et en particulier

Madame Néjiba MHAMDI, Messieurs Abdennibi ACHOUR, Belhassen DAHMEN et Ali Béji HAMMAS pour leurs critiques, leurs conseils pertinents et leurs modifications judicieuses.

Mesdames Imène GHDAMSI et Leila YOUSSEF pour leur contribution et leur disponibilité.

Mesdames Souad TOUNSI, Fatma TANGOUR, Fatma ZGHAL, Hédia OUESLATI, Messieurs Hédi BAKLOUTI, Majdi BEN BADR et Adel ZARGOUNI pour leurs conseils pertinents et leurs remarques judicieuses.

Les membres de l'équipe d'édition du CNP pour leur grande compétence et leur patience.

Les auteurs

© Tous droits réservés au centre National Pédagogique

Préface

Ce manuel comprend neuf chapitres. Chaque chapitre comprend trois rubriques : Cours, QCM-Vrai ou faux et Exercices et problèmes.

La rubrique Cours comprend
- *des activités visant à permettre aux élèves de développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à démontrer,*
- *les résultats du cours à retenir,*
- *des exercices et problèmes résolus.*

La rubrique QCM vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.
La rubrique Vrai ou faux vise à l'apprentissage progressif des règles logiques.

La rubrique Exercices et problèmes comprend des exercices et problèmes visant à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.

Sommaire

Chapitre 1

Continuité et limites

C'est l'élaboration d'une démonstration précise du théorème des valeurs intermédiaires, qui amena Bolzano (1817) à définir la notion de continuité d'une fonction.
Le théorème des valeurs intermédiaires , qui semble géométriquement évident, a été utilisé sans scrupules par Euler et Gauss.
Bolzano, cependant estime qu'une démonstration précise est nécessaire pour atteindre une plus grande rigueur en Analyse.

(E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire , 2000).

Chapitre 1

Continuité et limites

I. Rappels

Dans ce paragraphe nous rappelons les principaux théorèmes vus en troisième année.

I.1 Continuité et limite en un réel

Activité 1

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et justifier la continuité de f en tout réel de son ensemble de définition.

1. $f : x \mapsto 1 - x + x^2$.
2. $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{x-1}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x + 1}{2 + \cos x}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{|-5x+1| - 2}{x+3}$.
5. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x-1}}$.

• Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
• Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
• Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout réel.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- Si f est continue en a, alors les fonctions αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $|f|$ et f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ et $f \times g$ sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.
- Si f est positive sur I et f est continue en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 4x + 2}{|x-1|}$.

1. Vérifier que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = 2|x-1|$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I.
S'il existe une fonction g définie sur I, continue en a et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{x^2+\sin x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et déterminer son prolongement.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.
Si la fonction f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a, alors la fonction g définie sur I par $g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\neq a,\\ \ell & \text{si } x=a.\end{cases}$ est continue en a.

Activité 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-4\left(x^2+x-2\right)}{3\sqrt{1-x}} & \text{si } x<1,\\[2mm] \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{si } x>1,\\[2mm] 0 & \text{si } x=1.\end{cases}$$

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en un réel a de I, si et seulement si, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
2. La fonction f est-elle continue en 1 ?

Activité 5

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|x+1|}{x+1}$

La fonction f admet-elle une limite en -1 ?

I.2 Continuité sur un intervalle

Activité

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x\in\,]0,\pi],\\ f(0)=0.\end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $[0,\pi]$.

- Une fonction est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I.
- Une fonction est continue sur un intervalle $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.

De façon analogue, on définit la continuité de f sur les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$.

I.3 Opérations sur les limites

Soit L et L' deux réels.

Les résultats qui suivent concernent les opérations sur les limites en un réel ou à l'infini.

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f+g)$
L	L'	$L+L'$
L	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	L'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim(f\times g)$
L	L'	$L\times L'$
$+\infty$	$L'>0$	$+\infty$
$+\infty$	$L'<0$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\lim f$	$\lim g$	$\lim\left(\frac{f}{g}\right)$
L	$L'\neq 0$	$\frac{L}{L'}$
$+\infty$	$L'>0$	$+\infty$
$+\infty$	$L'<0$	$-\infty$
L	$+\infty$	0
L	$-\infty$	0
$L\neq 0$	0	∞ (On applique la règle des signes).

$\lim f$	$\lim \lvert f\rvert$	$\lim \sqrt{\lvert f\rvert}$
L	$\lvert L\rvert$	$\sqrt{\lvert L\rvert}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Les règles énoncées dans les tableaux précédents ne s'appliquent pas lorsqu'il s'agit d'étudier

* la limite de la somme de deux fonctions dont l'une tend vers $+\infty$ l'autre tend vers $-\infty$.
* la limite du produit de deux fonctions dont l'une tend vers l'infini l'autre tend vers 0.
* la limite du quotient de deux fonctions qui tendent toutes les deux vers l'infini ou toutes les deux vers 0.

Une transformation d'écriture adéquate pourra nous ramener à l'un des théorèmes résumés dans les tableaux ci-dessus.

Théorème

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Activité

Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+\dfrac{1}{x^2+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{-5x+1}-3x$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-x^2-x\right)^2+\sqrt{2}\,x$.
4. $\lim\limits_{x\to 2} 5x^3+\left(\dfrac{3x-1}{\lvert x-2\rvert}\right)^5$.
5. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{2x-3}\left(\dfrac{3}{(x-3)^2}-2\right)$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}}-2x\right)\left(x^3+x\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-x$.

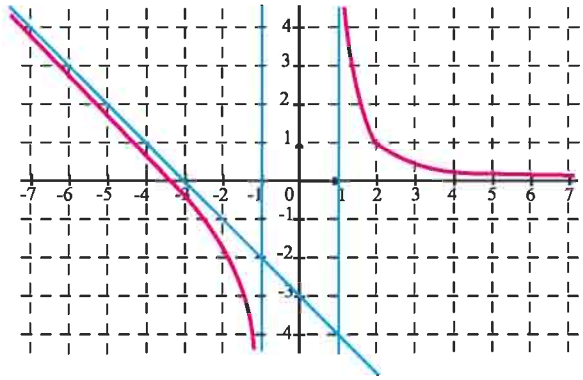
II. Branches infinies

Activité 1

La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Les droites d'équations $x=-1$, $x=1$, $y=0$ et $y=-x-3$ sont des asymptotes à cette courbe.

Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x+3$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.



Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On dit que C_f admet une branche infinie dès que l'une des coordonnées d'un point de C_f tend vers l'infini.

Nous avons résumé dans le tableau ci-dessous la nature de certaines branches infinies vues en $3^{\text{ème}}$ année.

f	C_f
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$.	La droite $D: x=a$ est asymptote à C_f.
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.	La droite $D: y=L$ est asymptote à C_f.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)-(ax+b)\right)=0$.	La droite $D: y=ax+b$ est asymptote à C_f.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b. Montrer que pour tout réel strictement positif x, $f(x)=x\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$.

c. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

2. a. Montrer que pour tout réel strictement positif x, $f(x)-x=\dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x$. Interpréter graphiquement le résultat.

Soit f une fonction telle que $f(x)$ tend vers l'infini, lorsque x tend vers l'infini. On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Alors la branche infinie de C_f dépend de la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$, lorsque x tend vers l'infini.

Nous donnons dans le tableau ci-dessous un procédé de détermination de la branche infinie de C_f dans le cas où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Les autres cas se déterminent de façon analogue.

* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ est infinie, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O,\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.

* Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=a$ $(a\in\mathbb{R}^*)$ alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$.

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$ $(b\in\mathbb{R})$ alors la droite d'équation $y=ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

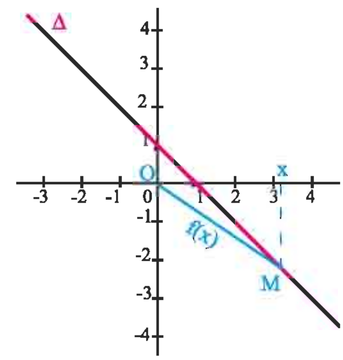
• Si $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y=ax$ est une direction asymptotique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par $f(x)=2x+\sqrt{x+1}$ et C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.
3. Tracer C_f.

Activité 4



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit Δ la droite d'équation $y=1-x$.
A tout réel x, on associe le point M de Δ d'abscisse x
et on désigne par f la fonction définie par $f(x)=OM$.

Soit C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier géométriquement les variations de f, ainsi que ses limites en l'infini.

2. a. Expliciter $f(x)$.

   b. Montrer que la droite $D: x=\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de C_f.

   c. Montrer que la droite D' d'équation $y=\sqrt{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

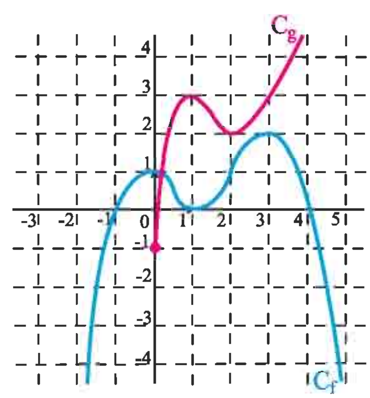
3. Etudier les variations de f et tracer C_f.

> Soit f une fonction définie sur D.
> On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
> La droite $\Delta: x=a$ $(a\in\mathbb{R})$ est un axe de symétrie pour C_f si pour tout x de D, $\begin{cases}(2a-x)\in D,\\ f(2a-x)=f(x).\end{cases}$

III. Continuité et limite d'une fonction composée

III.1 Composée de deux fonctions

Activité 1



Dans la figure ci-contre C_f et C_g sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$.

1. Lire sur le graphique les images par f des réels -1, 0, 1, 2 et 3, ainsi que les images par g des réels 0, 1, 2, et 3.
2. Soit les fonctions $h: x\mapsto g(f(x))$ et $k: x\mapsto f(g(x))$.
   a. Déterminer les images par h des réels -1, 0, 1, 2 et 3.
   b. Déterminer les images par k des réels 0, 1, 2 et 3.

Définition

> Soit u une fonction définie sur un ensemble I et v une fonction définie sur un ensemble J tel que $u(I)$ est inclus dans J.
> La fonction notée $v\circ u$, définie sur I par $v\circ u(x)=v(u(x))$, est appelée fonction composée de u et v.

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$.

1. $f : x \mapsto \cos(\pi x + 1)$. 2. $f : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. 3. $f : x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2x}\right)$.

III. 2 Continuité d'une fonction composée

Théorème

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $u(a)$.

Si u est continue en a et v est continue en $u(a)$, alors la fonction $v \circ u$ est continue en a.

Démonstration

Soit un réel $\beta > 0$. La fonction v étant continue en $u(a)$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$y \in J,\ |y - u(a)| < \alpha \Rightarrow |v(y) - v(u(a))| < \beta.$$

Puisque la fonction u est continue en a, alors il existe un réel $\alpha_1 > 0$ tel que

$$x \in I,\ |x - a| < \alpha_1 \Rightarrow |u(x) - u(a)| < \alpha.$$

On peut donc écrire

$$x \in I,\ |x - a| < \alpha_1 \Rightarrow |u(x) - u(a)| < \alpha \Rightarrow |v(u(x)) - v(u(a))| < \beta$$

Il en résulte que la fonction $v \circ u$ est continue en a.

Corollaire

La composée de deux fonctions continues est continue.

Activité

Etudier dans chaque cas la continuité de f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$ $I = \mathbb{R}$. 2. $f : x \mapsto \cos\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $I =]1, +\infty[$.

III. 3 Limite d'une fonction composée

Théorème (admis)

Soit I et J deux intervalles ouverts, a un réel de I, ℓ un réel de J et ℓ' un réel.
Soit u une fonction définie sur I, sauf peut être en a et v une fonction définie sur J, sauf peut être en ℓ.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to \ell} v(x) = \ell'$, alors $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = \ell'$.

Activité 1

Déterminer dans chaque cas la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a.

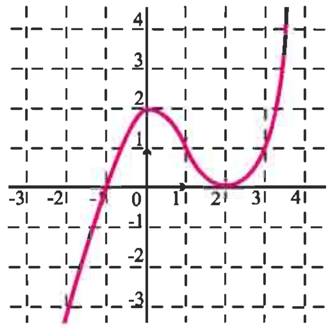
1. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x^2) - 1}{x^2}$ $a = 0$. 2. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1}$ $a = 1$.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{\pi\left(x^2+x-12\right)}{x-3}\right)$.

f est-elle prolongeable par continuité en 3 ?

Activité 3



Dans la figure ci-contre est représentée une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 2} f\left(\dfrac{2}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to 4} f\left(\dfrac{x-4}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\sin x - 1\right)$.

Théorème (admis)

Soit u et v deux fonctions. Soit a, b et c finis ou infinis.
Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} v(x) = c$ alors $\lim\limits_{x\to a} v\circ u(x) = c$.

Activité 4

Soit la fonction $f : x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Activité 5

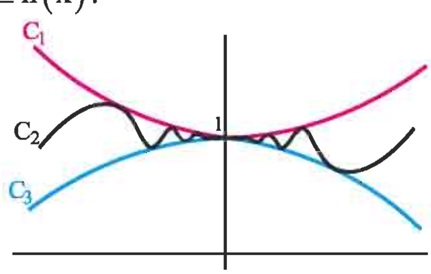
Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^+} \tan\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} (x-1)\cos\left(\dfrac{\pi x}{x-1}\right)$.

IV. Limites et ordre

Activité 1

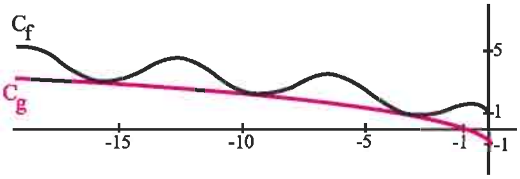
Soit f, g et h les fonctions définies par $f(x) = x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+1$, $g(x) = -x^2+1$ et $h(x) = x^2+1$.

1. Montrer que pour tout réel non nul x on a $g(x) \le f(x) \le h(x)$.
2. Dans la figure ci-contre on a représenté les trois fonctions f, g et h.
   a. Identifier la courbe de chacune de ces fonctions.
   b. Que peut-on conjecturer sur la limite de f(x) lorsque x tend vers 0 ?



Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté les fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{-x}+\cos x$ et $g(x)=\sqrt{-x}-1$



1. Etudier la position relative de C_f et C_g.
2. Que peut-on conjecturer sur la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?

Théorème

Soit f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I. Soit deux réels ℓ et ℓ'.

- Si $u(x)\leq v(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=\ell$ et $\lim\limits_{a} v=\ell'$ alors $\ell\leq\ell'$.
- Si $u(x)\leq f(x)\leq v(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=\lim\limits_{a} v=\ell$ alors $\lim\limits_{a} f=\ell$.

Les résultats énoncés ci-dessus restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.

Démonstration

- Posons $g(x)=v(x)-u(x)$ pour tout $x\neq a$.

D'après l'hypothèse faite sur les fonctions u et v, la fonction g est positive et $\lim\limits_{a} g=\ell'-\ell$.

On en déduit que $\ell\leq\ell'$.

- Posons $h(x)=f(x)-u(x)$ et $g(x)=v(x)-u(x)$ pour tout $x\neq a$.

D'après l'hypothèse faite sur les fonctions f, u et v, $0\leq h(x)\leq g(x)$ pour tout $x\neq a$ et $\lim\limits_{a} g=0$. On en déduit que pour tout $\beta>0$, il existe $\alpha>0$ tel que

$x\in I$ et $0<|x-a|<\alpha \Rightarrow h(x)\leq g(x)<\beta$.

Le théorème en découle.

Théorème

Soit f et u deux fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I.

- Si $f(x)\geq u(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=+\infty$, alors $\lim\limits_{a} f=+\infty$.
- Si $f(x)\leq u(x)$ pour tout $x\neq a$ et si $\lim\limits_{a} u=-\infty$, alors $\lim\limits_{a} f=-\infty$.

Ces résultats restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.

Démonstration

- Soit un réel $A>0$. L'égalité $\lim\limits_{a} u=+\infty$ implique l'existence d'un réel $\alpha>0$ tel que

$x\in I$ et $0<|x-a|<\alpha \Rightarrow u(x)>A$.

On en déduit, compte tenu de l'hypothèse, que $x \in I$ et $0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) > u(x) > A$.
La propriété en découle.

- La deuxième propriété découle de la première en considérant les fonctions $-u$ et $-f$.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-\cos x}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

Activité 4

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} + \cos^2\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sqrt{x}$.

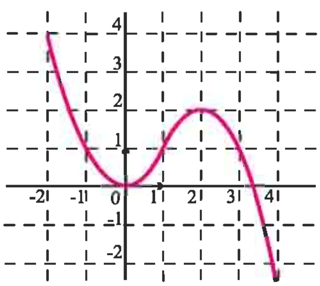
1. Montrer que $f(x) \geq \dfrac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire $\lim\limits_{0^+} f$.

V. Image d'un intervalle par une fonction continue

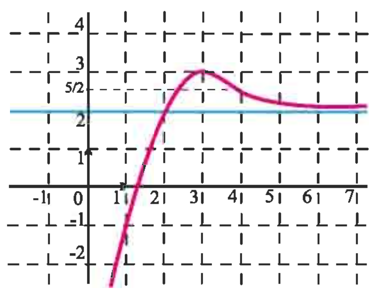
V. 1 Théorème des valeurs intermédiaires

Activité 1

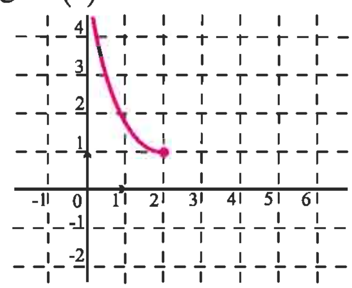
Dans chacun des cas suivants, déterminer graphiquement l'image $f(I)$ de l'intervalle I.



$I =]-1, 3[$



$I = [1, 4]$



$I =]0, 2]$

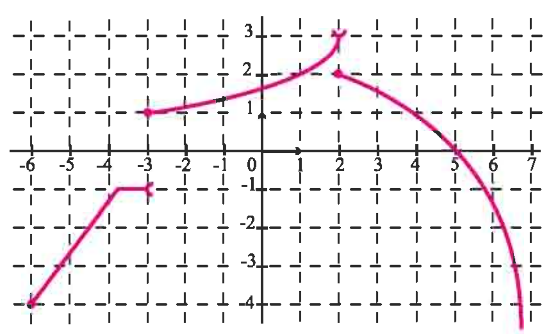
Théorème (Rappel)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Activité 2

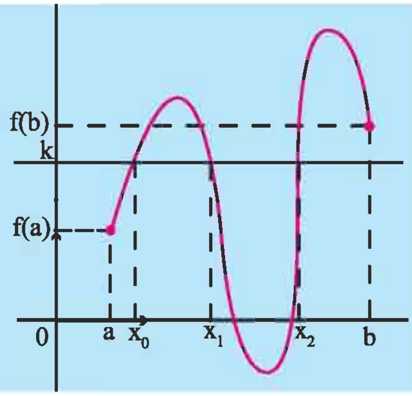
Le graphique ci-contre représente une fonction g définie sur $[-6, +\infty[$.

Déterminer $g([-6, 4])$ et $g([-3, 5])$.



Théorème des valeurs intermédiaires (Rappel)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.
En particulier, si $f(a).f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.



Activité 3

Montrer que les fonctions ci-dessous sont strictement monotones sur I.

$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}_+$;

$x \mapsto \cos^2 x$, $I = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$;

$x \mapsto (1+x)^{20}$, $I = [0, 4]$.

Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) < f(b)$.
Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, $f(a) > f(b)$.
Une fonction est strictement monotone sur un intervalle I, si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

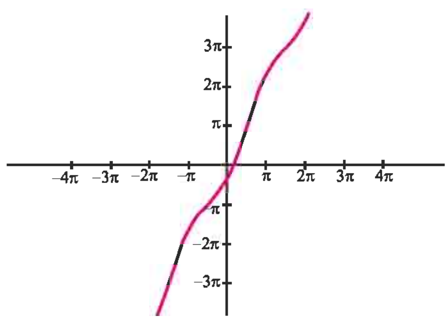
Théorème

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Démonstration
Elle découle des valeurs intermédiaires et de la stricte monotonie de f.

Activité 4

Le graphique ci-contre représente la fonction
$f : x \mapsto 2x - \cos x$



1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Etudier les variations de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

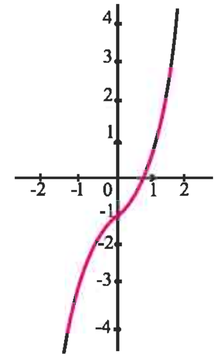
   b. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{6}$ admet une solution unique α dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. a. Lequel des intervalles $]0, \frac{\pi}{4}[$ et $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ contient la solution α ?

   b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $\frac{\pi}{8}$.

Activité 5

La courbe représentée ci-contre est celle de la fonction

$f : x \mapsto x^3 + x - 1$.



I/ 1. Donner l'ensemble de définition de f.

2. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,1]$.

4. On se propose de trouver un encadrement de plus en plus précis de α, en divisant à chaque fois l'intervalle contenant α en deux intervalles de même amplitude.
(Ce procédé est appelé « méthode de dichotomie »).

a. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire que α appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.

b. Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$ et en déduire que α appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

c. Poursuivre le procédé pour déduire un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

d. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

II/ Avec l'ordinateur

Pour réaliser la feuille de calcul ci-contre avec le tableur Excel,

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	(a+b)/2	f(a)	f(b)	f((a+b)/2)
2	0	1	0,5	-1	1	-0,375
3	0,5	1	0,75	-0,375	1	0,171875
4	0,5	0,75	0,625	-0,375	0,171875	-0,13085938
5	0,625	0,75	0,6875	-0,13085938	0,171875	0,01245117
6	0,625	0,6875	0,65625	-0,13085938	0,01245117	-0,06112671
7	0,65625	0,6875	0,671875	-0,06112671	0,01245117	-0,02482986
8	0,671875	0,6875	0,6796875	-0,02482986	0,01245117	-0,0063138
9	0,6796875	0,6875	0,68359375	-0,0063138	0,01245117	0,00303739
10	0,6796875	0,68359375	0,68164063	-0,0063138	0,00303739	-0,001646
11	0,68164063	0,68359375	0,68261719	-0,001646	0,00303739	0,00069374
12	0,68164063	0,68261719	0,68212891	-0,001646	0,00069374	-0,00047662
13	0,68212891	0,68261719	0,68237305	-0,00047662	0,00069374	0,00010844
14	0,68212891	0,68237305	0,68225098	-0,00047662	0,00010844	-0,00018412

- dans les cellules A1, B1, C1, D1, E1 et F1 taper respectivement a, b, $(a+b)/2$, $f(a)$, $f(b)$ et $f((a+b)/2)$;
- dans la cellule A2, taper 0 ; dans la cellule B2, taper 1 (encadrement initial) ;
- dans la cellule C2, taper $\boxed{=(A2+B2)/2}$

dans la cellule D2, taper $\boxed{= \text{PUISSANCE}(A2;3)+A2-1}$ et recopier vers la droite en E2 et F2 ;

- dans la cellule A3, taper $\boxed{= \text{SI}(F2*E2>0;A2;C2)}$ et dans la cellule B3, taper $\boxed{= \text{SI}(F2*E2>0;C2;B2)}$;

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.

Démonstration

Supposons que f change de signe sur I.

Il existe alors deux réels α et β $(\alpha<\beta)$ de I tels que $f(\alpha).f(\beta)<0$

La fonction f étant continue sur $[\alpha,\beta]$, l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $[\alpha,\beta]$. Ce qui contredit l'hypothèse « f ne s'annule en aucun point de I ».

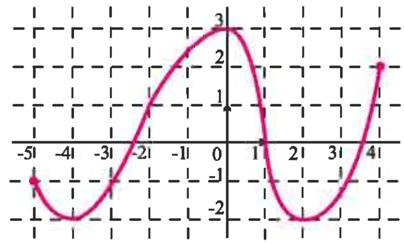
Activité 6

1. Montrer que la fonction $f: x \mapsto 1+x+x^2+x^3+...+x^{10}$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $f: x \mapsto 1+\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+...+\sin^{10} x$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

V. 2 Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue

Activité 1

On a représenté ci-contre la courbe d'une fonction f définie sur $[-5,4]$.



1. Déterminer $f([-5,4])$.
2. a. Déterminer le minimum m et le maximum M de f sur $[-5,4]$.

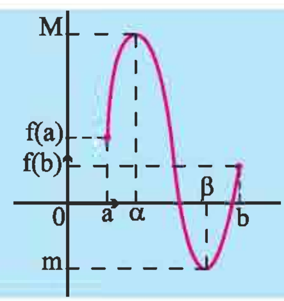
   b. Résoudre graphiquement chacune des équations $f(x)=m$ et $f(x)=M$.

Théorème

L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m,M]$.

Le réel m est le minimum de f sur $[a,b]$.

Le réel M est le maximum de f sur $[a,b]$.



Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^2 x$.

1. a. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$.

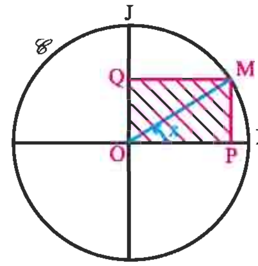
   b. En déduire $f\left([-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\right)$.
2. Déterminer l'image par f de chacun des intervalles, $[\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}]$ et $[\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}]$.

Activité 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x+\frac{4}{x}$.

Déterminer $f([1,4])$, $f([-10,-1])$.

Activité 4



Sur la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})\equiv x[2\pi]$ avec x appartenant à $]0,\frac{\pi}{2}[$.

On désigne par $\mathcal{A}(x)$ et $\mathcal{P}(x)$ l'aire et le périmètre du rectangle OPMQ.

1. Soit f et g les fonctions définies sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par

   $f(x)=\sin x\cos x$ et $g(x)=2(\sin x+\cos x)$.

   Déterminer l'image de l'intervalle $[0,\frac{\pi}{2}]$ par chacune des fonctions f et g.

2. En déduire les valeurs maximales respectives de $\mathcal{A}(x)$ et de $\mathcal{P}(x)$.

VI. Image d'un intervalle par une fonction strictement monotone

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a,b[$ (b fini ou infini).

- Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b.
- Si la fonction f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b.
- Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en b.
- Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en b.

Activité 1

Soit f une fonction définie et croissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout entier naturel n, $f(n)=n+1$. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Théorème (admis)

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et strictement monotone sur I est un intervalle de même nature.

Exemples

Intervalle I	Si f est strictement croissante sur I	Si f est strictement décroissante sur I
$I=[a,b]$	$f(I)=[f(a),f(b)]$	$f(I)=[f(b),f(a)]$
$I=[a,b[\ (a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{b^-} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-} f,f(a)]$
$I=[a,+\infty[\,(a\in\mathbb{R})$	$f(I)=[f(a),\lim\limits_{+\infty} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{+\infty} f,f(a)]$
$I=]a,b[\ (a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$	$f(I)=]\lim\limits_{a^+} f,\lim\limits_{b^-} f[$	$f(I)=]\lim\limits_{b^-} f,\lim\limits_{a^+} f[$

Activité 2

Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f: x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$, $I=]2,\ +\infty[$.
2. $f: x \mapsto \sqrt{x^2-2x}$, $I=]-\infty,\ 0]$.
3. $f: x \mapsto \tan(x\pi)$, $I=]-\dfrac{1}{2},\ 0[$.

Problème résolu

I. 1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x)=16x^2(1-x)^2$.

a. Vérifier que pour tout $x\in[0,1]$, $f(x)\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

b. Montrer que $f([0,\ 1])=[0,\ 1]$.

2. Soit un entier $n\ge 2$. Montrer que l'équation $f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)=f(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,\ 1-\dfrac{1}{n}]$.

II. Le but de cette partie est de montrer que si f est une fonction continue sur l'intervalle $[0,\ 1]$ telle que $f(0)=f(1)$ et $f([0,\ 1])=[0,\ 1]$, alors pour tout entier $n\ge 2$, l'équation $f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)=f(x)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,\ 1-\dfrac{1}{n}]$.

Soit g la fonction définie sur $[0,\ 1-\dfrac{1}{n}]$ par $g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que g est continue sur $[0,\ 1-\dfrac{1}{n}]$.

2. Montrer que $g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+...+g\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$.

3. En déduire qu'il existe $\alpha \in [0,\ 1-\frac{1}{n}]$ tel que $f\left(\alpha+\frac{1}{n}\right)=f(\alpha)$.

Solution

I.1.a. $f(x)=16\left(x(1-x)\right)^2,\ x\in[0,\ 1]$.

On considère la fonction f_1 définie sur $[0,\ 1]$ par $f_1(x)=x(1-x)$.

Comme la fonction f_1 atteint son maximum sur $[0,\ 1]$ en $\frac{1}{2}$, on en déduit que

$f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right),\ x\in[0,\ 1]$.

b. La fonction f est continue sur le fermé borné $[0,1]$, il existe deux réels α et β tels que

$f([0,\ 1])=[f(\alpha),\ f(\beta)]$.

$f(\alpha)$ est le minimum de f sur $[0,\ 1]$ et $f(\beta)$ est le maximum de f sur $[0,\ 1]$.

Pour tout $x\in[0,\ 1],\ 0\le f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

On en déduit que $f([0,\ 1])=[0,\ 1]$.

2. Considérons la fonction h définie sur l'intervalle $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$ par $h(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$.

La fonction h est une fonction polynôme donc elle est continue sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$ et

$h(0).h\left(1-\frac{1}{n}\right)<0$.

On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $h(x)=0$ admet au moins une solution sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$.

II. 1. On peut écrire $g=f-f\circ u$, où u est la fonction définie sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$ par $u(x)=x+\frac{1}{n}$.

La fonction u est continue sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$ et $u(x)\in[\frac{1}{n},\ 1]\subset[0,\ 1]$.

D'autre part, la fonction f est continue sur $[0,\ 1]$.

Il en résulte d'après la continuité d'une fonction composée sur un intervalle que $f\circ u$ est continue sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$ et par suite la fonction g est continue sur $[0,\ 1-\frac{1}{n}]$.

2. Posons $S_n = g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + g\left(\frac{n-1}{n}\right)$, n entier supérieur ou égal à 2.

Montrons que pour tout entier $n \geq 2$, $S_n = 0$.

Pour tout entier $n \geq 2$,

$$S_n = g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + g\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$= \left(f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right)\right) + \ldots + \left(f\left(\frac{n-2}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) + \left(f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1)\right).$$

On en déduit que $S_n = f(0) - f(1) = 0$.

3. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[0,\ 1 - \frac{1}{n}]$.

Supposons que pour tout réel $x \in [0,\ 1 - \frac{1}{n}]$, $g(x) \neq 0$.

Il résulte de la continuité de g sur l'intervalle $[0,\ 1 - \frac{1}{n}]$, que g garde un signe constant sur $[0,\ 1 - \frac{1}{n}]$ et par conséquent le réel $g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + g\left(\frac{n-1}{n}\right)$ est ou bien strictement positif ou bien strictement négatif ce qui est en contradiction avec le résultat $g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + g\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) = 0$.

En conclusion, il existe un $\alpha \in [0,\ 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est à dire $f\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha)$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)$ alors $\lim\limits_{+\infty} g$ est égale à

☐ $+\infty$. ☐ n'existe pas. ☐ $-\infty$.

2. Si f est une fonction continue et décroissante sur $[2, 5]$ tel que $f([2, 5]) = [1, 3]$ alors

☐ $f(2) = 3$ et $f(5) = 1$. ☐ $f(2) = 1$ et $f(5) = 3$. ☐ $1 < f(2) < 3$.

3. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[-2, 5]$ tel que $f(-2) = 3$ et $f(5) = -2$ alors l'équation $f(x) = -1$

☐ n'admet pas de solution dans $[-2, 5]$. ☐ admet au moins une solution dans $[-2, 5]$. ☐ admet exactement une solution dans $[-2, 5]$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction paire et si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}$ admet une limite finie en $+\infty$.
3. Si une fonction admet une limite finie en $-\infty$ et une limite finie en $+\infty$ alors elle est bornée.
4. Si une fonction f n'est pas définie en a alors nécessairement la droite $\Delta : x = a$ est une asymptote verticale à C_f.
5. Soit f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$, telles que pour tout réel x, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

   Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 5$ alors f admet une limite en $+\infty$.

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{|x|}\sqrt{2|x|} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)|x-2| & \text{si } x\neq 2,\\ 1 & \text{si } x=2.\end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

3 On considère la fonction f définie sur

$\mathbb{R}\setminus\{-2,\ 3\}$ par $f(x)=\dfrac{-3x^2-x+10}{x^3+x^2-8x-12}$.

1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 3 ?
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en -2 ?

4 Soit la fonction $f: x\mapsto \dfrac{x+3}{\sqrt{|x^2+x-6|}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en -3 et déterminer son prolongement.

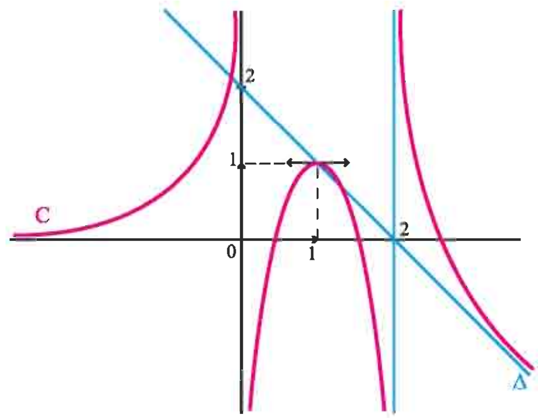
5 Déterminer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{-3}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-3}{x-1}$.
2. $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{-3x}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{-3x}{x^2-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

6 Dans chacun des cas suivants, déterminer le prolongement par continuité de la fonction f en x_0.

1. $f: x\mapsto \dfrac{x^3+3x^2-2x-4}{x+1}$, $x_0=-1$.
2. $f: x\mapsto \dfrac{1-\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\sin x}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$.
3. $f: x\mapsto \dfrac{\cos(4x)-1}{x^2}$, $x_0=0$.
4. $f: x\mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}\sin\left((x-1)^2\pi\right)$, $x_0=1$.

7 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$. La droite Δ et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=2$ et $y=0$ sont des asymptotes à la courbe C.



1. Déterminer graphiquement,

$\lim\limits_{-\infty} f$, $\lim\limits_{0^-} f$, $\lim\limits_{0^+} f$, $\lim\limits_{2^-} f$, $\lim\limits_{2^+} f$, $\lim\limits_{+\infty} f$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x-2$.

2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.

8 Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f.

1. $f: x\mapsto \cos\left(\dfrac{\pi x+1}{x}\right)$ en $-\infty$.
2. $f: x\mapsto \sin\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)$ en $+\infty$.
3. $f: x\mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x}$ en 0^+.

4. $f : x \mapsto \dfrac{\cos\left(x^2-1\right)-1}{x^4-2x^2+1}$ en 1.

9 On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x)=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\sin x$.

1. Montrer que pour tout réel positif x, $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.
2. Montrer que pour tout réel positif x, $|f(x)| \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

10 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que l'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $-\infty$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

11 Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x-2)$ et interpréter les résultats obtenus.
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

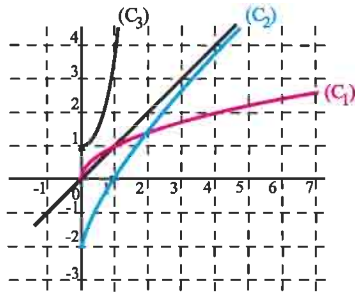
12 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-x+1}$

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

1. a. Déterminer l'ensemble D_f de définition de la fonction f.
b. Montrer que pour tout réel de D_f ,
$f(x)=\sqrt{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$.
2. a. Montrer que la droite D d'équation $y = x-\dfrac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
b. Etudier la position de la courbe de f par rapport à la droite D.
3. Etudier la nature de la branche infinie de C_f en $-\infty$.
4. Tracer C_f .

13 On a représenté trois fonctions f, g et h définies sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par

$f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=x-\dfrac{2}{x+1}$.



1. Identifier pour chaque fonction sa courbe représentative.
2. Préciser pour chaque courbe la nature de sa branche infinie.

14 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f dans chacun des cas ci-dessous.

1. $f : x \mapsto 2x-3\sqrt{x-1}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}-\sqrt{x+2}$.
3. $f : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

15 Dans chacun des cas suivants, à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en 0 de f.

1. $f : x \mapsto x\sin\left(\dfrac{2}{x}\right)$.
2. $f : x \mapsto 1+x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}+\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

16 Dans chacun des cas suivants, à l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f .

1. $f : x \mapsto \dfrac{2+\cos x}{x}$.

2. $f: x \mapsto \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{|x|}}$.

3. $f: x \mapsto \dfrac{x \sin x}{x^4+x^2+1}$.

4. $f: x \mapsto \cos x - x$.

17 On considère les fonctions $f: x \mapsto \dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$, $g: x \mapsto \dfrac{x \sin^4 x}{2x^3+1}$ et $h: x \mapsto -x^3+3\sin x$.

1. Montrer, pour $x \geq 1$, les inégalités $|f(x)| \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $|g(x)| \leq \dfrac{1}{2x^2}$ et $h(x) \leq -x^3+3$.
2. En déduire les limites en $+\infty$ de ces fonctions.

18 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{2-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

1. a. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) \geq \dfrac{1}{x}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

2. a. Montrer que pour tout $x < 0$, $f(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.

19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x\sin x}{1+x^2}.$$

1. a. Montrer que pour tout réel x, $|xf(x)| \leq 2$.

b. En déduire $\lim\limits_{-\infty} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(\pi-2x)\cos x}{1+\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

20 1. Trouver deux réels a et b tels que pour tout réel x, $a \leq \dfrac{1}{2-\cos x} \leq b$.

2. En déduire la limite en $+\infty$ de chacune des fonctions $f: x \mapsto \dfrac{x}{2-\cos x}$ et $g: x \mapsto \dfrac{x+\cos x}{2-\cos x}$.

21 Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

1. $f: x \mapsto \dfrac{\cos(3x-1)}{x}$.
2. $f: x \mapsto 4x^2 - 3\cos x$.
3. $f: x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-2x}$.
4. $f: x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}+\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

22 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2 telle que

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2-2x & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1], \\ f(x-1) & \text{si } x \in]1,2]. \end{cases}$$

1. Tracer dans un repère orthonormé la courbe de la restriction de f sur $[0,4]$.
2. Montrer que pour tout réel x, $-1 \leq f(x) \leq 1$.
3. Tracer dans le même repère la courbe de la fonction $g: x \mapsto 2x$.
4. On considère la fonction $h: x \mapsto f(x)+g(x)$.

a. Tracer la courbe représentative de la restriction de h sur $[0,4]$.

b. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} h$ et $\lim\limits_{-\infty} h$.

23 Dans chacun des cas suivants, déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f.

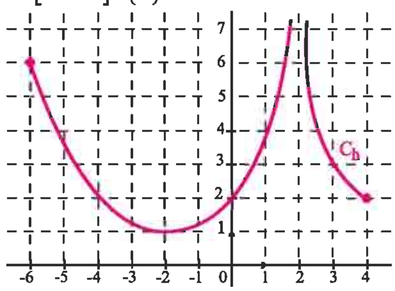
1. $f: x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$, $\quad I =]2, +\infty[$.
2. $f: x \mapsto \sqrt{x^2-2x}$, $\quad I =]-\infty, 0]$.
3. $f: x \mapsto \tan(\pi x)$, $\quad I =]-\dfrac{1}{2}, 0]$.

24 On considère la fonction $f: x \mapsto -2x^3+2x-3$.

1. Représenter la courbe de f dans un repère.
2. Déterminer graphiquement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

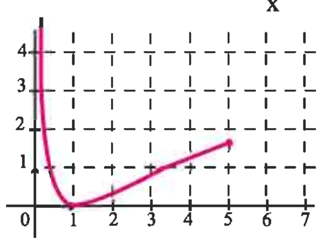
3. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution de cette équation.

25 On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $[-6,\ 4]\setminus\{2\}$.



1. Déterminer graphiquement les variations de f.
2. Déterminer $f([-6,\ 2[)$ et $f(]2,\ 4])$.
3. Soit la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$.
a. Déterminer l'ensemble de définition de h.
b. Déterminer $h([-6,\ 2[)$ et $h(]2,\ 4])$.
c. h est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

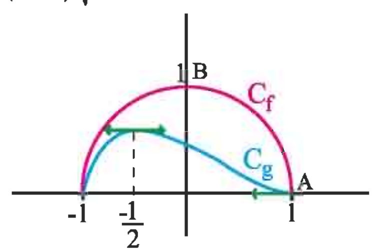
26 On a représenté ci-dessous la fonction f définie sur $]0,\ 5]$ par $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} - 3$.



1. Justifier la continuité de f sur $]0,\ 5]$.
2. Déterminer graphiquement les variations de f.
3. Déterminer $f(]0,\ 1])$ et $f([1,\ 5])$.
4. a. Déterminer graphiquement, le nombre de solutions de l'équation $2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} = 4$.
b. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près des solutions de cette équation.

27 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \dfrac{1}{x-1}$.
1. Montrer que f est strictement croissante sur chacun des intervalles $[0,\ 1[$ et $]1,\ +\infty[$.
2. Déterminer $f([0,\ 1[)$ et $f(]1,\ +\infty[)$.
3. a. Montrer que l'équation $(x-1)\sqrt{x} = 1$ admet dans $[\dfrac{3}{2},\ 2]$ une unique solution α.
b. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

28 Dans la figure ci-dessous, les courbes C_f et C_g représentent les fonctions f et g définies sur $[-1,1]$ par et $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ et
$g(x) = \dfrac{1}{2}(1-x)\sqrt{1-x^2}$.



Soit M un point de C_f d'abscisse x différent de 1. On désigne par H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et on par $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle AHM.
1. Exprimer $\mathcal{A}(x)$ à l'aide de x.
2. a. Déterminer graphiquement, la position du point M pour que l'aire du triangle AHM soit maximale.
b. Déterminer graphiquement, l'ensemble $I = \{\mathcal{A}(x),\ x \in [-1,1[\}$.
c. Montrer qu'il existe une position M_0 de M autre que B telle que l'aire $\mathcal{A}$ soit égale à celle du triangle OAB (on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2} de l'abscisse x_0 de M_0).

29 Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a,\ b]$ telle que $f([a,\ b]) \subset [a,\ b]$.
1. Montrer que f possède un point fixe (c'est-à-dire qu'il existe un réel α de $[a, b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$).
2. Interpréter graphiquement ce résultat.

Chapitre 2

Suites réelles

Dans son traité d'Arithmétique, As- Samaw'al (1172) écrit : "Ce que l'on extrait par approximation des racines irrationnelles au moyen du calcul est ce par quoi on veut obtenir une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle. Il peut exister une quantité rationnelle plus proche de la racine irrationnelle que celle-là. Il peut ensuite exister une troisième quantité rationnelle, plus proche de la racine irrationnelle que la deuxième quantité et que la première, car pour toute quantité rationnelle supposée proche d'une racine irrationnelle, la différence entre elles est en vérité une ligne droite, et la ligne est susceptible d'être divisée et d'être partagée, indéfiniment. C'est pourquoi il devient possible de trouver continûment une quantité rationnelle proche de la racine irrationnelle, et de trouver une autre quantité rationnelle plus proche que la première de l'irrationnelle, indéfiniment."

(R. Rashed, Entre Arithmétique et Algèbre , 1984).

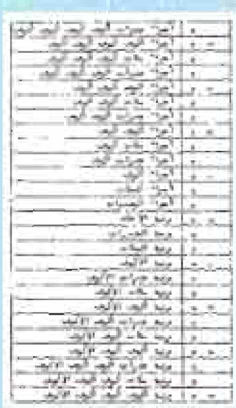


Tableau d'As-Samawal

Chapitre 2

Suites réelles

I. Rappels et compléments sur les limites de suites

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \frac{1}{n}, n \geq 1.$ 2. $u_n = n^2 + 1, n \geq 0.$ 3. $u_n = 10^n, n \geq 0.$

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 10^{2007}, \\ -\frac{n}{3} & \text{si } n > 10^{2007}. \end{cases}$ 2. $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 10^{2007}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } n > 10^{2007}. \end{cases}$

La limite d'une suite (u_n) ne dépend que des grandes valeurs de n.

Activité 3

On désigne par (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{\cos(n\pi)}{2n+(-1)^n}, n \geq 1.$

1. Donner l'expression de u_{2n} et u_{2n+1}.
2. Que peut-on dire de la limite de u_n ?

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$, si et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a$.

Démonstration

Supposons d'abord que a est un réel.

Soit (u_n) une suite convergente vers a. Montrons que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers a.

Soit un réel $\beta > 0$. Il existe un entier naturel N_0 tel que $|u_n - a| < \beta$ dès que $n \geq N_0$.

Par suite $|u_{2n} - a| < \beta$ et $|u_{2n+1} - a| < \beta$ dès que $n \geq N_0$.

Supposons que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers a. Montrons que (u_n) est une suite convergente vers a. Posons $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

Soit un réel $\beta > 0$. Il existe deux entiers naturels N_1 et N_2 tels que

$|v_n - a| < \beta$ dès que $n \geq N_1$ et $|w_n - a| < \beta$ dès que $n \geq N_2$.

Soit N_0 un entier supérieur à N_1 et N_2 et $m \geq 2N_0 + 1$.

Si $m = 2n$ alors $m \geq N_0 \geq N_1$ et $|u_m - a| = |v_n - a| < \beta$.

Si $m = 2n+1$ alors $m \geq N_0 \geq N_2$ et $|u_m - a| = |w_n - a| < \beta$.

Le cas où a est infini se démontre de façon analogue.

Activité 4

Etudier la convergence des suites ci-dessous.

1. $u_n = (-1)^n$.

2. $u_n = \dfrac{\cos(n\pi) + (-1)^n}{n}$, $n \geq 1$.

3. $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si n est pair,} \\ -\dfrac{n}{3} & \text{si n est impair, } n \geq 1. \end{cases}$

Activité 5

1. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$, $n \geq 0$ est bornée.

2. Reprendre la question précédente pour la suite $w_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si n est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{3n^2} & \text{si n est impair, } n \geq 1. \end{cases}$

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration

Soit (u_n) une suite convergente vers un réel a. Montrons qu'elle est bornée.

Par définition de la convergence d'une suite, il existe un entier N_0 tel que $|u_n - a| < 1$ dès que $n \geq N_0$. Il en découle que $a - 1 < u_n < 1 + a$ dès que $n \geq N_0$.

Si $N_0 = 0$, alors la suite (u_n) est bornée par les réels $a-1$ et $a+1$.

Si $N_0 \geq 1$, on désigne par m le plus petit élément de l'ensemble

$\{u_0, u_1, \dots, u_{N_0 - 1}, a-1, a+1\}$ et par M son plus grand élément.

Ainsi la suite (u_n) est bornée par les réels m et M.

Théorème

Soit une suite (u_n) convergente vers un réel a.

- S'il existe un entier N_0 tel que $0 \leq u_n$ pour tout $n \geq N_0$, alors $0 \leq a$.
- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq 0$ pour tout $n \geq N_0$, alors $a \leq 0$.

Démonstration

- On suppose que $a < 0$ et on pose $\varepsilon = -\frac{a}{2}$.

Comme la suite (u_n) converge vers a, il existe alors un entier N_1 tel que $|u_n - a| < \varepsilon$ dès que $n \geq N_1$. Il en découle que $a - \varepsilon < u_n < \varepsilon + a$ dès que $n \geq N_1$. Or $\varepsilon + a = \frac{a}{2} < 0$, ce qui contredit la positivité de la suite (u_n) à partir du rang N_0.

Ainsi $0 \leq a$.

- Pour démontrer la deuxième propriété, il suffit d'appliquer la première à la suite $(-u_n)$.

Conséquence

Soit un entier naturel N_0 et une suite $(u_n), n \geq 0$ .On suppose qu'il existe deux réel m et M tel que $m \leq u_n \leq M$, $n \geq N_0$.

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a, alors $m \leq a \leq M$.

Démonstration

Pour démontrer cette propriété, il suffit d'appliquer le théorème précédent aux suites $(u_n - m)$ et $(u_n - M)$.

Opérations sur les limites de suites

Soit a et b deux réels.

Les résultats qui suivent concernent les opérations sur les limites de suites réelles.

Soit deux suites (u_n) et (v_n).

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$
a	b	a + b
$+\infty$	b	$+\infty$
$-\infty$	b	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right)$
a	$b \neq 0$	$\frac{a}{b}$
∞	$b \neq 0$	∞ (on applique la règle des signes)
a	$+\infty$	0
a	$-\infty$	0
$a \neq 0$	0	∞ (on applique la règle des signes)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n . v_n)$
a	b	a b
∞	$b \neq 0$	∞ (on applique la règle des signes)
∞	∞	∞ (on applique la règle des signes)

Activité 6

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}} - 3n^3, \quad n \geq 1.$

2. $u_n = \left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{2}\right)\left(n^3 + 3n - 1\right), \quad n \geq 1.$

3. $u_n = -n + \sqrt{\dfrac{5n+3}{2n+9}}, \quad n \geq 0.$

4. $u_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n + \dfrac{1}{2}}, \quad n \geq 0.$

Activité 7

1. On désigne par (u_n) la suite définie par $u_n = 2\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\dfrac{1}{n}\right), \quad n \geq 1.$

   Calculer u_n et déterminer la limite de (u_n).

2. Déterminer alors la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{n^2}$, $n \geq 1$.

II. Suites géométriques et applications

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$, $n \geq 0$.

2. $u_n = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$, $n \geq 0$.

3. $u_n = \left(\sqrt{\pi}\right)^n$, $n \geq 0$.

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = q^n$, $n \geq 0$, où q est un réel non nul.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite.
- Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.

Activité 2

Soit a un réel et (u_n) la suite définie pour tout entier non nul n par $u_n = \left(\cos(\pi a)\right)^{2n}$.

1. Déterminer la limite de u_n lorsque a est un entier.

2. Déterminer la limite de u_n lorsque a n'est pas un entier.

Activité 3

Soit a un nombre rationnel et (y_n) la suite définie pour tout entier non nul n par

$y_n = (\sin(n!\pi a))^n$.

1. Calculer y_n lorsque a est un rationnel de la forme $\frac{1}{q}$ où $q < n$.
2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ pour tout nombre rationnel a.

Activité 4

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-n^3}$, $n \geq 2$.
2. $u_n = \dfrac{(-2)^n - 3}{4(-2)^n + 5} - 2\left(\dfrac{8}{3}\right)^n$, $n \geq 0$.
3. $u_n = 1 + \dfrac{5}{3} + \ldots + \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$, $n \geq 0$.
4. $u_n = -3 - \dfrac{9}{\pi} - \ldots - 3\left(\dfrac{3}{\pi}\right)^n$, $n \geq 0$.

Activité 5

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies de la manière suivante

$a_1 = 4.2$, $a_2 = 4.22$, $a_n = 4.\underbrace{22\ldots2}_{\text{n chiffres}}$, $n \geq 1$,

$b_1 = 4.23$, $b_2 = 4.223$, $b_n = 4.\underbrace{22\ldots23}_{\text{n+1 chiffres}}$, $n \geq 1$.

1. En écrivant $a_n = 4.\underbrace{2\ldots22}_{n} = 4 + 2\left(10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-n}\right)$, Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.
2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

Activité 6

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = 2\,u_n - 1, \; n \geq 0. \end{cases}$

1. Déterminer la solution α de l'équation $x = 2x - 1$.
2. On désigne par (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - \alpha$, $n \geq 0$.

   Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice résolu

Soit la fonction $f : x \mapsto 1+\dfrac{2}{x+1}$.

1. Déterminer les réels x tels que $f(x)=x$.

2. Montrer que pour tous réels x et y différents de -1, $f(x)-f(y)=\dfrac{2(y-x)}{(x+1)(y+1)}$.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, $n\geq 0$.
   a. Montrer que pour tout entier n, u_n est positif.
   b. Représenter la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, ainsi que la droite d'équation $y=x$.
   c. Calculer et représenter les réels u_1, u_2 et u_3 sur l'axe $(O,\vec{i})$.

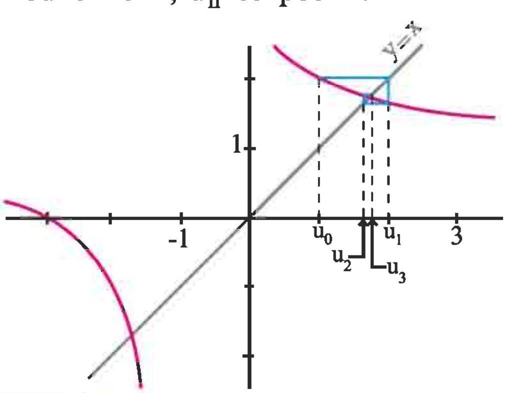
4. On pose pour tout entier n, $v_n=\dfrac{u_n-\sqrt{3}}{u_n+\sqrt{3}}$.
   a. A l'aide la question 2, montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b. En déduire l'étude de la convergence de la suite (u_n).

Solution

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
   Pour déterminer les points fixes de f, il suffit de résoudre l'équation $f(x)=x$.
   On obtient $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}$ et $f(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}$.

2. Pour tous réels x et y différents de -1, on peut écrire $f(x)-f(y)=\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{y+1}$.
   Le résultat en découle.

3. a. Le réel $u_0=1$ est positif. Supposons que u_n est positif. Il en résulte que u_n+1 et $f(u_n)$ sont positifs. Ce qui prouve que pour tout entier n, u_n est positif.
   b. On a représenté ci-contre la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, ainsi que la droite d'équation $y=x$.
   c. Le calcul donne $u_1=2$, $u_2=\dfrac{5}{3}$ et $u_3=\dfrac{7}{4}$.



4. a. On peut écrire pour tout entier n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \dfrac{f(u_n) - f(\sqrt{3})}{f(u_n) - f(-\sqrt{3})}$.

En utilisant la question 2, on obtient $v_{n+1} = \left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)v_n$.

Ce qui prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$ et de premier terme $\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$.

b. La suite (v_n) converge vers 0 car $\left|\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right| < 1$.

On peut écrire pour tout entier n, $u_n = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{3}v_n}{1 - v_n}$.

On en déduit que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{3}$.

III. Suites du type $v_n = f(u_n)$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I et (u_n) une suite d'éléments de I.

Si (u_n) tend vers un réel a de I alors $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

Démonstration

Soit un réel $\beta > 0$. Montrons qu'il existe un rang N_0 tel que $|f(u_n) - f(a)| < \beta$ dès que $n \geq N_0$.

La fonction f étant continue en a, il existe un réel α tel que $|f(x) - f(a)| < \beta$ pour tout x de I tel que $|x - a| < \alpha$.

La suite (u_n) étant convergente vers a, il existe un entier naturel N_0 tel que $|u_n - a| < \alpha$ dès que $n \geq N_0$.

Il résulte de ce qui précède que pour tout $n \geq N_0$, on a $|u_n - a| < \alpha$ et par suite $|f(u_n) - f(a)| < \beta$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ (fini ou infini) et si $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$ (fini ou infini), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Démonstration

- Supposons que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ et f tend vers une limite finie L en $+\infty$.

Soit un réel $\beta > 0$. Montrons qu'il existe un rang N_0 tel que $|f(u_n) - L| < \beta$ dès que $n \geq N_0$.

La fonction f admettant pour limite L en $+\infty$, il existe un réel $B > 0$ tel que $|f(x) - L| < \beta$ pour tout x de I tel que $x > B$.

La suite (u_n) admettant pour limite $+\infty$, il existe un entier naturel N_0 tel que $u_n > B$ dès que $n \geq N_0$.

Il résulte de ce qui précède que pour tout $n \geq N_0$, on a $u_n > B$ et par suite $|f(u_n) - L| < \beta$.

- Supposons que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ et f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Soit un réel $B > 0$. Montrons qu'il existe un rang N_0 tel que $f(u_n) > B$ dès que $n \geq N_0$.

La fonction f admettant pour limite $+\infty$ en $+\infty$, il existe un réel $A > 0$ tel que $f(x) > B$ pour tout x de I tel que $x > A$.

La suite (u_n) admettant pour limite $+\infty$, il existe un entier naturel N_0 tel que $u_n > A$ dès que $n \geq N_0$.

Il résulte de ce qui précède que pour tout $n \geq N_0$, on a $u_n > A$ et par suite $f(u_n) > B$.

Les autres cas se démontrent de façon analogue.

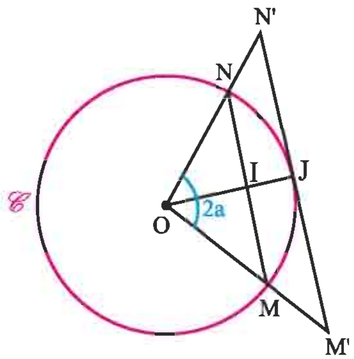
Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

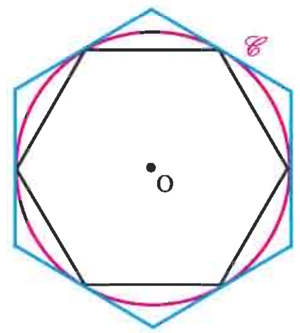
1. $u_n = \sin\left((0.75)^n\right)$, $n \geq 1$.
2. $u_n = n\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \tan\left(\dfrac{\pi n}{2n+1}\right)$, $n \geq 0$.
4. $u_n = \dfrac{1 - \cos\left((0.25)^n\right)}{(0.25)^n}$, $n \geq 1$.

Activité 2

1. Dans la figure ci-contre $\mathscr{C}$ est un cercle de rayon 1 et de centre O. Les points M, N de $\mathscr{C}$ sont tels que $\widehat{MON} = 2a$.
Le point I est le milieu du segment [MN].
La demi-droite [OI) coupe $\mathscr{C}$ en J.
La tangente à $\mathscr{C}$ en J coupe respectivement les demi-droites [OM) et [ON) en M' et N'.
On désigne par A et A' les aires des triangles MON et M'ON'.
Montrer que $\dfrac{A'}{A} = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$.



2. Dans la figure ci-contre P_n est un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de rayon 1 et de centre O et P'_n est un polygone régulier à n côtés circonscrit au cercle $\mathscr{C}$.



On note A_n et A'_n les aires respectives de P_n et P'_n.

a. Exprimer A_n et A'_n à l'aide de n et montrer qu'elles ont une même limite que l'on calculera.

b. Etablir que $2\sqrt{2} < \pi < \dfrac{8\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

IV. Limites et ordre

Théorème

Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes respectivement vers deux réels a et b.

S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \le v_n$ pour tout $n \ge N_0$ alors $a \le b$.

Démonstration

La suite $(v_n - u_n)$ étant positive, sa limite est alors positive.

Le théorème en découle.

Activité 1

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n}$, $n \ge 1$.

1. Montrer que pour tout $n \ge 1$, $\dfrac{n^2}{n^2+n} \le v_n \le \dfrac{n^2}{n^2+1}$.

2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} des réels v_{1000} et v_{10^6}.

3. Que peut-on conjecturer sur $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$?

Théorème

Soit trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n). Soit a un réel.

On suppose qu'il existe un entier N_0 tel que $v_n \le u_n \le w_n$, $n \ge N_0$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = a$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

Démonstration

Nous démontrons le théorème pour $a = 0$. Le cas a non nul en découlera aisément.
Soit un réel $\beta > 0$. Montrons qu'il existe un rang N tel que $|u_n| < \beta$ dès que $n \ge N$.

La suite (v_n) étant convergente vers 0, il existe un entier naturel N_1 tel que $|v_n| < \beta$ dès que $n \ge N_1$, ou encore $-\beta < v_n < \beta$ dès que $n \ge N_1$ (I).

La suite (w_n) étant convergente vers 0, il existe un entier naturel N_2 tel que $|w_n| < \beta$ dès que $n \geq N_2$, ou encore $-\beta < w_n < \beta$ dès que $n \geq N_2$ (II).

Soit un entier naturel N supérieur à N_0, N_1 et N_2.

Il découle de (I) et (II) que $-\beta < v_n < \beta$ et $-\beta < w_n < \beta$ pour tout entier $n \geq N$.

De plus l'hypothèse $v_n \leq u_n \leq w_n$, $n \geq N_0$ implique que $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout entier $n \geq N$.

On en déduit que $-\beta < v_n \leq u_n \leq w_n < \beta$ dès que $n \geq N$,

ou encore que $|u_n| < \beta$ dès que $n \geq N$.

Supposons a non nul. Alors les suites définies par $x_n = u_n - a$, $y_n = v_n - a$ et $z_n = w_n - a$ vérifient $y_n \leq x_n \leq z_n$ pour tout entier $n \geq N_0$ et sont telles que (y_n) et (z_n) convergent vers 0.

On en déduit que la suite (x_n) converge vers 0 et par suite la suite (u_n) converge vers a.

Corollaire

Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n).

On suppose qu'il existe un entier N tel que $0 \leq |u_n| \leq v_n$, $n \geq N$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Activité 2

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n + \cos n}$, $n \geq 0$.

   a. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n-1}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{\cos(5n) + \sin(2n)}{5n^2 + 1}$, $n \geq 0$.

   a. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq |v_n| \leq \dfrac{2}{5n^2+1}$.

   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Activité 3

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$.

1. Montrer que $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{10}{11}$ pour tout entier $n \geq 10$.

2. Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

3. A l'aide de la calculatrice, déterminer un entier naturel n_0 pour que $|u_n| \leq 10^{-6}$, $n \geq n_0$.

Activité 4

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \dfrac{n^{100}}{(1.01)^n}$.

1. Montrer que $(1.01)^n \geq \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-100)10^{-202}}{101!}$, $n \geq 101$,

   (on pourra utiliser la formule du binôme de Newton).

2. En déduire la limite de (u_n).

Théorème

Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n).

- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$, $n \geq N_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$, $n \geq N_0$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

Soit un réel $A > 0$. Montrons qu'il existe un entier N tel que $v_n > A$ dès que $n \geq N$.

L'hypothèse $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ nous permet d'affirmer qu'il existe un entier N_1 tel que $u_n > A$ dès que $n > N_1$ (I).

Soit N un entier supérieur à N_0 et N_1. On déduit de (I) que $u_n > A$ dés que $n > N > N_1$.

L'hypothèse $v_n \geq u_n$, $n \geq N_0$ nous permet alors d'écrire $v_n \geq u_n > A$ pour tout entier $n > N$.

Ce qui démontre la première propriété du théorème.

Pour démontrer la deuxième propriété, il suffit d'appliquer la première propriété aux suites $(-u_n)$ et $(-v_n)$.

Activité 5

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = (3n+1)^n$, $n \geq 1$.
2. $u_n = \dfrac{n^3}{2+\sin(3n)}$, $n \geq 1$.
3. $u_n = \dfrac{1}{n^2} + n^3(\sin n - 3)$, $n \geq 1$.
4. $u_n = -\dfrac{n^6}{n^4 - \pi} + \dfrac{\cos^2(2n)}{n^3}$, $n \geq 1$.

Activité 6

1. Ecrire les sommes suivantes en utilisant le symbole $\sum$.

a. $A = 1+2+3+...+n$.

b. $B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...-\frac{1}{512}$.

2. Calculer les sommes suivantes.

$C = \sum_{k=10}^{500} 1$; $D = \sum_{k=0}^{20}(3k-1)$; $E = \sum_{k=3}^{10} 10^{-k}$.

On note $\sum_{k=1}^{n} a_k$ et on lit «sigma pour k variant de 1 à n des réels a_k» le réel obtenu en faisant la somme des réels $a_1, a_2, ..., a_n$.

On a donc $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Activité 7

1. Vérifier que pour tout entier non nul k, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2. En déduire la limite de la suite (w_n) définie par $w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$, $n \geq 1$.

V. Convergence des suites monotones

Activité 1

Soit la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n}{n^2}$, $n \geq 1$.

1. a. Calculer w_n .

b. Vérifier que la suite (w_n) est décroissante et minorée.

c. Montrer que (w_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n}{n}$, $n \geq 1$.

a. Vérifier que la suite (v_n) est croissante.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

Théorème (admis)

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 0$.

Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel a et pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq a$.

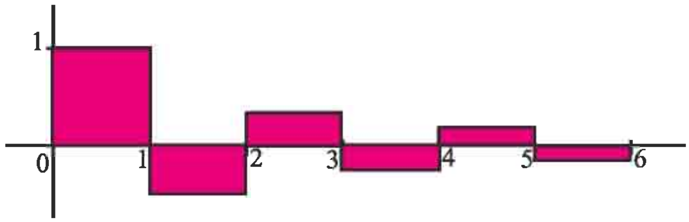
Si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel b et pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq b$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On construit une suite de rectangles et on note algébriquement leurs aires de la manière suivante.

Le $n^{\text{ème}}$ rectangle est limité par les droites d'équations $y=0$, $y=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, $x=n-1$ et $x=n$, son aire algébrique est $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Ci-contre on a représenté les six premiers rectangles.
Pour tout $n \geq 1$, on désigne par u_n la somme des aires algébriques des n premiers rectangles



1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_6.

   b. Vérifier que $u_n = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots-\dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \geq 1$.

2. a. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante.

   b. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} \leq 1-\dfrac{1}{2n}$.

   c. En déduire que la suite (u_{2n}) converge vers un réel a.

3. a. Montrer que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.

   b. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $u_{2n+1} \geq 0.5+\dfrac{1}{2n+1}$.

4. Calculer $u_{2n+1}-u_{2n}$.
   En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite a.

5. a. Montrer alors que la suite (u_n) converge vers a.

   b. Calculer u_{10} et u_{11} et en déduire un encadrement de a.

Théorème

- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Démonstration

- Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

La suite (u_n) étant non majorée, on en déduit que pour tout réel $M>0$ il existe un entier naturel N_0 tel que $u_{N_0} > M$.

La suite (u_n) étant croissante, on en déduit que $u_n > M$ pour tout $n \geq N_0$.

Ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

• Si (u_n) est une suite décroissante et non minorée, alors la suite $(-u_n)$ est croissante et non majorée.

On déduit de la première propriété que $\lim\limits_{n \to +\infty} -u_n = +\infty$.

Ce qui implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Activité 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est non majorée.
4. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

VI. Suites récurrentes

Théorème

Soit une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$ où f est une fonction.

Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a et si la fonction f est continue en a alors $a = f(a)$.

Démonstration

Il est clair que si la suite (u_n) converge vers un réel a, alors la suite (u_{n+1}) converge aussi vers a.

De plus, f étant continue en a, alors $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$, et par unicité de la limite il vient alors que $a = f(a)$.

Activité 1

Soit la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ...

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
2. a. Montrer que a_1 est irrationnel.

   b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, a_n est irrationnel.

3. Montrer que la suite (a_n) est croissante et majorée par 2.
4. Déterminer sa limite.

Activité 2

Soit la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (a_n) est croissante et majorée par 2.
2. Déterminer sa limite.

VII. Suites adjacentes

Définition et théorème

Deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions

- pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n$,
- la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante,
- la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Dans ce cas les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Démonstration

La suite (v_n) étant décroissante, il vient que $u_n \leq v_n \leq v_0$, $n \geq 0$.

D'où la suite (u_n) est majorée par v_0. De plus elle est croissante, on en déduit qu'elle converge vers un réel a.

De même la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0.

Donc la suite (v_n) converge vers un réel b.

En écrivant $v_n = (v_n - u_n) + u_n$, $n \geq 0$, et en passant à la limite, on obtient $b = a$.

Ainsi les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Activité 1

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et majorée.
2. Montrer que la suite (u_{2n+1}) est décroissante et minorée.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers un réel α.
4. a. Vérifier que $u_{2n} \leq \alpha \leq u_{2n+1}$.

   b. Calculer u_4 et u_5 et donner un encadrement de α.

   c. A l'aide de la calculatrice, déterminer un entier n permettant d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-8}.

Activité 2

Soit les deux suites (u_n) et (v_n) définies par

$u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

1. a. Montrer que la suite $(v_n - u_n)$ est une suite géométrique que l'on déterminera.

   b. En déduire que pour tout n, $u_n \le v_n$

   c. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

   d. Vérifier alors que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite α.
2. Montrer que la suite $(v_n + u_n)$ est une suite constante que l'on déterminera.
3. Déterminer u_n et v_n en fonction de n.
4. Calculer α.

Problème corrigé

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n.n!}$, $n \ge 1$.

1. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que la suite (v_n) est strictement décroissante.
2. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

   On désigne par e leur limite commune.
3. On se propose de montrer que e est un irrationnel.

   a. Justifier que $e > 0$ et que $u_n < e < v_n$, $n \ge 1$.

   b. On suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q tels que $e = \frac{p}{q}$.

   Montrer qu'il existe un entier naturel non nul a tel que $u_q = \frac{a}{q!}$.

   En déduire que $a < p(q-1)! < a + 1$.

   c. Conclure que e est un irrationnel.

Solution

1. L'égalité $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}$ implique que la suite (u_n) est strictement croissante.

   Le calcul donne $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$.

   Il en résulte que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.

2. Remarquons que pour tout $n \geq 1$, $u_n - v_n = -\dfrac{1}{n.n!}$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{n.n!}\right) = 0$.

   On en déduit que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, par conséquent elles convergent vers la même limite.

3. a. La suite (u_n) étant strictement croissante et convergente vers e, elle est majorée par e.
   Montrons que pour tout $n \geq 1$, $u_n \neq e$.
   Supposons qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $u_{n_0} = e$.
   Il en résulte que pour tout entier $m > n_0$, $u_m \leq e$ et $u_m \geq u_{n_0}$.
   Par conséquent $u_m = e$, ce qui contredit l'hypothèse (u_n) est strictement croissante.
   En conclusion, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n < e$.
   La suite (v_n) étant strictement décroissante et convergente vers e, elle est minorée par e.
   Montrons que pour tout $n \geq 1$, $v_n \neq e$.
   Supposons qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $v_{n_0} = e$.
   Il en résulte que pour tout entier $m > n_0$, $v_m \geq e$ et $v_m \leq v_{n_0}$.
   Par conséquent $v_m = e$, ce qui contredit l'hypothèse (v_n) est strictement décroissante.

   b. En réduisant au même dénominateur dans $u_q = \sum\limits_{k=0}^{q} \dfrac{1}{k!}$, on obtient $u_q = \dfrac{a}{q!}$ où a est un entier naturel non nul.
   Pour tout $n \geq 1$, $u_n < e < v_n$. En particulier, $u_q < e < v_q$.
   Il en résulte que $\dfrac{a}{q!} < \dfrac{p}{q} < \dfrac{a}{q!} + \dfrac{1}{q.q!}$, ou encore $a < p.(q-1)! < a + \dfrac{1}{q} \leq a+1$.

   c. Le résultat $a < p.(q-1)! < a + \dfrac{1}{q} \leq a+1$ est en contradiction avec l'hypothèse a et $p.(q-1)!$ sont des entiers naturels non nuls.

   Par suite, pour tous entiers naturels p et q, $e \neq \dfrac{p}{q}$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ☐ $u_n \geq n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. ☐ (u_n) est majorée par 1.

2. On donne $u_n = \dfrac{n+\cos n}{n+1}$.

☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$. ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs alors (u_n) est convergente.
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

   Si $(u_n + v_n)$ est convergente alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Si la suite $(u_n{}^2)$ converge vers L, alors on peut affirmer que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{L}$ ou vers $-\sqrt{L}$.
4. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{+\infty} u_n = \lim\limits_{+\infty} v_n$ alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Soit (u_n) une suite réelle telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes alors (u_n) est convergente.

1 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 2+\frac{1}{5^n}, n \geq 0$ et $v_n = \sqrt{4+\frac{1}{n}}, n \geq 1$.

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, l'entier n_0 à partir duquel $|u_n - 2| \leq 10^{-6}$.

3. A l'aide d'une calculatrice, déterminer l'entier n_1 à partir duquel on a $|v_n - 2| \leq 10^{-6}$.

2 On considère la suite (a_n) définie par

$$a_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+(-1)^{n+1}}, \ n \geq 0.$$

1. Déterminer a_{2n} et a_{2n+1}.

2. En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.

3 On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{2^{(-1)^n n}}{(-5)^{n+1}}, \ n \geq 0.$$

La suite (u_n) est-elle convergente ?

4 Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 1+\frac{\sqrt{n}}{2n+(-1)^n}, \ n \geq 0$.

5 Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{n}\right), \ n \geq 1$.

6 On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) telles que

$x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.33$,

$x_3 = 0.333, \ldots, x_n = 0.\underbrace{333...3}_{n \text{ chiffres}}$,

$y_1 = 0.35$, $y_2 = 0.3535$,

$y_3 = 0.353535, \ldots, y_n = 0.\underbrace{3535...35}_{n \text{ fois } 35}$,

et $z_1 = 0.35$, $z_2 = 0.3355$,

$z_3 = 0.333555, \ldots, z_n = 0.\underbrace{333...3}_{n \text{ chiffres}}\underbrace{555...5}_{n \text{ chiffres}}$.

1. a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 3\times\left(10^{-1}+...+10^{-n}\right)$.

b. En déduire que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

7 1. Vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \ n \geq 1$.

2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3, \ n \geq 0. \end{cases}$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

8 1. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n, \ n \geq 1.$$

a. Montrer que pour $n \geq 4$, $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. On considère la suite (v_n) définie par

$v_n = n^{2n} - (2n)^n, \ n \geq 1$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

9 On considère les suites (u_n) et (S_n) définies par $u_n = \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k - 1}, \ n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

10 On considère la suite (w_n) définie par

$w_n = \frac{n!}{3^n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geq \frac{4}{3}$, $n \geq 3$.

2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

11 On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \geq 0$.

1. a. Placer dans un repère orthogonal les points $A_i(i, u_i)$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{8}{9}$, $n \geq 3$.

c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=3}^{n} u_k$, $n \geq 3$.

a. Montrer que $S_n \leq 9u_3$.

b. En déduire que la suite (S_n) est convergente.

12 On considère la suite (v_n) définie par

$v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que $v_n \geq \sqrt{n}$, $n \geq 1$.

2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

13 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Etudier la convergence des suites u, v et w définies par $u_n = f\left(\frac{1}{3^n}\right)$, $v_n = f\left(2^n\right)$

et $w_n = f\left((-0.3)^n\right)$, $n \geq 0$.

14 Dans chacun des cas suivantes, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \frac{-3}{3^n - 1}$, $n \geq 1$.

2. $u_n = \frac{1}{0.8 + (0.2)^n}$, $n \geq 0$.

3. $u_n = \cos(4n) - 4^n$, $n \geq 0$.

4. $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos n$, $n \geq 0$.

5. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

6. $u_n = \frac{n^2 + \sin n}{n^3}$, $n \geq 1$.

7. $u_n = \frac{n + (-1)^n \sqrt{n}}{3n + 2}$, $n \geq 0$.

8. $u_n = \tan\left(-\frac{\pi n}{2n - 1}\right)$, $n \geq 0$.

15 Soit θ un réel appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}]$.

On considère la suite (u_n) définie par

$u_0 = 2\cos\theta$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $n \geq 1$.

1. Exprimer u_1 et u_2 en fonction de θ.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

16 On considère la suite (u_n) définie par

$u_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + \ldots + E(n\pi)}{n^2}$, $n \geq 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Montrer que pour $n \geq 1$,

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$.

2. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

17 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$.

On se propose d'étudier la limite de la suite (u_n).

1. Soit la suite (v_n) définie par

$$v_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2},\ n\geq 1.$$

Montrer que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $1^3+2^3+\ldots+n^3\leq n^4$.

3. Montrer que pour tout $x\geq 0$,

$$x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x.$$

4. Montrer que pour tout $n\geq 1$, $v_n-\frac{1}{6n^2}\leq u_n\leq v_n$.

5. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

18 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_1=1, \\ u_{n+1}=\sqrt{3u_n}\ ,\ n\geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier $n\geq 1, u_n\leq 3$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

19 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0=a \quad \text{où } a\in\left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \\ u_{n+1}=\sin(u_n),\ n\geq 0. \end{cases}$$

1. Etudier les variations sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $x\mapsto \sin x - x$.

2. En déduire que pour tout réel x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x\leq x$.

3. Montrer, par récurrence que, pour tout entier n, $u_n\in[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

5. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

20 Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+\frac{1}{x}$.

1. Etudier les variations de f et déterminer $f(]0,+\infty[)$.

2. Représenter la fonction f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ainsi que la droite d'équation $y=x$.

3. On note $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, montrer que $f(\varphi)=\varphi$.

4. On se propose de construire une suite (x_n) de rationnels qui converge vers φ.

On pose $x_0=2$ et $x_{n+1}=f(x_n)$, $n\geq 0$.

a. Calculer et représenter les réels x_1, x_2, x_3 et x_4.

b. Montrer que pour tout entier n, x_n est un rationnel positif.

c. Montrer que $|x_{n+1}-\varphi|\leq\frac{4}{9}|x_n-\varphi|$.

d. Conclure.

21 Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},\ n\geq 1.$$

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que (u_n) est croissante.

2. a. Vérifier que pour tout entier naturel $k\geq 2$, on a $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

b. En déduire que pour tout entier $n\geq 2$, $u_n\leq 2-\frac{1}{n}$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que $\frac{49}{36}\leq\ell\leq 2$.

3. Soit p un entier naturel tel que $p\geq 3$.

4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$, $n\geq 1$.

a. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n\leq u_n$.

c. En déduire que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ' et que $\ell'\leq 2$.

d. On pose $p=3$.

Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n).

En déduire un encadrement de ℓ'.

22 Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par

$u_n = \dfrac{1\times3\times5\times...\times(2n-1)}{2\times4\times6\times...\times(2n)}$ et

$v_n = \dfrac{2\times4\times6\times...\times(2n)}{3\times5\times...\times(2n+1)}$, $n\geq1$.

1. a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. En déduire qu'elle converge vers un réel positif ℓ.

2. a. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

b. En déduire qu'elle converge vers un réel positif ℓ'.

3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n.v_n$.

a. La suite (w_n) est-elle convergente ?

b. Déterminer w_n en fonction n.

c. En déduire que $\ell\ell'=0$.

4. a. Montrer que pour tout $n\geq1$, $u_n < v_n$.

b. En déduire que $\ell=0$.

c. Montrer que pour tout $n\geq1$, $2u_{n+1} > v_n$.

d. En déduire ℓ'.

23 Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=\dfrac{4x-3}{x}$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit la suite (u_n) telle que

$$\begin{cases} u_0 \in]0,+\infty[, \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n-3}{u_n}, \ n\geq0. \end{cases}$$

2. On suppose que $u_0=\dfrac{3}{4}$.

a. Calculer u_1 et représenter u_0 et u_1.

b. La suite (u_n) est-elle définie ?

3. On suppose que $u_0=3$.

a. Représenter u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que la suite (u_n) est constante.

4. On suppose que $u_0=5$.

a. Représenter u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout $n\geq1$, $u_n\geq3$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel α que l'on déterminera.

d. A l'aide d'une calculatrice, déterminer n_0 pour que $u_n-\alpha\leq10^{-5}$, $n\geq n_0$.

24 Pour chacun des cas suivants, dire si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

1. $u_n=\dfrac{2}{n}$, $v_n=-\dfrac{3}{n}$, $n\geq2$.
2. $u_n=\dfrac{n+2}{n-1}$, $v_n=\dfrac{2n+3}{2n+5}$, $n\geq4$.
3. $u_n=\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $v_n=\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1$, $n\geq2$.
4. $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}$, $v_n=2+\dfrac{3}{n}$, $n\geq2$.
5. $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $v_n=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$, $n\geq1$.

25 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=12$, $v_0=1$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$,

$v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}$, $n\geq0$.

1. Montrer que pour tout $n\geq0$, $u_n\geq v_n$.

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite α.

3. On pose pour tout $n\geq0$, $t_n=3u_n+8v_n$.

a. Montrer que (t_n) est une suite constante.

b. En déduire la valeur de α.

26 Soit un réel $a > 0$ et (b_n) la suite définie pour tout entier non nul n par $b_n = \dfrac{n}{(1+a)^n}$.

1. Montrer que $(1+a)^n \geq \dfrac{n(n-1)a^2}{2}$.

2. En déduire la limite de b_n.

3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q telle que $-1 < q < 1$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n|x_n| = 0$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$.

4. Calculer les limite suivantes

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+2}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

27 1. Montrer que pour tout entier $n > 1$ et pour tout réel non nul x de $]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. En déduire que pour tout entier $n > 1$ et pour tout réel non nul x de $]-1, 1[$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

3. Utiliser le résultat précédent pour calculer les limites des suites définies par

$u_n = 1+2\dfrac{5}{3}+...+(n+1)\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$, $n \geq 0$ et

$v_n = 2 - 2\sqrt{2} + ... + 2(n+1)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, $n \geq 0$.

28 Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 = a+b, \\ u_{n+1} = a+b-\dfrac{ab}{u_n}, \ n \geq 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que $u_2 = \dfrac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2}$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$u_{n+1} = \dfrac{b^{n+2} - a^{n+2}}{b^{n+1} - a^{n+1}}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

29 Soit (a_n) la suite définie par

$$\begin{cases} a_0, \\ a_{n+1} = a_n^2 + a_n, \ n \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que (a_n) est croissante.

2. Montrer que si (a_n) converge, alors sa limite est nécessairement nulle.

3. Montrer que si $a_0 > 0$, alors (a_n) diverge.

4. Montrer que si $a_0 < -1$, alors $a_1 > 0$.

En déduire que (a_n) diverge.

5. On suppose que $-1 < a_0 < 0$.

a. Montrer que la suite (a_n) est bornée par -1 et 0.

b. En déduire que (a_n) converge et déterminer sa limite.

6. Déterminer la limite de (a_n) lorsque

a. $a_0 = 0$.

b. $a_0 = -1$.

30 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0.1 \\ u_{n+1} = 1.6u_n(1-u_n), \ n \geq 0. \end{cases}$$

1. Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 1.6x(1-x)$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0.1 \leq u_n \leq \dfrac{3}{8}$.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n,
$\frac{3}{8}-u_{n+1}=1.6\left(\frac{5}{8}-u_n\right)\left(\frac{3}{8}-u_n\right)$.

b. On pose pour tout entier naturel n, $v_n=\frac{3}{8}-u_n$.

Montrer que $v_n \geq 0$ et en déduire que $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 0.84$.

c. Montrer alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq v_n \leq 0.84^n$.

d. En déduire la limite de (u_n).

e. Déterminer un entier naturel n_0 tel que
$0 \leq \frac{3}{8}-u_n \leq 10^{-5}, n \geq n_0$.

31 Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$f'(x)=\frac{(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})}{2x^2}$.
En déduire les variations de f.

2. On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0=E(\sqrt{a})+1 \\ u_{n+1}=f(u_n),\ n \geq 0, \end{cases}$$
où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

a. Montrer que pour tout entier n,
$\sqrt{a} < u_{n+1} < u_n \leq u_0$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b. Montrer que pour tout entier n,
$u_{n+1}-\sqrt{a} < \frac{1}{2}(u_n-\sqrt{a})$.

c. En déduire que pour tout entier n,
$0 < u_n-\sqrt{a} < \left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-\sqrt{a})$.

d. En déduire la limite de la suite (u_n).

32 1. Soit a et b deux réels tels que $0 < b < a$.

a. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

b. Montrer que $(a-b)^2 \leq a^2-b^2$.

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par

$a_0=a$, $b_0=b$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$, $n \geq 0$.

2. a. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $b_n \leq a_n$.

b. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et que la suite (b_n) est croissante.

3. a. Montrer que pour tout $n \geq 0$,
$(a_{n+1}-b_{n+1})^2 \leq \left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)^2$.

b. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $a_n-b_n \leq \frac{a-b}{2^n}$.

4. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite α.

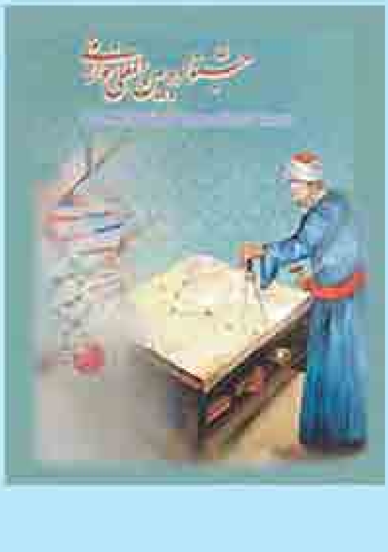
5. On suppose que $a=2$ et $b=1$.
Déterminer un entier n permettant d'obtenir un encadrement de α d'amplitude 10^{-10}.

Chapitre 3

Dérivabilité

" […] Pour résoudre ces équations, il étudie le maximum des expressions algébriques. Il prend "la dérivée première" de ces expressions qu'il annule et démontre que la racine de l'équation obtenue, substituée dans l'expression algébrique donne le maximum. […] Et comme la seule démonstration convaincante est de faire parler le texte même d'Al-Tusi, nous allons prendre trois exemples dans l'œuvre de ce mathématicien :[…], le troisième, pour dégager comment transformation affine, divisibilité et dérivée se conjuguent dans la solution de l'équation."

(R. Ras hed, Entre Arithmétique et Algèbre , 1984).



Sharaf Al-Din Al-Tusi est un mathématicien arabe qui a écrit un traité mathématique vers 1213.

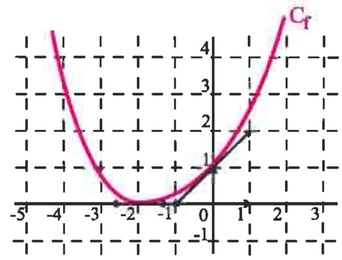
Dérivabilité

I. Rappels

Dans ce paragraphe nous rappelons les principaux résultats vus en troisième année.

Activité 1

Dans la figure ci-contre on a représenté une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses respectives -2 et 0.



1. Déterminer les nombres dérivés de f en -2 et 0.
2. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-1}{h}$ et $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{f(x)}{x+2}$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$.

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en chacun des réels 0 et 1.
2. Préciser les tangentes à C_f aux points d'abscisses 0 et 1.
3. Donner une approximation affine de chacun des réels $(1.0002)^3$ et $(2.0001)^3$.

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I s'il existe un réel, noté $f'(a)$ tel que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$.

Soit $f: x \mapsto a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ une fonction polynôme.
La fonction f est dérivable en tout réel x et $f'(x)=na_n x^{n-1}+...+a_1$.

Si f est dérivable en a, alors le réel $f(a)+f'(a)h$ est une approximation affine de f(a+h).

Activité 3

Donner une approximation affine de chacun des réels $\sin(0.0001)$; $\cos(0.0001)$.

Activité 4

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si } x \le 1, \\ (x-2)|x-2| & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I, si et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a)=f'_d(a)$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1.
   b. Montrer que f est dérivable en 2.
3. On note C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Préciser les tangentes à C_f aux points d'abscisses 0 et 2 et les demi-tangentes au point d'abscisse 1.

Activité 5

Dans chacun des cas ci-dessous, étudier la dérivabilité de la fonction f sur l'intervalle I .

$f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$, $I = \mathbb{R}$.

$f : x \mapsto \dfrac{1+x+x^2}{1-x^2}$, $I = [0, \frac{1}{2}]$.

$f : x \mapsto \dfrac{x|x+1|}{1-x^2}$, $I = [-3 , -1[$.

- Une fonction est dérivable sur un intervalle ouvert I si elle est dérivable en tout réel de I.
- Soit deux réels a et b tels que $a < b$.
Une fonction est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.
- On définit de façon analogue la dérivabilité d'une fonction sur les intervalles $[a,b[$, $]a,b]$, a et b finis ou infinis.

Nous donnons dans les deux tableaux ci-dessous les dérivées de certaines fonctions usuelles, ainsi que les règles opératoires sur les dérivées.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle	f′
$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -nx^{-n-1}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$
$x \mapsto \cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$
$x \mapsto \tan(ax+b)$	Tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition.	$x \mapsto a\left(1+\tan^2(ax+b)\right)$

Opérations sur les fonctions dérivables

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Intervalle	Fonction dérivée
$f+g$	I	$f'+g'$
af $(a \in \mathbb{R})$	I	af'
$f \times g$	I	$f' \times g + g' \times f$
$\dfrac{1}{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I \; ; \; f(x) \neq 0\}$	$\dfrac{-f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I \text{ tel que } g(x) \neq 0\}$	$\dfrac{f'g - g'f}{g^2}$
f^n , $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	I	$nf'\, f^{n-1}$
$\dfrac{1}{f^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I \; ; \; f(x) \neq 0\}$	$-nf'\, f^{-n-1}$

Activité 6

Soit α un réel et P un polynôme de degré $n \geq 2$.

On dit que α est une racine double du polynôme P s'il existe un polynôme Q de degré $(n-2)$ tel que $P(x)=(x-\alpha)^2 Q(x)$ pour tout réel x et $Q(\alpha) \neq 0$.

1. Montrer que si α est une racine double de P, alors $P(\alpha)=P'(\alpha)=0$ et $P''(\alpha) \neq 0$.
2. On suppose que $P(\alpha)=0$ et on désigne par f le polynôme tel que $P(x)=(x-\alpha)f(x)$.

Montrer que si $P'(\alpha)=0$ alors $f(\alpha)=0$.

3. Donner une condition suffisante pour que α soit une racine double de P.
4. a. Montrer que 2 est une racine double du polynôme $P(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4$.

   b. Factoriser $P(x)$.

II. Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

La dérivée f' de f est appelée la dérivée première de f.

Si la fonction f' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de f et notée $f^{(2)}$ ou f''.

Par itération, si la fonction $f^{(n-1)}$ $(n \geq 2)$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée dérivée $n^{\text{ème}}$ de f et est notée $f^{(n)}$.

La dérivée $n^{\text{ème}}$ de f est aussi appelée dérivée d'ordre n de f.

Activité 1

Donner, dans chacun des cas ci-dessous, les dérivées d'ordre 1, 2, 3 et 4 de f.

1. $f : x \mapsto 2x^3-4x^2+x-1$
2. $f : x \mapsto \sin(2x)$.

Activité 2

1. Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

a. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$, $x \in]2,+\infty[$.

b. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}}$.

III. Dérivabilité des fonctions composées

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

1. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

2. Soit h la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $h(t)=f(\sin t)$.

a. Vérifier que pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $h(t)=\cos t$.

b. En déduire que h est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et déterminer $h'(t)$.

c. Vérifier que pour tout $t\in[0,\frac{\pi}{2}[$, $h'(t)=\cos t.f'(\sin t)$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.

Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g\circ f$ est dérivable en a et $(g\circ f)'(a)=f'(a)\times g'(f(a))$.

Démonstration

Considérons la fonction $\varphi : y \mapsto \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} & \text{si } y\neq f(a), \\ g'(f(a)) & \text{si } y=f(a). \end{cases}$

La fonction g étant dérivable en $f(a)$, on en déduit que φ est continue en f(a).

La continuité de f en a implique alors que $\lim\limits_{x\to a}\varphi(f(x))=\varphi(f(a))=g'(f(a))$.

De plus, pour tout $x\neq a$ on peut écrire

$$\frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\begin{cases} \varphi(f(x))\times\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } f(x)\neq f(a), \\ 0 & \text{si } f(x)=f(a). \end{cases}$$

Il résulte alors de la dérivabilité de f en a que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a}=g'(f(a)).f'(a)$.

Corollaire

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g\circ f$ est dérivable sur I et $(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'[f(x)]$, pour tout x de I.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que la fonction est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

$f : x\mapsto\sqrt{1-\cos(\pi x)}$, $I=]0, 2[$. $g : x\mapsto \sin\left(\sqrt{\dfrac{\pi x^2}{1-x}}\right)$, $I=]-\infty, 0[$.

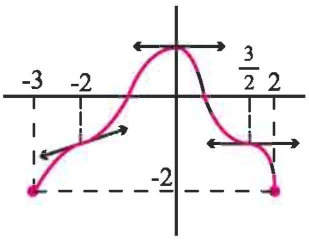
IV. Théorème des accroissements finis

Activité 1

Soit f une fonction définie sur $[-3,2]$ et dérivable sur $]-3,2[$.

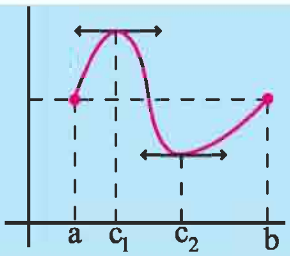
Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe C_f de f, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses -2, 0 et $\frac{3}{2}$.

Lire sur le graphique les abscisses des points de C_f en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.



Théorème de Rolle

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite des abscisses.

Démonstration

Si f est constante sur $[a, b]$, le résultat est immédiat.

Supposons f non constante sur $[a, b]$.

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint ses bornes m et M.

Soit x_0 et x_1 tels que $m = f(x_0)$ et $M = f(x_1)$. Alors l'un des réels x_0 ou x_1 appartient à $]a, b[$, car f n'est pas constante sur $[a, b]$. On en déduit que $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_1) = 0$.
Le théorème en découle.

Activité 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x + 2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
2. En déduire que $\mathscr{C}$ admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 3 et 1.

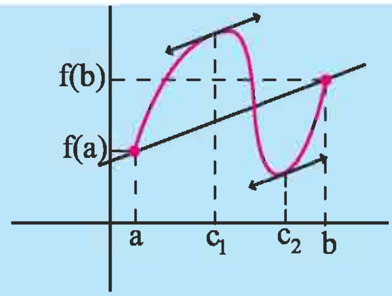
Existe-t-il des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite (AB)?

Théorème des accroissements finis

Soit a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$.

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que

$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.



Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite (AB) où A et B sont les points de C_f d'abscisses respectives a et b.

Démonstration

Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

D'après l'hypothèse faite sur f, la fonction g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $g(a)=g(b)$. On déduit du théorème de Rolle, l'existence d'un réel c de $]a, b[$ tel que $g'(c)=0$. Le théorème en découle.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=x^2\sqrt{x-1}$ et C_f sa courbe représentative.

Montrer que l'équation $f'(x)=4$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]1, 2[$ et interpréter graphiquement le résultat.

V. Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a<b)$ et dérivable sur $]a, b[$. Soit deux réels m et M.

Si $m\le f'(x)\le M$ pour tout x de $]a, b[$, alors $m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a)$.

Démonstration

Le théorème des accroissements finis justifie l'existence d'un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

L'hypothèse faite sur f' permet de déduire que $m \le f'(c) \le M$. Ce qui implique que $m(b-a) \le f'(c)(b-a) \le M(b-a)$, car $b-a>0$. Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M>0$.
Si $|f'(x)| \le M$ pour tout x de I, alors $|f(b)-f(a)| \le M|b-a|$, pour tous réels a et b de I.

Activité 1

Soit $f : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$

1. Montrer que $1 \le f'(x) \le 2$, pour tout réel x de $[0, \frac{\pi}{4}]$.

2. En déduire que $t \le \tan(t) \le 2t$, pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Activité 2

1. Montrer que $1+\frac{x}{\sqrt{6}} \le \sqrt{1+x} \le 1+\frac{x}{2}$, pour tout réel x de $[0, \frac{1}{2}]$.

2. En déduire un encadrement de $\sqrt{1+10^{-10}}$.

Activité 3

1. Montrer que pour tout réel positif x, $\sin x \le x$ et $1-\frac{x^2}{2} \le \cos x$.

2. En déduire que $x-\frac{x^3}{6} \le \sin x \le x$, pour tout réel positif x.

3. Montrer que la fonction φ définie par $\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\sin x}{x} & \text{si } x \ne 0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$ est dérivable en 0.

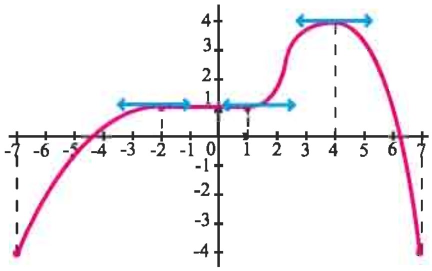
VI. Variations d'une fonction

Activité 1

Le graphique ci-contre représente une fonction f dérivable sur $[-7, 7]$.

Déterminer graphiquement les intervalles où f est strictement monotone.

Déterminer graphiquement le signe de $f'(x)$.



Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si la dérivée de f est strictement positive sur I, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Si la dérivée de f est strictement négative sur I, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

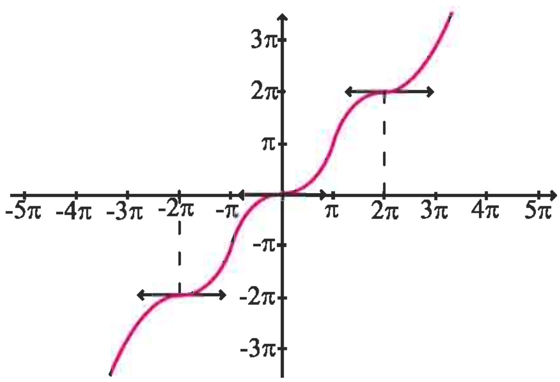
Démonstration

Supposons que $f'(x) > 0$ pour tout x de I et considérons deux réels a et b de I tels que $a < b$.
La fonction f étant dérivable sur I , elle est dérivable sur $[a, b]$.
D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. On en déduit que $f(b) - f(a) > 0$, car $f'(c)$ et $b - a$ sont strictement positifs. Ce qui prouve que f est strictement croissante sur I.
La deuxième propriété découle de la première en considérant la fonction –f.

Activité 2

On a représenté dans la figure ci-contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sin x$.

1. Déterminer graphiquement le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Déterminer la fonction dérivée f'.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$ et interpréter graphiquement le résultat.



Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement croissante sur I.
Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I, alors f est strictement décroissante sur I.

Démonstration

De l'hypothèse $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x de I, il résulte que la fonction f est croissante sur I.
Supposons qu'il existe deux réels a et b tels que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Il en résulte que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, pour tout réel x de $]a, b[$. Par suite, f est constante sur $[a, b]$ et $f'(x) = 0$ pour tout x de $]a, b[$. Ce qui contredit l'hypothèse faite sur f'.
La deuxième propriété découle de la première en considérant la fonction –f.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- Si f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $]a, b[$ alors f est croissante (respectivement strictement croissante) sur $[a, b]$.
- Si f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $]a, b[$ alors f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur $[a, b]$.

Démonstration

Soit $c < d$ deux réels de $[a, b]$. La fonction f étant continue sur $[c, d]$ et dérivable sur $]c, d[$, il existe un réel x_0 de $]c, d[$ tel que $f(d) - f(c) = (d - c)f'(x_0)$.

Le théorème en découle.

Activité 3

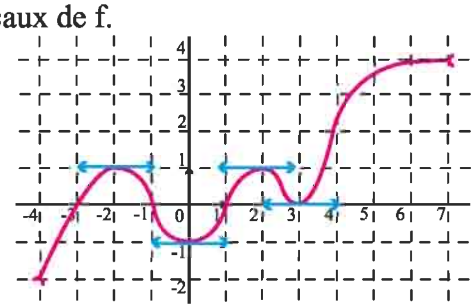
Etudier les variations de $x \mapsto \sqrt{1 - \sin^3 x}$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

VII. Extrema

Activité 1

Dans la figure ci-dessous, on a représenté une fonction f définie sur $]-4, 7[$.

Déterminer graphiquement les extrema locaux de f.

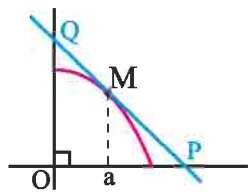


Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
On dit que f admet un maximum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(a)$.
On dit que f admet un minimum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que pour tout x de J, $f(x) \geq f(a)$.
Lorsque f admet un minimum local ou un maximum local en a on dit que f admet un extremum local en a.

Activité 2

Dans la figure ci-contre on a représenté la restriction de la fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$ sur $[0, 1]$ dans un repère orthonormé ainsi que la tangente en un point M d'abscisse a dans $]0, 1[$.

Déterminer le point M pour que l'aire du triangle OPQ soit minimale.



Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.
Si $f'(x)$ s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a.

VIII. Point d'inflexion

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x+1$

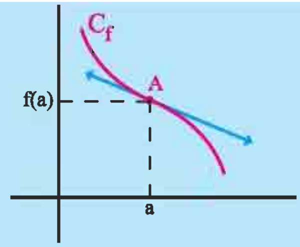
On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. Ecrire une équation de la tangente T à C_f en son point d'abscisse 0.
2. Etudier la position relative de C_f et T.
3. Etudier les variations de f puis tracer T et C_f.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel a de I et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On dit que le point $A(a,f(a))$ est un point d'inflexion de C_f si C_f traverse sa tangente en ce point.



Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}2-\sqrt{2-x} & \text{si } x<1,\\ \sqrt{x} & \text{si } x\geq 1.\end{cases}$$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que le point $I(1,1)$ est un centre de symétrie de C_f.
   b. Montrer que I est un point d'inflexion de C_f.
2. Etudier les variations de f.
3. Tracer la tangente à C_f en I et la courbe C_f.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un ensemble D, de courbe représentative C.
Soit O' le point de coordonnées (a,b).
Le point O' est un centre de symétrie de C, si pour tout x appartenant à D, $2a-x$ appartient à D et $f(2a-x)=2b-f(x)$.

Activité 3

Soit a un réel et f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h,\ a+h[$, avec $h>0$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse a.
2. Soit φ la fonction définie sur $]a-h,\ a+h[$ par $\varphi(x)=f(x)-[f'(a)(x-a)+f(a)]$.
   a. Montrer que φ est une fonction deux fois dérivable sur $]a-h,\ a+h[$.

b. Dresser, dans chacun des cas ci-dessous, le tableau de variation de φ'.

1er cas : $f''(a)=0$, $f''(x)<0$ $(\text{si } x<a)$ et $f''(x)>0$ $(\text{si } x>a)$.

2ème cas : $f''(a)=0$, $f''(x)>0$ $(\text{si } x<a)$ et $f''(x)<0$ $(\text{si } x>a)$.

c. En déduire pour les deux cas précédents que le point $I(a, f(a))$ est un point d'inflexion de C_f.

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a-h,\ a+h[$, $(h>0)$ et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
Si la fonction dérivée seconde f'' de f s'annule en a en changeant de signe, alors le point $I(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe C_f.

Activité 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-6x^2+1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que C_f admet deux points d'inflexion que l'on précisera.

IX. Exemples d'étude de fonctions

Problème résolu 1

A/ 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x+2$ et on note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Etudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$ et en déduire les branches infinies de C_g.

2. Calculer $g'(x)$ et en déduire les variations de g.
3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[-1, 0]$.
4. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
5. En déduire le signe de g.
6. Déterminer le point d'inflexion de C_g.
7. Déterminer la tangente D à C_g au point d'abscisse 0.
8. Etudier la position relative de D et C_g. Tracer C_g.

B/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$ et on note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et déterminer les branches infinies de C_f.
2. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.
3. Tracer C_f.

Solution

A/ 1. La fonction g étant une fonction polynôme, il en résulte que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$. On en déduit que C_g admet, en $-\infty$ et en $+\infty$, deux branches paraboliques de direction $(O, \vec{j})$.

Tableau de variation de g

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = 3x^2 + 3,\ x \in \mathbb{R}$.

Remarquons que $g'(x) > 0$, pour tout réel x.

On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Le calcul donne $g(-1).g(0) = -4$.

On en déduit l'existence d'un réel α dans $]-1, 0[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

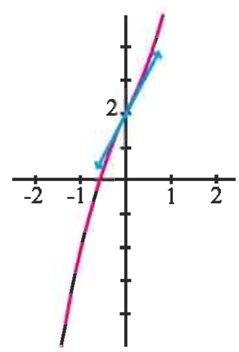
L'unicité de α résulte de la stricte monotonie de g.

4. En utilisant la dichotomie on obtient que $-0.6 < \alpha < -0.5$.

5. On déduit du tableau de variation de g que $g(x) \geq 0$, si et seulement si, $x \in [\alpha, +\infty[$.

6. La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g''(x) = 6x,\ x \in \mathbb{R}$.

La dérivée seconde de g s'annule en 0, en changeant de signe. On en déduit que $I(0, 2)$ est un point d'inflexion de C_g.



7. La tangente D à C_g a pour équation $y = 3x + 2$.

8. La position relative de D et C_g dépend du signe de $g(x) - 3x - 2$, qui est strictement positif, si et seulement si, $x > 0$. On en déduit que C_g est au dessus de D, si et seulement si $x > 0$.

B/ 1. La fonction f étant une fonction rationnelle, il en résulte que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = -\infty.$$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 1}{x^3 + x} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

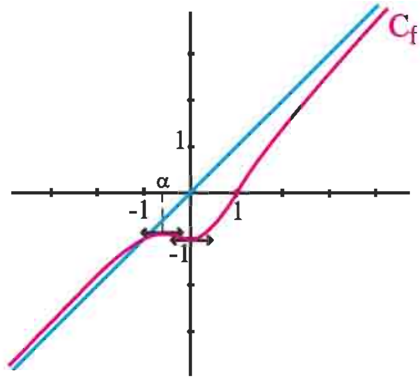
$$f(x) - x = \frac{-1-x}{x^2+1} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = 0.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à C_f.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{xg(x)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Il en résulte que $f'(x)$ et $xg(x)$ sont de même signe.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



Problème résolu 2

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Etudier les variations de f et tracer C_f.
2. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]1,2[$ une unique solution α.
3. a. Montrer que pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $|f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$.

   b. En déduire que pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $|f(x)-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|x-\alpha|$.
4. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=1+\dfrac{1}{\sqrt{u_n}}, & n\ge 0\end{cases}$.

   a. A l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-4} des sept premiers termes de cette suite.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$.

   c. En déduire que pour tout entier naturel n, $|u_n-\alpha|\le\dfrac{1}{2^n}$.

   d. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n\ge n_0$, $|u_n-\alpha|\le 10^{-2}$.

   e. Donner alors une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Solution

1. La fonction $x\mapsto 1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, en particulier sur $[1,+\infty[$

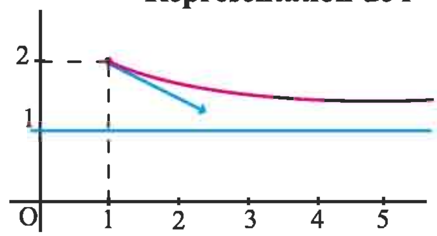
   et $f'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$, $x\ge 1$.

De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe C_f de f.

Tableau de variation de f

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	2	$\searrow$	1

Représentation de f



2. Considérons la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

   La fonction g est continue en tout réel $x \geq 1$ et vérifie $g(1) = 1$ et $g(2) = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

   L'inégalité $g(1).g(2) < 0$ implique l'existence d'un réel $\alpha \in]1, 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$ ou encore tel que $f(\alpha) = \alpha$.

   D'autre part, la fonction g est dérivable en tout réel $x \geq 1$ et $g'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}} - 1$.

   On en déduit que g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

   Par suite, le réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

3. a. L'inégalité $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ est immédiate.

   b. La fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $|f'(t)| \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout réel $t \geq 1$.

   On déduit de l'égalité $f(\alpha) = \alpha$ et de l'inégalité des accroissements finis que

   $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|x - \alpha|$, pour tout réel x de $[1, +\infty[$.

4. a. La calculatrice donne 2 ;1.7071 ; 1.7654 ; 1.7526 ; 1.7554 ; 1.7548 ; 1.7549 ; 1.7549 .

   b. On vérifie facilement que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

   Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_n \geq 1$. Il résulte alors de la question 3.b.

   que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

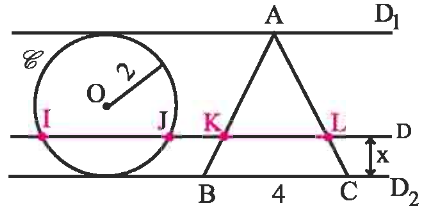
   c. En utilisant un raisonnement par récurrence, on obtient $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$, $n \in \mathbb{N}$.

   Le résultat découle du fait que $u_0 = 2$ et $1 < \alpha < 2$.

   d. On trouve $n_0 = 7$.

   e. Il suffit de prendre $\alpha = 1.7549$.

Problème résolu 3



Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 2,
D_1 et D_2 sont deux droites parallèles, tangentes à $\mathscr{C}$,
A un point de D_1, B et C sont deux points de D_2 tels que $BC = 4$ et ABC est un triangle isocèle en A.
Une droite D variable parallèle à D_1 et D_2 coupe le cercle $\mathscr{C}$ aux points I et J, le segment $[AB]$ en K et le segment $[AC]$ en L.
On pose x la distance de D à D_2 et $f(x) = IJ + KL$.

1. Montrer que $f(x) = 2\sqrt{4x - x^2} + 4 - x,\ x \in [0, 4]$.
2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0, et à gauche en 4.
   b. Montrer que f est dérivable sur $]0, 4[$ puis calculer $f'(x)$.
   c. Dresser le tableau de variation de f et en déduire la valeur maximale de $IJ + KL$.
   d. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.
3. a. Déterminer $a \in]0, 4[$ tel que $f(a) = 4$.
   b. Déterminer graphiquement suivant les valeurs du réel a, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = f(a)$. Interpréter le résultat.

Solution

1. Déterminons la distance IJ.
   Soit H le projeté orthogonal du point O sur $[IJ]$.
   Le triangle OIJ est isocèle en O, alors H est le milieu de $[IJ]$. En considérant le triangle OHI rectangle en H, on obtient
   $IJ = 2IH = 2\sqrt{OI^2 - OH^2} = 2\sqrt{4 - (2 - x)^2} = 2\sqrt{4x - x^2}$.
   Déterminons la distance KL.
   La médiatrice de $[BC]$ coupe $[KL]$ en son milieu B' et $[BC]$ en son milieu A'.
   En appliquant le théorème de Thalès dans le triangle ABA', on obtient
   $\dfrac{AB'}{AA'} = \dfrac{KB'}{BA'}$, d'où $KL = 4 - x$.
   On en déduit que $f(x) = 2\sqrt{4x - x^2} + 4 - x,\ x \in [0, 4]$.
2. a. **Dérivabilité de f à droite en 0**
   Pour tout $x \in]0, 4]$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{2\sqrt{4x - x^2} - x}{x} = 2\sqrt{\dfrac{4}{x} - 1} - 1$.
   IL suit que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty$, et f n'est pas dérivable à droite en 0.

Dérivabilité de f à gauche en 4

Pour tout $x \in [0, 4[$, $\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \frac{2\sqrt{4x-x^2}+4-x}{x-4} = \frac{-2x}{\sqrt{4x-x^2}} - 1$.

Il suit $\lim\limits_{x \to 4^-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\infty$, et f n'est pas dérivable à gauche en 4.

b. Dérivabilité de f sur $]0, 4[$.

La fonction $x \mapsto 4x - x^2$ est dérivable et strictement positive sur $]0, 4[$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{4x-x^2}$ est dérivable sur $]0, 4[$, et par suite la fonction f est dérivable sur $]0, 4[$. Pour tout $x \in]0, 4[$, $f'(x) = \frac{2(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}} - 1$.

c. Il est clair que, si $x \in [2, 4[$, alors $f'(x) < 0$.

Pour tout $x \in]0, 2]$,

$$f'(x) = \frac{5x^2 - 20x + 16}{\sqrt{4x-x^2}\left(2(2-x)+\sqrt{4x-x^2}\right)}.$$

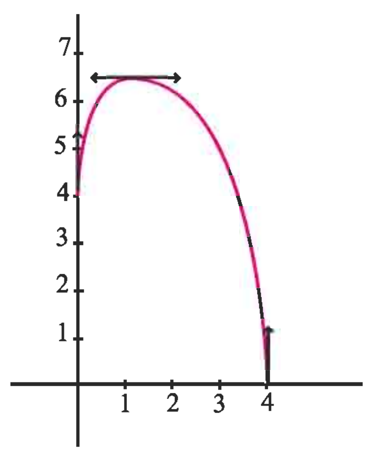
x	0		$2-\frac{2\sqrt{5}}{5}$		4
f'(x)		+	0	−	‖
f	4	↗	$2\sqrt{5}+2$	↘	0

Pour tout $x \in]0, 2]$, le signe de $f'(x)$ est celui de $5x^2 - 20x + 16$.

On en déduit le tableau de variation de f sur $[0, 4]$ et la valeur maximale de $IJ + KL$, soit $2\sqrt{5} + 2$.

3. a. Soit $a \in]0, 4[$, $f(a) = 4$, si et seulement si, $a = \frac{16}{5}$.

b. Soit $a \in]0, 4[$. Résoudre l'équation $f(x) = f(a)$, revient à déterminer les abscisses, s'ils existent, des points d'intersection de la courbe de f et de la droite d'équation $y = f(a)$.



On en déduit que

- Il existe deux solutions lorsque $a \in]0, \frac{16}{5}[$. Dans ce cas il y a deux positions possibles de la droite D qui assurent la condition $IJ + KL = f(a)$.
- Il existe une unique solution lorsque $a \in [\frac{16}{5}, 4[$.

Dans ce cas il y a une unique position possible de la droite D qui assure la condition $IJ + KL = f(a)$.

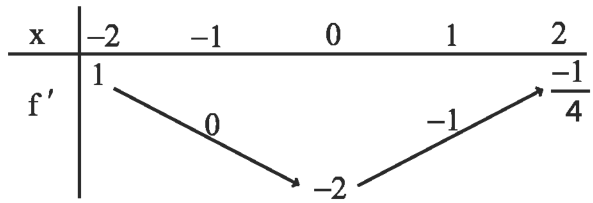
QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto \cos\left(\pi x^2\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

☐ $x \mapsto 2\pi \sin\left(\pi x^2\right)$. ☐ $x \mapsto 2\pi x \sin\left(\pi x^2\right)$. ☐ $x \mapsto -2\pi x \sin\left(\pi x^2\right)$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $[-2, 2]$ dont le tableau de variation de f' est le suivant.



• Alors

☐ $f(-2) < f(-1)$. ☐ $f(-1) < f(0)$. ☐ $f(0) < f(1)$.

• Dans un repère orthogonal, la courbe de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d'équation

☐ $y = -\frac{1}{2}$. ☐ $y = \frac{1}{2}x$. ☐ $y = -\frac{1}{2}x$.

3. L'image de $[1, +\infty[$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} - 1$ est

☐ $]0, +\infty[$. ☐ $[-1, +\infty[$. ☐ $]-\infty, 0]$.

4. La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{20}x^5 - 4x^2$ admet un point d'inflexion d'abscisse

☐ $x = 0$. ☐ $x = -2$. ☐ $x = 2$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

La courbe de f dans un repère orthogonal admet exactement

☐ deux tangentes horizontales. ☐ une tangente horizontale. ☐ aucune tangente horizontale.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction dérivable sur $[-1, 2]$ telle que $f(-1) = 2$, $f(2) = -1$.

Alors l'équation $f'(x) = -1$ admet au moins une solution dans $[-1, 2]$.

2. Si le produit de deux fonctions est dérivable en un réel a alors chacune des deux fonctions est dérivable en a.

3. Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \left(x^2 - x\right)(x - 2)$ admet exactement deux tangentes horizontales.

4. Soit f une fonction dérivable sur $[2, 5]$ telle que $|f'(t)| \leq 2$ pour $t \in [2, 5]$.

Alors $|f(5) - f(2)| \leq 6$.

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Déterminer, dans chacun des cas suivants, une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

1. $f : x \mapsto (x-1)^2(x-3)$, $a = 2$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{2x^4}{(x+2)^2}$, $a = -1$.
3. $f : x \mapsto x\left(2\sqrt{x}-3\right)$, $a = 4$.
4. $f : x \mapsto \cos^3 x + \sin x$, $a = \dfrac{\pi}{6}$.

2 1. Donner une approximation affine de $\dfrac{1}{(1+h)^2}$ pour h voisin de 0.
2. En déduire une estimation des réels
$\dfrac{1}{(1.0000000002)^2}$ et $\dfrac{1}{(0.9999999998)^2}$.

3 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto 3x^{10} - \dfrac{5}{4}x^8 + 3x - 10$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \left(1-x-3x^3\right)(x+2x)^3$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1-x}$, $I =]1, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$, $I = [1, +\infty[$.
5. $f : x \mapsto \cos(3x) - \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$, $I =]0, \pi]$.
7. $f : x \mapsto (1+\sin(2x))^3$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$, $I = [0, 1[$.
9. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$, $I =]1, +\infty[$.
10. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$, $I =]0, +\infty[$.

4 Déterminer, dans chacun des cas, les dérivées successives de la fonction f.

1. $f : x \mapsto x^5 - 2x^3 + 3x + 4$.
2. $f : x \mapsto \cos x$.
3. $f : x \mapsto \sin(2x)$.

5 Déterminer une fonction polynôme f de degré 3 telle que $f(1) = f'(1) = f''(1) = f^{(3)}(1) = 1$.

6 1. Calculer les dérivées d'ordre 3 des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par
$h(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$.
a. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
$h(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.
b. En déduire la dérivée d'ordre 3 de la fonction h.

7 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 0$ et $f'(2) = 3$.
Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f\left(\sqrt{2+x}\right)}{x-2}$.
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f\left(2\sin\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)}{x-2}$.
3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(f(x))}{x-2}$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f\left(x^2+x+2\right)}{x}$.

8 Vérifier, dans chacun des cas suivants, que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I et déterminer sa fonction dérivée.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{x}}$, $I =]0, +\infty[$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{\sin x}$, $I =]0, \dfrac{\pi}{2}]$.

3. $f: x \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, $\quad I = [1, +\infty[$.

4. $f: x \mapsto \tan(\sin x)$, $\quad I = \mathbb{R}$.

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.

1. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{1}{10}]$,
$0 \le f'(x) \le 1.234$.

2. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{1}{10}]$, on a
$1 \le f(x) < 1 + 1.234x$.

3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-8} de $f(0.0000000011)$.

10 Soit f la fonction définie sur
$[0, 1]$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$ et que pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \le \frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a
$1 - \frac{1}{2}x \le f(x) \le 1$.

3. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-10} de $f(0.0000000002)$.

11 Montrer que $|\cos x - \cos y| \le |x - y|$, pour tous réels x et y.

12 1. Montrer que
$\frac{\sqrt{2}}{2}(y - x) \le \sin y - \sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}(y - x)$, pour tous x et y de $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$, $x < y$.

2. En déduire que $\frac{\sqrt{2}}{12} \le \frac{\sqrt{2} - 1}{\pi} \le \frac{\sqrt{3}}{12}$.

13 Soit f la fonction définie sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\tan x} & \text{si } x \ne \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Montrer que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,
$-2 \le f'(x) \le -1$.

3. En déduire que pour tout $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$,
$\frac{\pi}{2} - 2x \le \frac{1 - \tan x}{\tan x} \le \frac{\pi}{4} - x$.

14 1. a. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $x \le \tan x$.

b. En déduire que la fonction $f: x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2. a. Montrer que $\frac{y - x}{\cos^2 x} \le \tan y - \tan x \le \frac{y - x}{\cos^2 y}$,
pour tous réels x et y de $[0, \frac{\pi}{2}[$ tels que $x < y$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$,
$x \le \tan x \le \frac{x}{\cos^2 x}$.

c. Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,
$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x}$.

3. Soit g la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \ne 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

15 On considère une fonction f dérivable sur $[0,\ 1]$ telle que $f(0)=f'(0)=0$ et $f(1)=0$.

Soit g la fonction définie sur $[0,\ 1]$ par

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0,\ 1]$.

2. a. Montrer qu'il existe un réel c de $]0,\ 1[$ tel que $cf'(c)-f(c)=0$.

b. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthogonal.
Montrer que $\mathscr{C}$ possède au moins une tangente passant par l'origine du repère.

16 Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y=x^2+ax+b$ dans un repère orthogonal.
Soit A et B deux points distincts de $\mathscr{P}$, d'abscisses respectives x_A et x_B.

Montrer que $\mathscr{P}$ possède au point d'abscisse $\dfrac{x_A+x_B}{2}$ une tangente parallèle à la droite (AB).

17 Soit f une fonction dérivable sur $[a,\ b]$.

1. Montrer que si la courbe de f coupe l'axe des abscisses en deux points distincts, alors elle admet au moins une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2. Montrer que si la courbe de f coupe l'axe des abscisses en n points distincts $(n\geq 2)$, alors elle admet au moins $n-1$ tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

18 Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\left(x^2-1\right)^3\left(x^4-16\right)^2.$$

Montrer que la dérivée f' de f admet au moins trois racines distinctes autres que les réels -2, -1, 1 et 2.

19 Soit f une fonction n fois dérivable sur $[a,\ b]$ et s'annulant pour $n+1$ valeurs distinctes de $[a,\ b]$ $(n\geq 1)$.

Montrer que sa dérivée $n^{\text{ème}}$ s'annule au moins une fois dans $[a,\ b]$.

20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x=0,\\ x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0.\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. a. Montrer que pour tout réel x non nul on a $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leq|x|$.

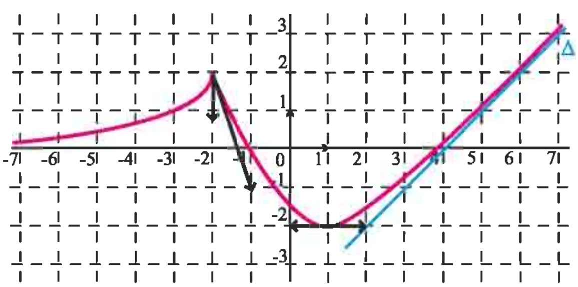
b. En déduire que f est dérivable en 0.

3. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

b. Soit n un entier naturel non nul.
Calculer $\left|f'\left(\dfrac{1}{n\pi}\right)\right|$.

c. La fonction f' est-elle continue en 0 ?

21 On a représenté ci-dessous, une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La droite Δ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$.



1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Déterminer graphiquement,

$$\lim_{x\to(-2)^-}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2},\quad \lim_{x\to(-2)^+}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2},$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{x-1},\quad \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+4\right).$$

22 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f:x\mapsto 4x^3+6x-2$.

23 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x^3+2x+2}{2x}$

24 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

25 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x+3}$.

26 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto 5x+3\sqrt{x^2-1}$.

27 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x+\sqrt{4-x^2}$.

28 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = \sin^2 x + \cos x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que 2π est une période de f.
b. Montrer que la droite des ordonnées est un axe de symétrie de C_f.
2. a. Etudier les variations de f.
b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans $[0,\pi]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
c. Tracer la représentation graphique de la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$.

30 I. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{(x-1)^2}$.

II. Soit la fonction $h : x \mapsto \frac{\sin^3 x}{(\sin x - 1)^2}$ et on désigne par C_h sa courbe dans un repère orthonormé.
1. a. Déterminer l'ensemble de définition de h.
b. Vérifier que 2π est une période de h.
c. Montrer que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour C_h.
2. a. Déterminer $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x)$.
b. En écrivant $h = f \circ \sin$, déduire le sens de variation de h sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
c. Résoudre l'équation $h'(x)=0$.
d. Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de C_h.
3. Tracer C_h.

31 1. Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{x(x+1)}{x-2}$.
2. Déterminer graphiquement, suivant les valeur de m, le nombre de solutions de l'équation
$x^2+(1-m)x+2m=0$.
3. Déterminer graphiquement, suivant les valeur de m, le nombre de solutions de l'équation
$\cos^2 x+(1-m)\cos x+2m=0$ dans $[0, 2\pi[$.

32 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)$.

33 Etudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{\cos x}{2\cos x - 1}$.

34 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} |x^2+x| & \text{si } x<0, \\ x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et en -1.
3. Etudier f et tracer C_f.

35 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3+3x^2+1$.

a. Etudier les variations de g.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α et donner une valeur approchée de α à 10^{-1} prés.

c. En déduire le signe de g.

2. Soit la fonction $f: x \mapsto \dfrac{x+x^3}{1-x^3}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a. Etudier les variations de f.

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

c. Préciser la position de C_f par rapport à T.

d. Tracer C_f et T.

36 1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=2x^3+x-2$.

a. Dresser le tableau de variation de g.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

c. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

d. Déterminer le signe de g.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^4+(x-2)^2}$.

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.

b. Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe C_f de f dans un repère orthogonal.

c. Déterminer graphiquement l'intersection de C_f et de la droite d'équation $y=x$.

37 Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur à 1 par $u_n=1+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+...+\dfrac{1}{n^3}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.

2. Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

a. Montrer que pour tout k de $[1,+\infty[$,
$$\frac{2}{(k+1)^3}\le f(k)-f(k+1)\le\frac{2}{k^3}.$$

b. Montrer que pour tout entier naturel n supérieur à 1,
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\le u_n\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}.$$

c. En déduire que (u_n) est majorée.

d. En déduire que (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

38 Soit f la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\tan x$.

1. a. Etudier f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, en précisant la demi tangente au point d'abscisse 0.

b. Montrer que pour tout réel x de $[0,\frac{\pi}{2}[$, $\tan(x)\ge x$.

2. a. Montrer que l'équation $\tan x=2x$ admet une unique solution α dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ et vérifier que $\alpha>\frac{\pi}{3}$.

b. Déterminer le signe de $\tan x-2x$ sur $[0,\frac{\pi}{2}[$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0=\frac{\pi}{3}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\tan(u_n)-u_n$.

a. Montrer que $0\le u_n\le\frac{\pi}{3}$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.

39 Pour tout entier $n\ge1$, on considère l'équation $(E_n): x^2+x^3=n$.

1. Montrer que pour tout entier $n\ge1$, l' équation (E_n) a une solution unique que l'on notera a_n.

2. a. Montrer que la suite (a_n) est croissante.

b. Montrer que la suite (a_n) n'est pas majorée.

c. Déterminer la limite de la suite (a_n).

40 I. Soit la fonction $f : x \mapsto \sin x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Représenter la restriction de f à $[-\pi, 3\pi]$.
b. Soit A et B deux points distincts de C_f.
Montrer que le coefficient directeur de la droite (AB) est compris entre -1 et 1.

II. Soit la fonction $g : x \mapsto \sin(\sin x)$ et C_g sa courbe représentative.
1. a. Montrer que 2π est une période de g.
b. Montrer que g est impaire.
c. Etudier les variations de g sur $[0, \pi]$.
d. Représenter la restriction de g à $[-\pi, 2\pi]$.

41 I. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{|x^2 - x|}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que C_f admet deux branches paraboliques dont on précisera les directions.
2. a. Montrer que f est dérivable en 0.
b. La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Interpréter graphiquement le résultat.
3. a. Etudier les variations de f.
b. Tracer C_f.
4. Soit g la restriction de f à $[0, 1]$, déterminer les extrema locaux de g.

II. Soit n un entier naturel non nul et g_n la fonction définie sur $[0,1]$ par $g_n(x) = x^n\sqrt{x(1-x)}$ et C_n sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, la courbe C_n est au dessous de la courbe C_1.
2. a. Etudier la dérivabilité de g_n à droite en 0 et à gauche en 1.
b. Montrer que la fonction g_n est dérivable sur $]0,1[$ et que $g_n'(x) = \dfrac{x^n\left(n + \frac{1}{2} - (n+1)x\right)}{\sqrt{x(1-x)}}$, $x \in]0, 1[$.
c. En déduire que pour tout entier non nul n, la fonction g_n admet un maximum local α_n que l'on précisera.
d. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

3. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = g_n(\alpha_n)$, $n \geq 1$.
a. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq u_n \leq g_1(\alpha_n)$.
c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

42 1. Montrer que l'équation $(E) : x^3 - 10x^2 - 1 = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution a et vérifier que $a \in]10, 11[$.

2. Vérifier que (E) est équivalente à $x = 10 + \dfrac{1}{x^2}$.

3. Soit f la fonction définie sur $[10, +\infty[$ par $f(x) = 10 + \dfrac{1}{x^2}$.

a. Déterminer $f([10, +\infty[)$.

b. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 10, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Montrer que $|u_{n+1} - a| \leq \dfrac{1}{500}|u_n - a|$.

Déterminer les six premières décimales de a.

Chapitre 4

Fonctions réciproques

C'est le 29 novembre 1873 […] que Cantor écrit à Dedekind qu'il voudrait lui "soumettre une question qui a pour moi un certain intérêt théorique, mais à laquelle je ne puis répondre". Il s'agissait de savoir s'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. […] La lettre de Cantor du 7 décembre 1873 contient la première démonstration de la non-existence d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $]0, 1[$.

[…] C'est seulement trois ans plus tard, le 20 juin 1877, que Cantor envoie à Dedekind sa première démonstration […] de la bijection entre $[0, 1]$ et $[0, 1]\times[0, 1]$, […], écrit-il " […]. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : je le vois, mais je ne le crois pas"

(J.Dieudonné, Abrégé d'Histoire des Mathématiques, 1978)

Chapitre 4

Fonctions réciproques

I. Définition

Activité 1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par $g(x)=2x^2-3$.

1.a. Déterminer $g(]-\infty, 0])$.

b. Montrer que pour tout réel y de $[-3, +\infty[$, l'équation $g(x)=y$ admet une unique solution dans $]-\infty,0]$ que l'on déterminera.

2. Soit h la fonction définie sur $[-3, +\infty[$ par $h(x)=-\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$.

Montrer que pour tout réel y de $]-\infty, 0]$, l'équation $h(x)=y$ admet une unique solution dans $[-3, +\infty[$.

3. Déterminer $g\circ h$ et $h\circ g$.

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (ou que f est une bijection de I sur $f(I)$), si pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans I.

Théorème

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

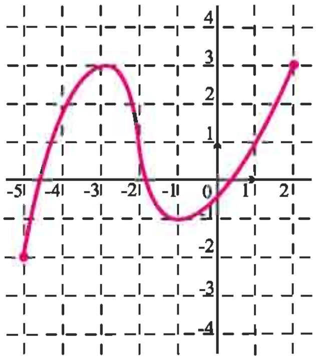
Démonstration

Soit y un réel de $f(I)$. Par définition de $f(I)$, il existe un réel x de I tel que $f(x)=y$.
L'unicité résulte de la stricte monotonie de f.

Activité 2

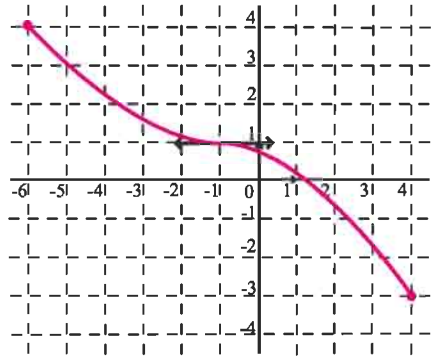
Parmi les fonctions f_i, $i\in\{1, 2, 3, 4\}$ représentées ci-après, identifier celles qui réalisent une bijection de I sur $f_i(I)$.

①



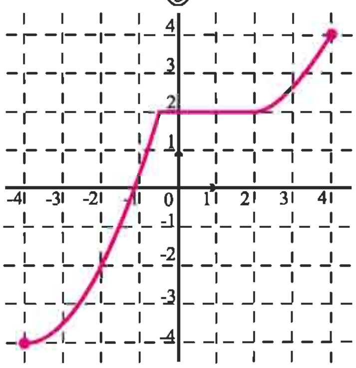
$I=[-5,2]$ $f_1(I)=[-2,3]$

②



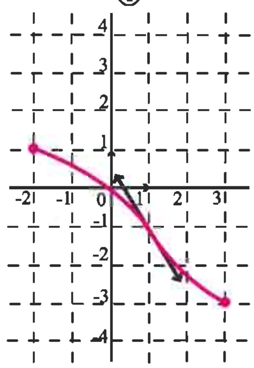
$I=[-6,4]$ $f_2(I)=[-3,4]$

③



$I=]-4,4[$ $f_3(I)=]-4,4[$

④



$I=[-2,3[$ $f_4(I)=]-3,1]$

Définition

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout y de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x)=y$.

Conséquence

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque.

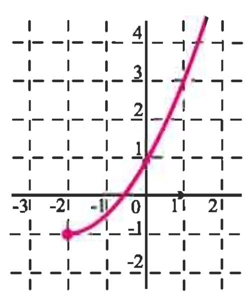
Pour tout x de I et tout y de $f(I)$, $f(x)=y$, si et seulement si, $f^{-1}(y)=x$.

$f^{-1}\circ f(x)=x$, pour tout x de I et $f\circ f^{-1}(y)=y$, pour tout y de $f(I)$.

Activité 3

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé une bijection de $[-2,+\infty[$ sur $[-1,+\infty[$.

Déterminer $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(3)$.



Activité 4

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

   a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$.

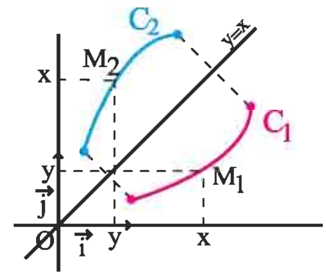
2. Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

   a. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.

   b. Déterminer g^{-1}.

Représentation graphique de f^{-1}.

Soit f une bijection de I sur $f(I)$ et C_1 et C_2 les courbes respectives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé.
Soit $M_1(x,y)$ un point du plan et $M_2(y,x)$ son symétrique par rapport à la droite $\Delta : y = x$.



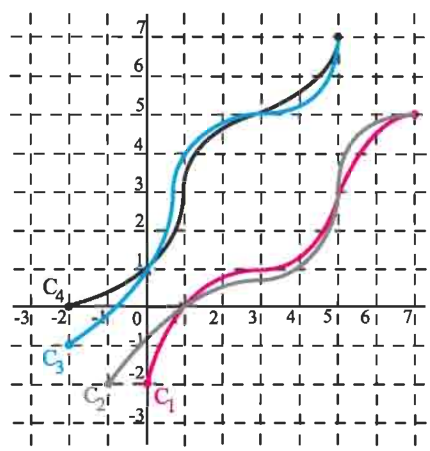
$$M_1(x,y) \in C_1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow M_2 \in C_2.$$

Conséquence

Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Dans la figure ci-contre, on a représenté les courbes de deux bijections f et g définies respectivement sur $[0,7]$ et $[-2,5]$, ainsi que les courbes de leurs fonctions réciproques.
Identifier la courbe de chacune des fonctions f, f^{-1}, g et g^{-1}.



II. Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f.

Démonstration

- La continuité de f^{-1} est admise.
- Supposons, par exemple que f est strictement croissante sur I.

Soit $y_1 < y_2$ deux réels de $f(I)$ et soit x_1 et x_2 les réels de I tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Si l'on avait $x_1 \geq x_2$, on en déduirait que $f(x_1) \geq f(x_2)$, c'est à dire $y_1 \geq y_2$.

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $y_1 < y_2$. Par suite $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ et f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, continue sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Donner les valeurs de $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; $f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $f^{-1}(1)$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

1. a. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b. Expliciter $f^{-1}(y)$, pour $y \in J$.
2. En utilisant la relation $f \circ f^{-1}(y) = y$, pour tout $y \in]0, \frac{1}{2}[$, montrer que

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Théorème

Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur $f(I)$, a un réel de I et $b = f(a)$.

Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Ce résultat reste valable lorsqu'il s'agit de dérivée à droite ou à gauche en a.

Démonstration

Soit y un réel de $f(I)$ différent de b et soit $x = f^{-1}(y)$. Alors x est distinct de a et appartient à I.

On peut alors écrire $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{x - a}{f(x) - f(a)} = \dfrac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$.

Lorsque y tend vers b, $x = f^{-1}(y)$ tend vers $a = f^{-1}(b)$ car f^{-1} est continue en b.

On en déduit que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$. Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

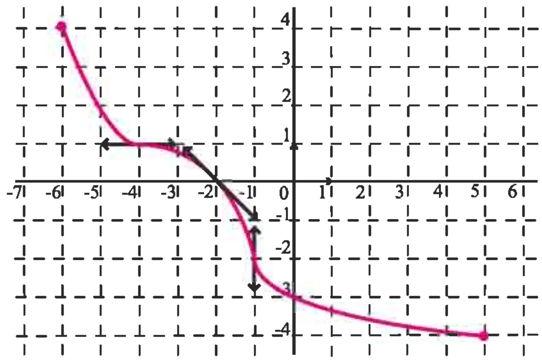
Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]},\ \text{pour tout } y \text{ de } f(I).$$

Activité 3

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé une bijection f de $[-6, 5]$ sur $[-4, 4]$ ainsi que les tangentes au points d'abscisses -4, -2 et -1.

Etudier la dérivabilité de la fonction f^{-1} aux points d'abscisses -2, 0 et 1.



Activité 4

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \cos x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Tracer C_f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
3. a. Etudier la dérivabilité de f^{-1} en 0 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.

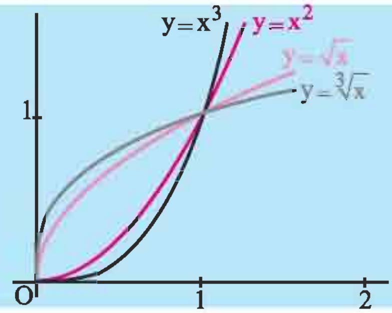
   b. Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -1 et à gauche en 1.
4. Tracer la courbe de f^{-1} dans le même repère orthonormé.

III. Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$

Théorème et définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée fonction racine $n^{\text{ème}}$.



Notation

L'image d'un réel positif x par la fonction racine $n^{\text{ème}}$ est noté $\sqrt[n]{x}$ et se lit « racine $n^{\text{ème}}$ de x ». Lorsque $n = 2$ et pour x positif $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

Conséquence

- Pour tous réels positifs x et y , $y = x^n$, si et seulement si, $x = \sqrt[n]{y}$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Les opérations sur les radicaux découlent immédiatement de la définition de la fonction racine $n^{\text{ème}}$.

Conséquence

Soit deux entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b. Alors

$\sqrt[n]{a^n} = a$. $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. $\quad \sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$. $\quad \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$.

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$. $\quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$. $\quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Activité 1

Ecrire plus simplement les réels $\sqrt[6]{64}$, $\sqrt[6]{2^{-12}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$, $\sqrt[3]{2^6.3^3}$, $\dfrac{\sqrt[8]{16}}{\sqrt[8]{81}}$, $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$.

Activité 2

1. Comparer $\sqrt[6]{2^4}$ et $\sqrt[4]{2^3}$.
2. Soit un réel $x \geq 0$.Comparer $\sqrt[6]{x^4}$ et $\sqrt[4]{x^3}$.

Théorème

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $f: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus, $f'(x) = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, pour tout $x > 0$.

Démonstration

La fonction $g : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et admet une dérivée ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que sa fonction réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, $\left(g^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x^{n-1}}\right)}$, $x > 0$.

Activité 3

Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \geq 2$. Interpréter.

IV. Fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$

Théorème

Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier $n \geq 2$.
La fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$. De plus, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}\right)}$, pour tout x de I tel que $u(x) > 0$.

Démonstration

La fonction f est la composée de la fonction $x \mapsto u(x)$ et de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.
Le théorème découle des propriétés de la composée de deux fonctions.

Exercice résolu 1

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2+1}$ et C_f sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$, pour tout réel x.
2. Etudier les branches infinies de C_f.
3. Etudier les variations de f et construire C_f.
4. Soit g la restriction de f à $[0, +\infty[$.
   a. Montrer que g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b. Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives de f et g^{-1}.

Solution

1. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \dfrac{2x}{3\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}\right)}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Remarquons que la fonction f est paire. Il suffit donc d'étudier la branche infinie en $+\infty$.
On sait que $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} (x^2+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \mapsto +\infty} \sqrt[3]{X} = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De plus, on peut écrire pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x} = \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^3}}$.

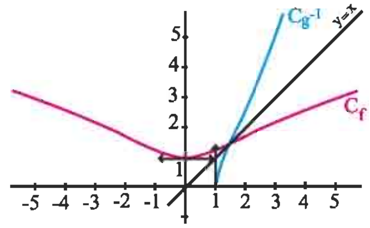
Il en résulte que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Ainsi, C_f admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$.
La parité de f nous permet de déduire que C_f admet, au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$.

Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$

Courbes de f et g^{-1}



4. La fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. On en déduit que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)$.

De la continuité de g, on déduit que $g([0,+\infty[)=[1,+\infty[$.

Exercice résolu 2

I. On considère la fonction k définie sur $[0,+\infty[$ par $k(x)=-2x^4+x^3+1$.
Dresser le tableau de variation de k. En déduire le signe de k.

II. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{1}{2x}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
3. On se propose d'étudier la position de C et T.
   Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-x+\dfrac{1}{2}$.
   a. Montrer que $g'(x)=\dfrac{k(\sqrt{x})}{2x^2}$, $x>0$.
   b. En déduire le tableau de variation de g. Conclure.
4. Tracer T et C.
5. a. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
   b. On désigne par C' la courbe représentative de f^{-1} et par T' la tangente à C' au point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$. Montrer que T et T' sont parallèles.
   c. Tracer dans le même repère T' et C'.

Solution

I. La fonction k est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\geq 0$, $k'(x)=x^2(3-8x)$.
On donne ci-contre le tableau de variation de k.

x	0		$\frac{3}{8}$		$+\infty$
$k'(x)$	0	$+$	0	$-$	
k	1	$\nearrow$	$1+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{8}\right)^3$	$\searrow$	$-\infty$

En remarquant que $k(1)=0$ et en utilisant le tableau de variation de k,
on obtient $k(x)>0$ si $x<1$, $k(x)=0$ si $x=1$ et $k(x)<0$ si $x>1$.

II. 1. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2x^2}$.

On en déduit le tableau de variation de f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

2. Le calcul donne $f(1)=\dfrac{1}{2}$ et $f'(1)=1$. On en déduit qu'une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 est $y=x-\dfrac{1}{2}$.

3. a. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x>0$, $g'(x)=f'(x)-1=\dfrac{k\left(\sqrt{x}\right)}{2x^2}$.

b. On déduit de la question précédente que pour tout $x>0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $k\left(\sqrt{x}\right)$.

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ étant positive et strictement croissante et en utilisant le signe de la fonction k, on déduit le tableau de variation de g. La fonction g admet le réel 0 pour maximum absolu, donc pour tout $x>0$, $g(x)\le 0$ ou encore $f(x)\le x-\dfrac{1}{2}$.

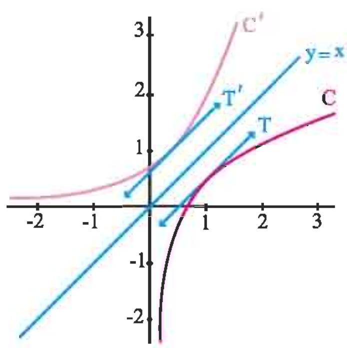
x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
g	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

On en déduit que la courbe C est au-dessous de la tangente T.

5. a. La fonction f étant continue strictement croissante, elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$.

b. La tangente T' à la courbe C' est la symétrique de T par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.
Les droites Δ et T ont même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.
On en déduit que T et T' sont parallèles.

c. La courbe C' est la symétrique de la courbe C par rapport à la droite d'équation $y=x$.



QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x$.

   f réalise une bijection de I sur $[-1, 1]$.

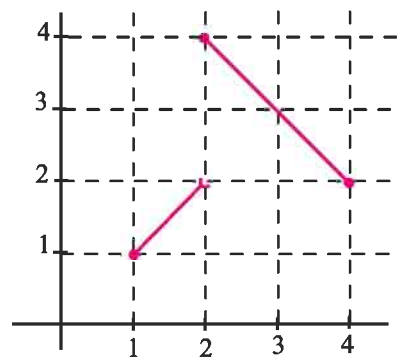
   ☐ $I=[0, 2\pi]$. ☐ $I=[0, \pi]$. ☐ $I=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x)=\cos x$.

   $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$ est égal à

   ☐ $\frac{2}{\sqrt{3}}$. ☐ -2. ☐ $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. Soit f une fonction dont la représentation graphique est ci-contre. f réalise une bijection de



   ☐ $[1, 4]$ sur $[1, 4]$.
   ☐ $[1, 2]$ sur $[1, 2]$.
   ☐ $[1, 3]$ sur $[1, 3]$.

4. La fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est dérivable sur

   ☐ $[0, +\infty[$. ☐ $]0, +\infty[$. ☐ $\mathbb{R}^*$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$ telle que $f(1)=2$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 3$.

   Alors f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, 3[$.
2. Toute fonction affine réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout réel $x > 0$, $\sqrt[4]{x} \geq \sqrt[3]{x}$.
4. La fonction réciproque de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt[n]{x}$ est dérivable à droite en 0.
5. Si f est strictement monotone et dérivable sur un intervalle I et si f garde un signe constant sur I, alors sa réciproque garde un signe constant sur $f(I)$.

1 Montrer, dans chacun des cas, que la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

1. $f(x)=1-4x$; $I=]-\infty,1]$.
2. $f(x)=x^2-4x+1$; $I=[2,+\infty[$.
3. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$; $I=]-1,+\infty[$.
4. $f(x)=\sqrt{x-3}+x$; $I=[3,+\infty[$.

2 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=ax+b$ où a et b sont deux réels tels que $a\neq 0$.

1. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer a et b pour que $g^{-1}=g$.

3 Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}x^4-x^2$.

1. Etudier f et tracer sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé.
2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b. Tracer dans le même repère la courbe représentative de sa fonction réciproque f^{-1}.
c. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J.

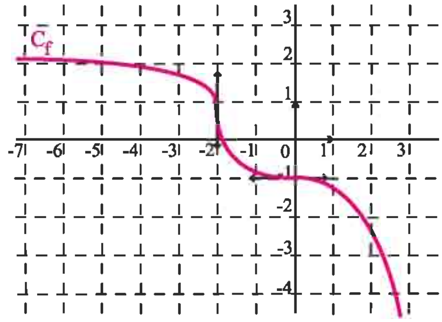
4 Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\cos(\pi x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Tracer dans le même repère les courbes représentatives de chacune des fonctions f et f^{-1}.
3. Montrer que pour tout x de J, $f^{-1}(x)+f^{-1}(-x)=1$. Interpréter graphiquement.

5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{4+x}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f en 0.
2. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.
b. Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

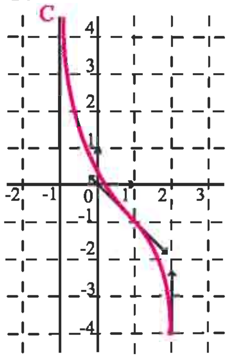
6 Le graphique ci-dessous représente la courbe d'une fonction f bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.



On désigne par g la fonction réciproque de f.

1. Que peut-on dire de la dérivabilité de g en -1 et en 1 ?
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Reproduire la courbe de f et représenter dans le même repère la courbe de g.

7 Le graphique ci-dessous représente la courbe C d'une fonction f bijective de $]-1,2]$ sur $[-4,-\infty[$.
La courbe C admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.



On désigne par g la fonction réciproque de f.

1. Que peut-on dire de la dérivabilité de g en -1 et en -4 ?
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Reproduire la courbe de f et représenter dans le même repère la courbe de g.

8 A/ Soit g la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par $g(x)=\sin(2x)-x$.

1. Etudier les variations de g.
2. Montrer que l'équation $\sin(2x)=x$ admet une unique solution α dans $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$.

B/ Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x)=\sin(2x)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Ecrire une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
b. Montrer que l'origine du repère est un point d'inflexion de la courbe C_f.
2. Etudier f et tracer C_f.
3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ sur $[-1, 1]$.
On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1}.
b. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.
4. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

9 Soit la fonction f définie sur $[0, 1[$ par

$$f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}.$$

1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement.
b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
c. Tracer C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle I à préciser.
On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ la courbe représentative de f^{-1}.
3. a. La fonction f^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 ?
b. Calculer $f^{-1}(x)$, pour tout réel x de I.
c. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

10 Soit f la fonction définie sur $[-1, 1[$ par

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et calculer $f'(x)$.
b. Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et interpréter graphiquement.
c. Déterminer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ et interpréter graphiquement.
d. Dresser le tableau de variation de f.
2. a. Ecrire une équation de la tangente T à C_f en son point A d'abscisse 0.
b. Etudier la position relative la position relative de C_f et T. Construire C_f et T.
3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1[$ sur un intervalle J.
On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa représentation graphique.
b. Tracer $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. a. Montrer que le point $I(-1, 0)$ est un centre de symétrie de C_f.
b. Montrer que I est un point d'inflexion de C_f.
3. a. Montrer que la droite $\Delta: y=x$ coupe C_f en un seul point d'abscisse α et que $0<\alpha<1$.
b. Déterminer la position relative de la courbe C_f et la droite Δ.

4. Construire C_f et sa tangente T au point I.
5. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa représentation graphique.
b. Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

12 Soit g la fonction définie sur $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ par $g(x)=\tan(\pi x)$.
1. Etudier g et tracer sa courbe C_g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. Montrer que g réalise une bijection de I sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-\infty, 0[$.
4. Soit G la fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par
$G(x)=g^{-1}(x)+g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.
a. Montrer que G est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et déterminer $G'(x)$.
b. En déduire que pour tout x de $]-\infty, 0[$,
$g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}-g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$.

13 Soit h la fonction définie sur $]0, \pi]$ par
$h(x)=\text{cotan}\left(\frac{x}{2}\right)$.
1. Montrer que h réalise une bijection de $]0, \pi]$ sur $\mathbb{R}_+$.
On note φ sa fonction réciproque.
2. a. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\varphi'(x)=\frac{-2}{1+x^2}$.
b. On désigne par Ψ, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\psi(x)=\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.
Calculer la dérivée de la fonction Ψ sur $]0, +\infty[$.
c. Calculer $\varphi(1)$ et en déduire que pour tout $x>0$, $\varphi(x)+\psi(x)=\pi$.

14 A/ Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
2. On désigne par g la restriction de f à $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.
a. Montrer que g réalise une bijection de $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ sur I que l'on déterminera.
On notera g^{-1} la fonction réciproque de g.
b. Donner les propriété de g^{-1} et déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de I.
3. Soit la suite (u_n) définie par
$u_0=\frac{1}{2}$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
a. Montrer que pour tout entier naturel n, $0\le u_n\le\frac{1}{2}$.
b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

15 Pour tout entier naturel $n\ge 2$, on considère la fonction f_n définie sur $[0, 1]$ par
$f_n(x)=x^n+x^{n-1}+...+x-1$.
1. Montrer que f_n réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[-1, n-1]$.
2. a. En déduire que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution α_n dans $]0, 1[$.
b. Montrer que pour tout $n\ge 1$, $(\alpha_n)^{n+1}=2\alpha_n-1$.
3. a. Montrer que la suite (α_n) est décroissante.
b. En déduire que la suite (α_n) est convergente et calculer sa limite.

16 A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x+\sqrt{x^2+8}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$.
b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2. Etudier les variations de f.
3. Monter que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
On notera f^{-1} la fonction réciproque de f et $C_{f^{-1}}$ sa représentation graphique.
4. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=x$.
b. Préciser les coordonnées des points d'intersection de C_f et $C_{f^{-1}}$.
5. Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B/ 1. Montrer que $f([1,2])\subset[1,2]$.
2. Montrer que $|f'(x)|\leq\frac{2}{3}$, pour tout x de $[1,2]$.
3. Soit (u_n) la suite définie par
$\begin{cases} u_0=1, \\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $1\leq u_n\leq 2$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n,
$\left|u_{n+1}-\sqrt{\frac{8}{3}}\right|\leq\frac{2}{3}\left|u_n-\sqrt{\frac{8}{3}}\right|$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{\frac{8}{3}}$.

17 1. Simplifier les nombres ci-dessous.
$x=\frac{\sqrt[3]{3}.\sqrt{27}.\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{81}}$; $y=\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{32}}$; $t=\sqrt[3]{8^2}$.

2. Montrer que $\frac{\sqrt[3]{1024}.\sqrt{\sqrt{64}}.\sqrt[5]{7776}}{\sqrt{18}\sqrt{\sqrt[3]{256}}}=16$.

3. a. Développer $\left(2+\sqrt{5}\right)^3$.

b. Simplifier $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}-\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$.

18 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

1. $\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{2}$.
2. $\sqrt[5]{x^2}=\sqrt[3]{3}$.
3. $\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2=0$.
4. $\left(1-\sqrt[4]{x}\right)^3+8=0$.

19 Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2-x+1}$; $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{\frac{x^2+x}{\sin x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt[3]{x}$;

$\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$.

20 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=x^2+\sqrt[4]{x}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
On notera f^{-1} la fonction réciproque de f.
3. Tracer les courbes de f et de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

21 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=x\sqrt[3]{x}$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
2. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.
3. Etudier les variations de f.
4. Ecrire une équation de la tangente à C au point d'abscisse 1. Tracer C.
5. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On désigne par h la fonction réciproque de f.
b. Montrer que h est dérivable en 1 et calculer $h'(1)$.
c. Déterminer les abscisses des points d'intersection de la droite $\Delta: y=x$ et de C.
d. Tracer la courbe de h.

22 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt[4]{x^2-1}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Vérifier que f est une fonction paire.

2. a. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $f(x)=\sqrt{x}\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^2}}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b. Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

c. Etudier les variations de la fonction f.

4. a. On désigne par Δ la droite d'équation $y=x$. Etudier la position relative de la courbe C_f et de la droite Δ.

b. Tracer la courbe C_f.

5. a. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

c. Tracer la courbe C' de f^{-1} dans un même repère.

23 A/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt[3]{x}-\frac{x}{3}+3$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Monter que pour tout réel $x>0$,
$$f(x)=x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{3}\right)+3.$$

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c. Etudier la nature de la branche infinie de C_f.

2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.

b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$.

c. Etudier les variations de la fonction f.

d. Montrer que l'équation $f(x)=0$, admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

e. Tracer la courbe C_f.

24 A/ Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=x^{2n+1}+3x-2$.

On note C_n la courbe de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Dresser le tableau de variation de f_n.

b. Montrer que le point $I(0,-2)$ est un centre de symétrie de C_n.

c. Déterminer le point d'inflexion de C_n.

2. a. Etudier la position relative de C_n et C_{n+1}.

b. En déduire que toutes les courbes C_n passent par trois points fixes I, A et B que l'on déterminera.

3. a. Montrer que f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b. Etudier la dérivabilité de f_n^{-1} sur $\mathbb{R}$ et calculer $\left(f_n^{-1}\right)'(-6)$, $\left(f_n^{-1}\right)'(-2)$ et $\left(f_n^{-1}\right)'(2)$.

4. a. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution x_n et que $0<x_n<\frac{2}{3}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$$x_n=\frac{2-x_n^{2n+1}}{3}.$$

c. Montrer que pour tout entier naturel non nul n,
$$0\leq x_n^{2n+1}\leq\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}.$$

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{2n+1}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

B/ On suppose que $n=1$.

On désigne par f la fonction f_1 et par α le réel x_1.

1. Soit la fonction φ définie sur $[0,\frac{2}{3}]$ par
$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

a. Montrer que $\varphi\left([0,\frac{2}{3}]\right)\subset[0,\frac{2}{3}]$.

b. Montrer que pour tout x de $[0,\frac{2}{3}]$,
$$\varphi(x)-\alpha=(x-\alpha)^2\frac{(2x+\alpha)}{3\left(x^2+1\right)}.$$

c. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{2}{3}]$,

$$\frac{(2x+\alpha)|x-\alpha|}{3(x^2+1)} \le \frac{2}{3}.$$

d. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{2}{3}]$, $|\varphi(x)-\alpha| \le \frac{2}{3}|x-\alpha|$.

2. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $0 \le u_n \le \frac{2}{3}$.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{2}{3}|u_n-\alpha|$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers α et vérifier que $\alpha = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

25 A/ Soit f la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}.$$

On désigne par C_1 sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
b. Etudier les variations de f.
c. Ecrire une équation de la tangente T à C_1 au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
d. Tracer C_1 et T.
2. Sur le même graphique, tracer C_2 la courbe représentative de la fonction $(-f)$.
3. Soit $C = C_1 \cup C_2$. Montrer que C a pour équation cartésienne $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$.

B/ Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$, $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OA]$ et Δ la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.
Une droite D passant par O, recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en N et la tangente Δ en Q. On désigne par M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NQ}$. On désigne par Γ l'ensemble des points M lorsque la droite D varie.

1. Donner une équation cartésienne de Δ et $\mathscr{C}$.
2. On désigne par m le coefficient directeur de la droite D. Ecrire une équation cartésienne de D.
3. a. Montrer que les coordonnées de N sont $\left(\frac{1}{1+m^2}, \frac{m}{1+m^2}\right)$.
b. En déduire que les coordonnées de M sont $\left(\frac{m^2}{1+m^2}, \frac{m^3}{1+m^2}\right)$.
c) Vérifier que M appartient à la courbe C.
4. Soit $M(x, y)$ un point de C.
a) Montrer que si $x = 0$ alors $M \in \Gamma$.
b) On suppose que x est non nul et on pose $m = \frac{y}{x}$.
Exprimer x et y en fonction de m.
En déduire que M appartient à Γ.
c. Montrer que $\Gamma = C$.

C/ Soit t un réel strictement positif et D_t la droite d'équation $y = tx$.
La droite D_t coupe Γ en M et Δ en Q.
La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en P.

1. a. Montrer que les coordonnées de P sont $(0, t^3)$.
b. Vérifier que $AQ = t$.
2. En déduire une construction d'un segment de longueur $\sqrt[3]{t}$, en utilisant la courbe Γ.

26 A/ Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

1. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.
On notera f^{-1}, la fonction réciproque de f.
b. Calculer $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. a. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$.
b. Calculer $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.
c. Montrer que pour tout x de $[0, 1[$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Tracer dans un repère orthonormé C_f et $C_{f^{-1}}$.

4. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $f\left(\frac{1}{n^2}\right) \le v_n \le f\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

5. Montrer que l'équation $\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2}x$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$. Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

B/ 1. Soit la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $g(x) = f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x)$.

a. Montrer que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$.

b. Montrer que pour tout x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f^{-1}(\sin x) + f^{-1}(\cos x) = 1$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $h(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

a. Etudier les variations de h et dresser son tableau de variation.

b. En déduire $h\left([0, \frac{1}{2}]\right)$.

3. Soit la fonction k définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par $k(x) = f^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

Montrer que k est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$ et calculer $k'(x)$. En déduire que pour tout x de $[0, \frac{1}{2}]$, $f^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2f^{-1}(x)$.

27 A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que f est continue à droite en 0.
b. Montrer que f est dérivable à droite en 0.
c. Etudier la position de C_f par rapport à sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
d. Etudier les variations de f.
e. Etudier la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$ puis construire C_f.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à déterminer.
b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.
c. Construire la courbe C' de la fonction f^{-1} dans le même repère.

B/ On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[0, 1]$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, $n \ge 0$.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \le 1$.
b. Vérifier que $g(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}, x \in]0, 1]$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_n$.
c. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n \le \frac{1}{2^n}$, puis que (u_n) est convergente.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{2u_{n+1}}{1-(u_{n+1})^2}.$$

b. En déduire que $u_n = \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$.

3. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 2^n.u_n$, $n \in \mathbb{N}$..
Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

28 A/ Soit f la fonction définie sur $I=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=\sqrt{1+\tan x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $I=]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et calculer $f'(x)$.

b. Etudier la dérivabilité de f à droite en $-\frac{\pi}{4}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c. Dresser le tableau de variation de f et construire C_f.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser.

b. On désigne par g la bijection réciproque de f. Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(\sqrt{2})$.

c. Construire la courbe C_g de g dans le même repère.

3. Montrer que g est dérivable sur J et que pour tout x de J, $g'(x)=\dfrac{2x}{x^4-2x^2+2}$.

4. Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}g(k),\ n\in\mathbb{N}.$$

a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $g(n)\le u_n\le g(2n)$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

B/ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$

par $h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}g\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right) & \text{si } x>0,\\ \dfrac{\pi}{4} & \text{si } x=0.\end{cases}$

1. a. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b. Monter que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $h'(x)=\dfrac{-1}{2(x^2+1)}$.

2. a. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe un réel $c\in]0,x[$ tel que $h(x)-\frac{\pi}{4}=\dfrac{-x}{2(c^2+1)}$.

b. En déduire que h est dérivable à droite en 0 et que $h'_d(0)=-\frac{1}{2}$.

c. Dresser le tableau de variation de h.

3. a. Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}_+$ une solution unique α et que $\alpha\in]0,1[$.

b. Montrer que pour tout réel $x\in\mathbb{R}_+$, $|h'(x)|\le\frac{1}{2}$.

4. Soit la suite (v_n) définie par

$$\begin{cases}v_0\in\mathbb{R}_+\setminus\{\alpha\},\\ \text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=h(v_n).\end{cases}$$

a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|v_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|v_n-\alpha|$.

b. En déduire que la suite (v_n) est convergente et donner sa limite.

Chapitre 5

Primitives

" Nous appellerons la fonction fx, fonction primitive, par rapport aux fonctions f'x, f''x, &c.qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, fonctions dérivées, par rapport à celle-là"

(Lagrange, 1797)
(Cité dans E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000)

Chapitre 5

Primitives

I. Définition

Activité 1

Soit les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+4x-1$ et $F(x)=x^3+2x^2-x+2$.

Vérifier que $F'=f$.

Déterminer une fonction G dérivable sur $\mathbb{R}$ et distincte de F telle que $G'=f$.

Définition

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$, pour tout x de I.

Activité 2

Dans chacun des cas ci-dessous, vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $F(x)=\frac{1}{x}$; $f(x)=-\frac{1}{x^2}$; $I=[1,+\infty[$.
2. $F(x)=x^2$; $f(x)=2x$; $I=\mathbb{R}$.
3. $F(x)=\tan x$; $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$; $I=]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Théorème (admis)

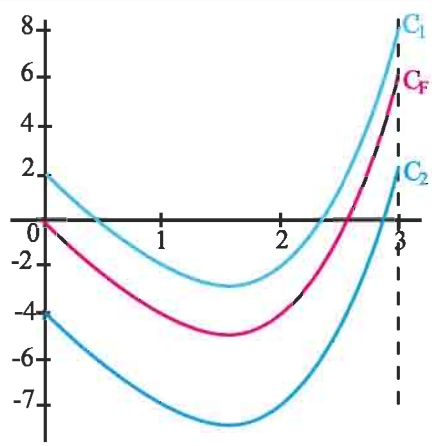
Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté la courbe C_F de la fonction F définie sur $[0, 3]$ par

$F(x)= x^3-x^2-4x$.

Les courbes C_1, C_2 sont les images respectives de C_F par des translations de vecteurs colinéaires à $\vec{j}$.



On désigne par G_1, G_2 les fonctions de courbes respectives C_1, C_2.

1. Déterminer la dérivée f de F. Que représente F pour f ?
2. Déterminer G_1, G_2 .
3. Soit H une primitive de f sur $[0, 3]$. Justifier que la courbe de H est l'image de celle de F par une translation.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors la fonction $F-G$ est constante sur I.

Démonstration

Les fonctions F et G étant des primitives de f sur I, il en résulte que $F'(x)-G'(x)=0$, pour tout x de I. Ce qui implique que $F-G$ est constante sur I.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de I et y_0 un réel. Alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0)=y_0$.

Démonstration

L'unicité découle du théorème précédent.
D'autre part, soit G une primitive de f sur I.
La fonction F définie sur I par $F(x)=G(x)-G(x_0)+y_0$ est la primitive de f qui prend la valeur y_0 en x_0.

Activité 4

On considère les fonctions f, g et h définies sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{2}{(x+2)^2} \ ; \ g:x\mapsto \sin x+\cos x \ ; \ h:x\mapsto \sin x-\cos x .$$

Identifier parmi les fonctions suivantes celles qui sont des primitives sur $]0, +\infty[$ de l'une des fonctions précédentes.

$$F_1 : x\mapsto 2\sqrt{x}-\frac{2}{x+2}-4 \ ; \ F_2 : x\mapsto \pi-\sin x-\cos x \ ; \ F_3 : x\mapsto -\sin x-\cos x-1 \ ;$$

$$F_4 : x\mapsto \sin x-\cos x+\pi \ ; \ F_5 : x\mapsto \sin x-\cos x .$$

Activité 5

Soit F et f les fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2$ et $f(x)=\sqrt{x}-x$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la primitive G de f sur $]0, +\infty[$ telle que $G(1)=2$.

II. Primitives des fonctions usuelles et opérations

Dans le tableau ci-dessous F désigne une primitive de la fonction f sur l'intervalle I et a, c, ω et φ des réels avec $\omega \neq 0$.

f	I	F
$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$	$]0, +\infty[$ (ou $]-\infty, 0[$)	$x \mapsto \dfrac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$x \mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{\omega}\cos(\omega x + \varphi) + c$
$x \mapsto 1 + \tan^2 x$	$]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$	$x \mapsto \tan x + c$

Le théorème ci-dessous découle des opérations sur les fonctions dérivables.

Théorème

Soit F et G deux primitives respectives de deux fonctions f et g sur un intervalle I.
- La fonction $F + G$ est une primitive sur I de $f + g$.
- Soit λ un réel. La fonction λF est une primitive sur I de λf.

Activité 1

Déterminer, dans chaque cas, une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto -2x^2 + 3x$, $\quad I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto -\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$, $\quad I =]0, +\infty[$.
3. $f : x \mapsto -2\cos x + 5\sin x$, $\quad I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto \cos(-2x) + \sin(5x)$, $\quad I = \mathbb{R}$.

5. $f : x \mapsto \tan^2(x)$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

6. $f : x \mapsto \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4}$, $I = [-3, -1]$.

Activité 2

La quantité d'une substance chimique produite au cours des dix premières secondes d'une expérience a été de 12g. Au bout de t secondes du début de l'expérience, le taux de production instantané (en g/s) de cette substance a été de $Q'(t) = \frac{40}{t^2} + \frac{200}{t^3}$, $t \geq 10$.

1. Déterminer la fonction Q qui à tout $t \geq 10$ associe la quantité $Q(t)$ produite au bout de t secondes.
2. Tracer dans un repère la courbe de la fonction Q.
3. Peut-on avoir 20 g de quantité produite ? Pourquoi ?

III. Calcul de primitives

Dans le tableau suivant F désigne une primitive de la fonction f sur un intervalle I et u et v désignent deux fonctions dérivables sur I.

f	Condition	F
$u'u^n$, n entier naturel non nul		$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'v + v'u$		$u.v$
$\frac{u'}{u^n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	u ne s'annule pas sur I	$\frac{u^{-n+1}}{-n+1}$
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I	$\frac{u}{v}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	u strictement positive sur I	$2\sqrt{u}$
$u' \sqrt{u}$	u positive sur I	$\frac{2}{3} u \sqrt{u}$
$u' \sqrt[n]{u^{1-n}}$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	u est strictement positive sur I	$n\sqrt[n]{u}$
$u' (w' \circ u)$	w une fonction dérivable sur $u(I)$	$w \circ u$

Activité 1

Vérifier dans chaque cas que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

1. $f : x \mapsto (2x-1)(x^2-x+3)$, $\quad I = \mathbb{R}$, $\quad x_0 = 1$ et $y_0 = 2$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{6x-1}{(3x^2-x)^2}$, $\quad I =]1,+\infty[$, $\quad x_0 = 2$ et $y_0 = 0$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{\tan^3 x}{\cos^2 x}$, $\quad I =]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, $\quad x_0 = -\dfrac{\pi}{4}$ et $y_0 = -1$.
4. $f : x \mapsto 2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$, $\quad I =]0,+\infty[$, $\quad x_0 = 1$ et $y_0 = -1$.
5. $f : x \mapsto \sqrt{2-x}$, $\quad I =]-\infty, 2]$, $\quad x_0 = 1$ et $y_0 = 0$.

Activité 2

Un physicien étudie le mouvement d'une particule.
La vitesse initiale de la particule est de 3m/s et t secondes après le début de l'expérience, son accélération (en cm/s^2) est de $a(t) = 1 - \dfrac{1}{2\left(\sqrt{t+1}\right)^3}$.

1. Déterminer la vitesse de la particule t secondes après le début de l'expérience.
2. Déterminer la distance parcourue par la particule t secondes après le début de l'expérience.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 10}{(x-2)^2}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{(x-2)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]2,+\infty[$.

Activité 4

1. Soit f la fonction telle que $f(x) = \sin^2 x$.

Utiliser l'égalité $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ pour déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin^3 x$.

Utiliser l'égalité $\sin^3 x = \sin x\left(1-\cos^2 x\right)$ pour déterminer une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos^2 x$.

Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

Exercice résolu

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Etudier f et tracer C_f.

   b. En déduire que pour tout réel t de $[0,+\infty[$, $\dfrac{2}{3}\leq f(t)\leq 1$.

2. Soit F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.

   a. Montrer que pour tout réel x de $[0,+\infty[$ on a $\dfrac{2}{3}x\leq F(x)\leq x$.

   b. En déduire la limite de F en $+\infty$.

   c. Dresser le tableau de variation de F.

3. Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $G(x)=F\left(x^2\right)$.

   a. Montrer que G est dérivable à droite en 0.

   b. Etudier les variations de G sur $[0,+\infty[$.

   c. Donner l'allure de la courbe de G dans un autre orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Solution

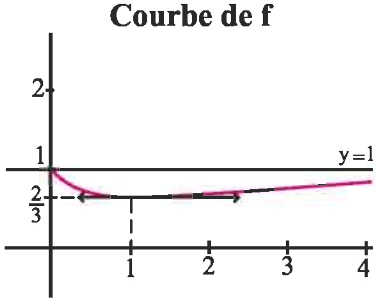
1. a. La fonction f est une fonction rationnelle et $1+x+x^2\neq 0$ pour tout réel x, donc f est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$.

   Le calcul donne $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{\left(1+x+x^2\right)^2}, x\geq 0$.

Tableau de variations de f

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		−	0	+	
f	1	↘	$\frac{2}{3}$	↗	1

Courbe de f



   b. D'après le tableau de variation de f, $\dfrac{2}{3}\leq f(t)\leq 1$, $t\in[0,+\infty[$.

2. a. La fonction F est une primitive de f sur $[0,+\infty[$, elle est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $F'(t)=f(t)$, $t\geq 0$.

   De la question 1. b on déduit que $\dfrac{2}{3}\leq F'(t)\leq 1$, $t\geq 0$.

On applique le théorème des inégalités des accroissements finis sur $[0, x]$, $x \geq 0$.
Le résultat en découle.

b. Pour tout réel x de $[0, +\infty[$,

$\frac{2}{3}x \leq F(x) \leq x$. De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

x	0		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
F	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, $\frac{G(x)}{x} = \frac{F(x^2)}{x}$. De plus, $\frac{2}{3}x^2 \leq F(x^2) \leq x^2$.

Il en résulte que $\frac{2}{3}x \leq \frac{F(x^2)}{x} \leq x$, $x \in]0, +\infty[$ et par suite $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x^2)}{x} = 0$.

On conclut que G est dérivable à droite en 0 et $G'_d(0) = 0$.

b. La fonction $G = F \circ u$ avec $u : x \mapsto x^2$.
Les fonctions F et u sont dérivables sur $[0, +\infty[$ et $u([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.
Il en résulte que la fonction G est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $G'(x) = f(x^2).2x$

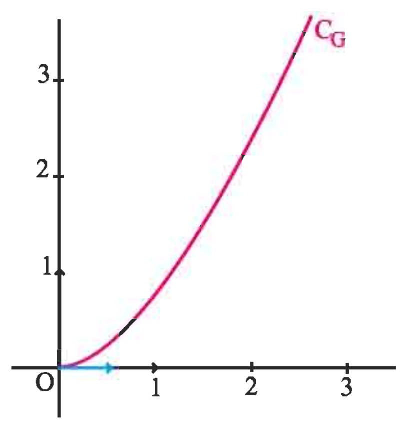
x	0		$+\infty$
$G'(x)$	0	$+$	
G	0	$\nearrow$	$+\infty$

c. Etude de la branche infinie en $+\infty$.

$\frac{2}{3}x \leq \frac{G(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{3}x = +\infty$

alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{G(x)}{x} = +\infty$.

La courbe de G admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.



QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto \tan x$ est la primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0 de la fonction

☐ $x \mapsto 1+\tan^2 x$. ☐ $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2 x}$. ☐ $x \mapsto \sin^2 x$.

2. La primitive de la fonction $x \mapsto \sin x$ sur $\mathbb{R}$, qui s'annule en 0 est la fonction

☐ $x \mapsto 1-\cos x$. ☐ $x \mapsto -\cos x$. ☐ $x \mapsto \cos x - 1$.

3. La primitive qui s'annule en 0 de la fonction $x \mapsto 1+\cos x$ sur $\mathbb{R}$ est

☐ paire. ☐ impaire. ☐ ni paire ni impaire.

4. La primitive sur $]-1, +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3}$, qui s'annule en 0 est

☐ $x \mapsto \dfrac{1}{2(1-x)^2} - \dfrac{1}{2}$. ☐ $x \mapsto \dfrac{1}{4(1-x)^4} - \dfrac{1}{4}$. ☐ $x \mapsto \dfrac{-1}{2(1-x)^2} + \dfrac{1}{2}$.

5. La primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x\cos x$, qui prend la valeur 1 en 0 est

☐ $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\sin x + 1$. ☐ $x \mapsto x\sin x + \cos x$. ☐ $x \mapsto \cos x - x\sin x$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction continue est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction $x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

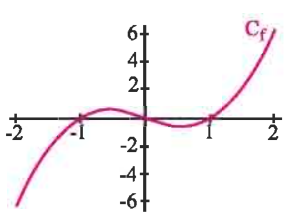
$$x \mapsto \begin{cases} -\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

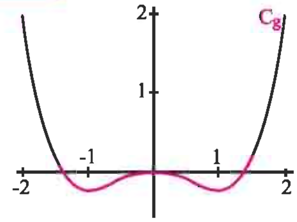
3. Si F est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ et G est une primitive d'une fonction g sur $\mathbb{R}$ alors F.G est une primitive de f.g sur $\mathbb{R}$.
4. Si F est une primitive d'une fonction f sur $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \mapsto F(2x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto f(2x)$ sur $\mathbb{R}$.
5. Si deux primitives d'une fonction f sur un intervalle I coïncident en un réel x_0 de I alors elles sont égales.

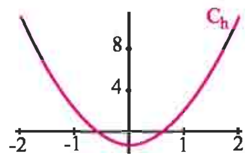
1 Déterminer les primitives F sur I de chacune des fonctions f ci-dessous.

1. $f : x \mapsto -5x^4 + 2x - 3,$ $\quad I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto x + 2 - \dfrac{3}{x^2},$ $\quad I =]-\infty, 0[$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\left(3x^2+2\right)^2},$ $\quad I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto (-x+3)^6,$ $\quad I = \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto (x-1)\left(x^2-2x+7\right)^4,$ $\quad I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-4x+3}},$ $\quad I =]-\infty, \dfrac{3}{4}[$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}},$ $\quad I =]0, +\infty[$.
8. $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{\left(x^3+3x\right)^5},$ $\quad I =]-\infty, -\sqrt{3}[$.
9. $f : x \mapsto \sin(2x+1)\cos^4(2x+1),$ $\quad I = \mathbb{R}$.
10. $f : x \mapsto x^2 \sin\left(x^3+1\right),$ $\quad I = \mathbb{R}$.
11. $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{(\cos x + 1)^3},$ $\quad I =]-\pi, \pi[$.
12. $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+4x-2}{x^4},$ $\quad I =]-\infty, 0[$.
13. $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}},$ $\quad I =]1, +\infty[$.
14. $f : x \mapsto \tan^2 x,$ $\quad I =]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

2 On a représenté ci-dessous les courbes de trois fonctions g , f et h, définies et dérivables sur $[-2,2]$.







1. On sait que f admet une primitive parmi les fonctions g et h sur $[-2,2]$. Laquelle ? Justifier la réponse.
2. On sait que h admet une primitive parmi les fonctions f et g sur $[-2,2]$. Laquelle ? Justifier la réponse.

3 Déterminer une primitive sur I de chacune des fonctions ci-dessous.

1. $f : x \mapsto \sqrt{x+1},$ $\quad I = \mathbb{R}_+^*$.
2. $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1},$ $\quad I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto (x-3)\sqrt{x^2-6x},$ $\quad I = [6, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}},$ $\quad I =]1, +\infty[$.

(On pourra écrire $f(x)$ sous la forme $a\sqrt{x-1} + \dfrac{b}{\sqrt{x-1}}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$).

5. $f : x \mapsto \left(x^2+x\right)^7\left(x+\dfrac{1}{2}\right),$ $\quad I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\sqrt{\dfrac{3+x}{2x}},$ $\quad I = \mathbb{R}_+^*$.
7. $f : x \mapsto x(x+1)^{2008},$ $\quad I = \mathbb{R}$.

(On pourra vérifier que $f(x) = (x+1)^{2009} - (x+1)^{2008}$).

4 Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f possède des primitives sur l'intervalle I et déterminer sa primitive F vérifiant $F\left(x_0\right) = y_0$.

1. $f(x) = \tan x + \tan^3 x,$ $\quad I = [0, \dfrac{\pi}{2}[,$ $\quad F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1.$

2. $f(x)=\cos x-\cos^3 x$, $I=\mathbb{R}$, $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

3. $f(x)=\sin x-\sin^3 x$, $I=\mathbb{R}$, $F\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2$.

4. $f(x)=\frac{1+\tan x}{\cos^2 x}$, $I=[0,\frac{\pi}{2}[$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

5 1. Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=\cos x.\cos(3x)$ et $g(x)=\sin x.\sin(3x)$.
a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions $f+g$ et $f-g$.
b. En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g.
2. Déterminer la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π de la fonction h définie par
$h(x)=(1+\cos x)\sin(4x)$.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x)=x\sin x$.
1. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f(x)=2\cos x-f''(x)$.
2. En déduire la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en π.

7 Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x^2+2}{(x+1)^4}.$$

On se propose de déterminer des réels a, b, c et d tels que pour tout x de $]-1,+\infty[$,

$$f(x)=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}+\frac{d}{(x+1)^4}.$$

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4 f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)f(x)$.
b. En déduire que $d=3$ et $a=0$.
2. a. Vérifier que pour tout réel x de $]-1,+\infty[$,
$\frac{x-1-c}{(x+1)^3}=\frac{b}{(x+1)^2}$.
b. En déduire les valeurs des réels b et c.
3. Déterminer la primitive de f sur $]-1,+\infty[$ égale 2 en 0.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par

$$f(x)=\frac{2x+1}{(x-2)^3}.$$

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x)=\frac{a}{(x-2)^2}+\frac{b}{(x-2)^3}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]-\infty,2[$.

9 On considère la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Soit F la primitive de f sur $]-1,1[$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=F(\sin x)$.

1. Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. En déduire que pour tout $x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $g(x)=x$.
3. Calculer $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{2}\right)$ et $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10 On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.
Soit F la primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0, et g la fonction définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $g(x)=F(\cos x)$.

1. Montrer que g est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. En déduire que pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,
$g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{\pi}{4}$.
3. Calculer $F(1)$ et $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

11 Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivable sur I telles que :
1. $f''(x)=0$, $I=\mathbb{R}$.
2. $f''(x)=\sin x$, $I=\mathbb{R}$.

12 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=|x|$.

a. Montrer que f admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 4.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$g(x)=|x|+|x-1|$.
a. Montrer que g admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.
b. Déterminer une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\sin^3(x)+\sin^5(x)$.

Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

14 Un mobile sur un axe subit une accélération $a(t)$ dépendant du temps t (en secondes) tel que

$a(t)=1-\dfrac{1}{(t+1)^2}$, $t\in[0,10]$.

A l'instant $t=0$, le mobile est placé à l'origine de l'axe avec une vitesse nulle.
1. Déterminer l'expression de sa vitesse instantanée $v(t)$.
2. Déterminer sa vitesse et sa position pour $t=10$.

15 Soit f la fonction définie sur $[-2,2]$ par

$f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

1. a. Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2,2]$.

b. Soit F la primitive de f sur $[-2,2]$ qui s'annule en 0. Etudier la parité de F.

2. Soit G la fonction définie sur $[0,\pi]$, par $G(x)=F(2\cos x)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a. Montrer que le point $I\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ est un centre de symétrie de C.

b. Calculer $G'(x)$. En déduire que pour tout x de $[0,\pi]$, $G(x)=\pi-2x+\sin(2x)$.

c. Calculer alors $F(1)$, $F(2)$ et $F(\sqrt{2})$.

16 Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$.

1. Exprimer $\sqrt{x^2+1}$ à l'aide de $u(x)$ et $u'(x)$.
2. Déterminer des primitives pour chacune des fonctions ci-dessous.

$$f:x\mapsto\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$g:x\mapsto\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

17 Soit les fonctions $f:x\mapsto x\cos x$ et $g:x\mapsto x\sin x$.

1. En calculant $f'(x)+g(x)$, trouver une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.
2. En procédant de même, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

18 Pour tout entier naturel n supérieur à 2, on considère la fonction P_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$P_n(x)=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$.

1. Déterminer la primitive F_n de P_n sur $\mathbb{R}$ égale à 1 en 0.
2. Déduire une autre expression de $P_n(x)$.

19 1. Soit g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$g(x)=x\sin x+\cos x-1$.

a. Etudier les variations de g sur $[0,\pi]$.

b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution α appartenant à $\left]\dfrac{2\pi}{3},\pi\right[$.

Préciser le signe de $g(x)$.

2 Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & \text{si } x\in]0,\pi],\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
b. Etudier les variations de f sur $[0,\pi]$.

c. Vérifier que $f(\alpha)=\sin\alpha$.

3. On donne $\alpha \simeq 2{,}34$ et $f(\alpha)\simeq 0{,}72$.
Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4. Déduire de ce qui précède que la restriction de f à $[\alpha,\pi]$ est une bijection de $[\alpha,\pi]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

5. On pose $h(x)=g(x)-2\cos x$, $x\in[0,\pi]$.
Montrer que h admet des primitives sur $[0,\pi]$.
Donner la primitive H de h sur $[0,\pi]$ qui prend la valeur 1 en 0.

20 Pour tout réel x, on pose $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et on désigne par G la primitive de φ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

1. Montrer que G est une fonction impaire.

2. a. On pose pour tout x de $\mathbb{R}^*$,
$\psi(x)=G(x)+G\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Montrer que ψ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\Psi(x)=2G(1)$.

b. On pose $u(t)=G(\tan t), t\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
Calculer $u'(t)$ et en déduire $u(t)$.

3. Déterminer $G(1)$ et en déduire
$\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)$.

4. Construire la courbe représentative de G dans un repère orthonormé.

21 Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par
$f(x)=\sqrt{1+\cos x}$.

1. a. Montrer que f est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[0,\sqrt{2}]$.

b. Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $]0,\sqrt{2}[$ et expliciter $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

2. Soit g la fonction définie sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ par
$g(x)=\dfrac{2}{\sqrt{2-x^2}}$.
On note G la primitive de g sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ telle que $G(0)=0$.

a. Calculer la dérivée de la fonction $x\mapsto G(x)+G(-x)$. En déduire que G est impaire.

b. Montrer que pour tout x de $[0,\sqrt{2}[$,
$G(x)=\pi-f^{-1}(x)$. En déduire $G(1)$.

22 Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On suppose que
$f(0)=1$, $f(1)=0$ et $f'(x)=\dfrac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $x\in]0,1[$.

1. Montrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

2. a. Montrer que pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}]$,
$f(\cos x)=\dfrac{2}{\pi}x$.

b. En déduire $f^{-1}(x)$ pour tout x de $[0,1]$.

3. On pose pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}]$,
$h(x)=f(\cos x)+f(\sin x)$.

a. Montrer que h est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et calculer $h'(x)$.

b. En déduire que pour tout x de $[0,\frac{\pi}{2}]$, $h(x)=1$.

4. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose
$\varphi_n(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)-x^n$, $x\in[0,1]$.

a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $a_n\in]0,1[$ tel que $\varphi_n(a_n)=0$.

b. Montrer que pour tout x de $]0,1[$, si $n>p$ alors $\varphi_n(x)>\varphi_p(x)$.

c. En déduire que la suite (a_n) est strictement croissante et convergente.

Chapitre 6

Intégrales

La parabole considérée par Thabit Ibn Qurra est définie par une propriété que nous traduisons aujourd'hui par l'équation $y^2=px$ et la quadrature de la parabole est équivalente à notre calcul de l'intégrale $\int_0^a \sqrt{px}$.

Mais le calcul immédiat d'une telle intégrale, [...], aurait exigé la sommation de [...] $\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}$.

Ibn Qurra étudie cette difficulté en recourant à un artifice astucieux. [...].

(AP. Youschkevitch,
Les mathématiquesarabes, 1976).

Thabit Ibn Qurra est un mathématicien arabe qui vécut au Xe siècle

Chapitre 6

Intégrales

I. Définition

I.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère la fonction g définie par

$$g(x)=\begin{cases}-x-1 & \text{si } x<-2,\\ 1 & \text{si } -2\leq x\leq 1,\\ 3x-2 & \text{si } x>1.\end{cases}$$

> Le plan étant muni d'un repère orthogonal. $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'unité d'aire, notée par u.a est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.

1. Tracer la courbe représentative de g.
2. Hachurer la partie $\mathcal{P}$ du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de g et les droites d'équations $x=-3$ et $x=3.5$.
3. Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.

Activité 2

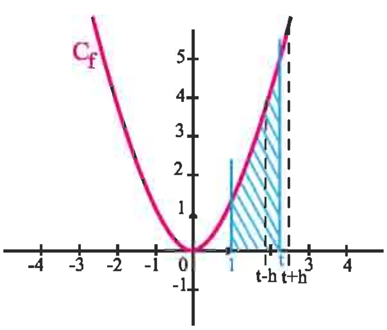
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $[-1,\ 1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C_f de f et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$.

1. Représenter la courbe C_f.
2. Calculer $\mathcal{A}$.

Activité 3



Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.

On a tracé ci-contre la courbe C_f de f.

Soit $t\in[1,+\infty[$ et $\mathcal{A}(t)$ l'aire de la partie limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=t$.

On se propose de déterminer $\mathcal{A}(t)$ pour tout $t\in[1,+\infty[$.

On désigne par $\mathcal{A}$ la fonction $t\mapsto\mathcal{A}(t)$.

1. Que vaut $\mathcal{A}(1)$?
2. Soit $h>0$.
   a. Montrer que $hf(t)\leq\mathcal{A}(t+h)-\mathcal{A}(t)\leq hf(t+h)$.

b. En déduire que la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable à droite en t et que $\mathcal{A}'_d(t) = f(t)$.

3. Soit $t \in]1, +\infty[$ et $1 < t - h < t$.

   a. Montrer que $hf(t-h) \leq \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(t-h) \leq hf(t)$.

   b. En déduire que la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable à gauche en t et que $\mathcal{A}'_g(t) = f(t)$.

4. a. Montrer que $\mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}$, $t \geq 1$.

   b. Quelle est l'aire de la partie limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$?

5. Soit F une primitive de f sur $[1, +\infty[$. Montrer que $F(t) - F(1) = \mathcal{A}(t) - \mathcal{A}(1)$, $t \geq 1$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous a et b de I, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

Démonstration

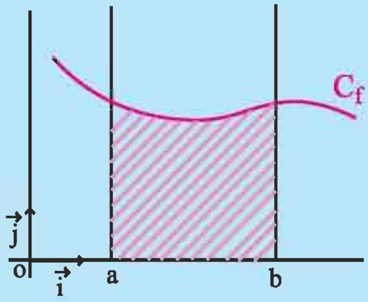
Les fonctions F et G étant des primitives de f sur I, la fonction $F - G$ est constante sur I. On en déduit que pour tous réels a et b de I, $F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$. La propriété en découle.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $F(b) - F(a)$.

Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b et est noté $\int_a^b f(x)dx$.



Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - x$.

1. Représenter la partie $\mathcal{P}$ du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.
2. Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.

I.2 Intégrale d'une fonction continue

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I.

On appelle intégrale de f entre a et b le réel, noté $\int_a^b f(x)dx$, défini

par $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Vocabulaire et notations

- Le réel $\int_a^b f(x)dx$ est appelé intégrale de f sur $[a,b]$, ou encore de a à b, ou encore entre a et b.
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x)dx$, on peut remplacer la lettre x par n'importe quelle lettre et on peut écrire $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$. On dit que x est une variable muette.
- Pour toute primitive F de f, on écrit $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$.

L'expression $[F(x)]_a^b$ se lit « $F(x)$ pris entre a et b ».

Activité 1

Calculer $\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x^4-1)dx$, $\int_0^1 \sin(\pi x)dx$, $\int_{-1}^{1}\frac{2x}{(x^2+1)^2}dx$.

Activité 2

1. Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.
2. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe de $-f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
3. En déduire que l'aire de la partie limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$ est égale à $\int_1^2 -f(x)dx$.

II. Propriétés algébriques de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c des réels de I. Alors

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \ ; \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \ .$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \text{ (Relation de Chasles).}$$

Démonstration

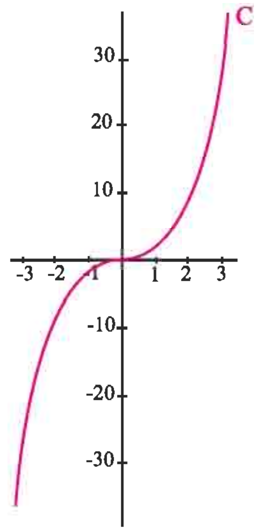
Soit F une primitive de f sur I.

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0 .$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f(x)dx .$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \big(F(c) - F(a)\big) + \big(F(b) - F(c)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx .$$

Activité 1

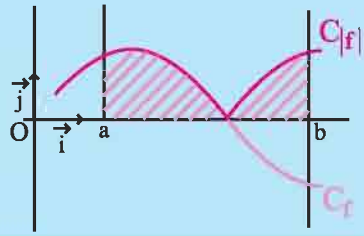


Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé la courbe C de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Tracer la courbe C' représentative de $|f|$.
2. a. Représenter la partie P' du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C' et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.
   b. Calculer l'aire de P'.
3. En déduire l'aire la partie P du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 3$.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b |f(x)|dx$.



Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Calculer, dans chacun des cas ci-dessous, l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

1. $f : x \mapsto \sin(2x)$, $a=-\frac{\pi}{3}$ et $b=\frac{\pi}{4}$.
2. $f : x \mapsto \frac{x}{\left(x^2+1\right)^4}$, $a=-2$ et $b=1$.

Théorème (linéarité)

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

Pour tous réels α et β, $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$.

Démonstration

Soit F et G deux primitives respectives de f et g sur $[a,b]$. Alors pour tous réels α et β, $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$ sur $[a,b]$. On peut écrire

$$\begin{aligned}\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx &= (\alpha F(b)+\beta G(b))-(\alpha F(a)+\beta G(a))\\ &= \alpha(F(b)-F(a))+\beta(G(b)-G(a))\\ &= \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

Activité 3

Calculer $\int_1^2 \frac{x^2}{(x+1)^2}dx+\int_1^2 \frac{2x+1}{(x+1)^2}dx$.

Activité 4

Soit les intégrales $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{2}dx$

1. Calculer $I+2J$ et $2J-I$.
2. En déduire les valeurs de I et J.

III. Intégrales et inégalités

Théorème (positivité)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Démonstration

Toute primitive sur $[a,b]$ d'une fonction positive est croissante sur $[a, b]$.
Le théorème en découle.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ où $a<b$. Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx>0$.

Démonstration

Toute primitive sur $[a,b]$ d'une fonction positive qui ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de $[a,b]$ est strictement croissante sur $[a,b]$. Le corollaire en découle.

Activité 1

1. Montrer que $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} > \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$.
2. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{2}} \left(1+x+x^2+x^3+x^4\right)dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x}$.

Corollaire (comparaison)

Soit f, g et h trois fonctions continues sur $[a,b]$.

Si $h \le f \le g$, alors $\int_a^b h(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Démonstration

La fonction $f-h$ étant positive sur $[a,b]$, il résulte de la positivité de l'intégrale que $\int_a^b (f(x)-h(x))dx \ge 0$, ou encore que $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b h(x)dx$.

On montre de même que $\int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$.

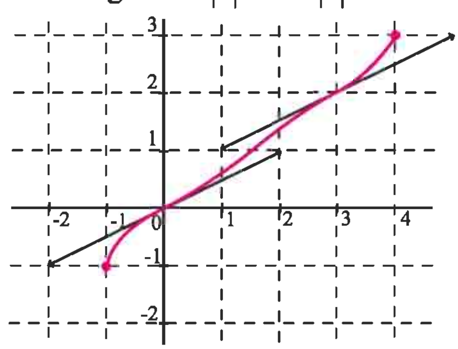
Corollaire

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

Démonstration

La propriété découle du corollaire précédent et de la double inégalité $-|f| \le f \le |f|$.

Activité 2



On a représenté une fonction f dérivable sur $[-1,4]$, ainsi que les tangentes aux points d'abscisses 0 et 3.

1. Vérifier graphiquement que pour tout réel x de $[0,3]$, $\frac{x}{2} \le f(x) \le \frac{x+1}{2}$.
2. En déduire que $\frac{9}{4} \le \int_0^3 f(x)dx \le \frac{15}{4}$.

Activité 3

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout x de $[0,1]$, $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq x^{n+1}$.

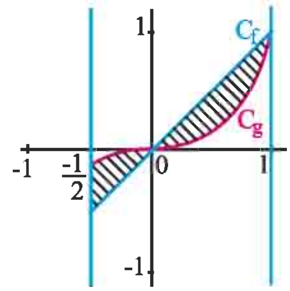
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+2}$.

3. a. Donner une valeur approchée de u_{100} et préciser l'erreur commise.

b. Donner une valeur approchée de u_{10000} et préciser l'erreur commise.

Activité 4

On a tracé ci-contre les courbes des fonctions f et g définies sur $[-\frac{1}{2}, 1]$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$.



On se propose de calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 1$.

1. a. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   b. Calculer l'aire de la partie limitée par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

   c. En déduire l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

2. Calculer l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$.

3. Conclure.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, la courbe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

Activité 5

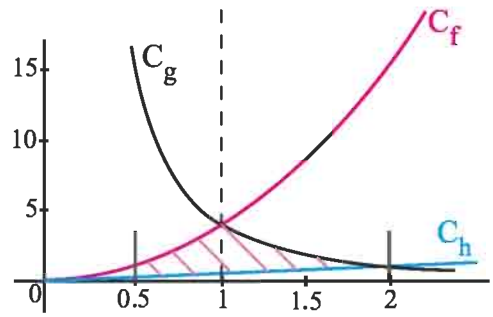
Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit f et g les fonctions définies sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$.

1. Représenter les courbes C_f et C_g de f et g sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Etudier le signe de $f-g$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_f et C_g et les droites d'équations, $x=0$ et $x=\frac{\pi}{2}$.

Activité 6

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a représenté les courbes C_f et C_h des fonctions f et h définies sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=4x^2$ et $h(x)=\frac{x}{2}$ et la courbe C_g de la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{4}{x^2}$.



On se propose de calculer l'aire de la partie $\mathcal{D}$ limitée par ces trois courbes et les droites d'équations $x=0.5$ et $x=2$.

1. Résoudre les équations $f(x)=g(x)$ et $g(x)=h(x)$.
2. Calculer l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_h et les droites d'équations $x=0.5$ et $x=1$.
3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_g et C_h et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.
4. En déduire l'aire de $\mathcal{D}$.

IV. Calculs d'intégrales

IV. 1 Calcul au moyen d'une primitive

Activité 1

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^3 (5x^4-x^3-2)dx \; ; \; \int_{-2}^{-1} \frac{1}{t^2}dt \; ; \; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}dx \; ; \; \int_{-1}^{2} (3x^2+1)(x^3+x-2)dx \; ;$$

$$\int_0^1 \frac{-2u}{(u^2+2)^3}du \; ; \; \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t}{\sin^3 t}dt, \; \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}dx.$$

Activité 2

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x}dx$.

IV. 2 Intégration par parties

Théorème d'intégration par parties

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ et telles que leurs dérivées f' et g' sont continues sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Démonstration

On sait que $(fg)' = f'g + g'f$. La continuité des fonctions f' et g' sur $[a,b]$ nous permet d'écrire que $\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b (f'(x)g(x) + g'(x)f(x))dx = [f(x)g(x)]_a^b$.

Le théorème en résulte.

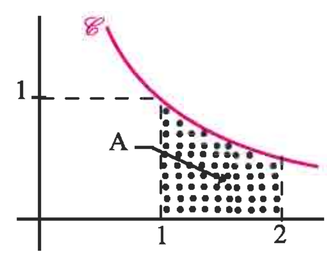
Activité

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \;;\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx \;;\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx.$$

IV. 3 Calcul approché d'intégrales (Méthode des rectangles)

Activité



Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on a tracé la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

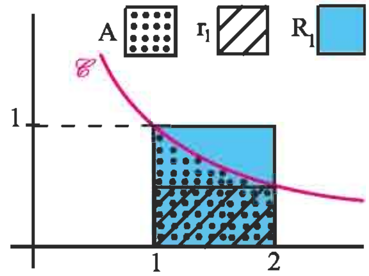
On désigne par A l'aire (en u.a) de la partie limitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

1. Vérifier que $A = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

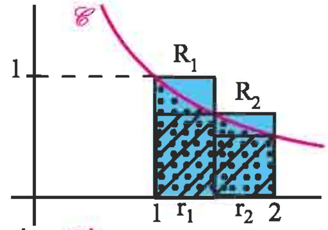
On se propose de donner des encadrements de A.

2. On trace les rectangles r_1 et R_1 comme l'indique le schéma ci-contre.

   Vérifier que $\frac{1}{2} \leq A \leq 1$.

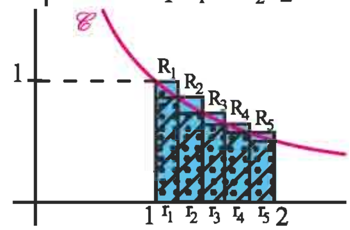


3. On partage l'intervalle $[1,2]$ en deux intervalles de longueur 0.5.
On trace les rectangles r_1, r_2 et R_1, R_2 Comme l'indique la figure ci-contre. Vérifier que $\frac{7}{12} \leq A \leq \frac{5}{6}$.



4. On partage l'intervalle $[1,2]$ en 5 intervalles, de longueur $\frac{1}{5}$.

On trace les rectangles r_i et les rectangles R_i, $1 \leq i \leq 5$.
comme l'indique la figure ci-contre.
Donner un nouvel encadrement de A.



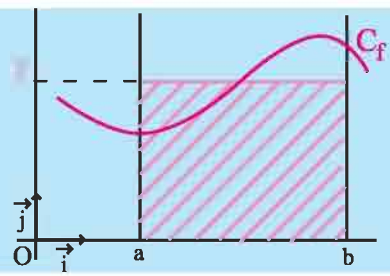
IV. 4 Valeur moyenne et inégalité de la moyenne

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a < b)$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel, noté $\overline{f}$, défini par $\overline{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx$.

Interprétation géométrique de la valeur moyenne

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.
L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f, les droites d'équations, $x = a$, $x = b$ et $y = 0$ est égale à celle du rectangle de côtés $(b-a)$ et $\overline{f}$.



Activité 1

Soit la fonction définie sur $[0,2]$, par $f(x) = 3x - 1$.
Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,2]$, puis la comparer à f(1).

Activité 2

Calculer la valeur moyenne de la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, par $f(x) = \cos x$.

Activité 3

1. Tracer dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la parabole P d'équation $y = -x^2 + 2x$.
On notera A le point d'intersection de P avec l'axe des abscisses, distinct de O.
2. Déterminer la largeur du rectangle dont un côté est $[OA]$ et dont l'aire est la même que celle de la partie D limitée par P et l'axe des abscisses.

Théorème (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$. Soit m et M deux réels.

Si pour tout x de $[a,b]$, $m \le f(x) \le M$, alors $m \le \bar{f} \le M$.

Démonstration

L'hypothèse $m \le f(x) \le M$, pour tout x de $[a,b]$ implique que

$$\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx.$$

Le théorème découle alors des égalités $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ et $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$,

sachant que $b-a>0$.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ $(a<b)$. Il existe $c \in [a,b]$, tel que $\bar{f} = f(c)$.

Démonstration

La fonction f étant continue sur $[a,b]$, on en déduit qu'il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$. Le corollaire en découle, sachant que $m \le \bar{f} \le M$.

Activité 4

Montrer les inégalités ci-dessous

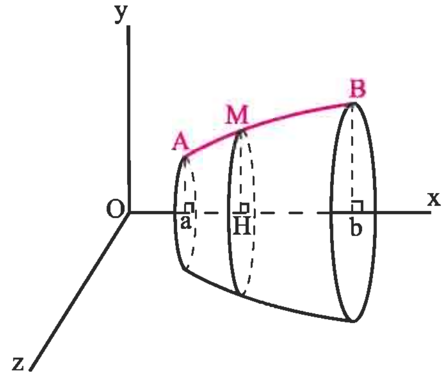
$$0.5 \le \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le 1, \quad \frac{1}{2} \le \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \le \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

V. Calcul de volumes de solides de révolution

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère dans le plan (Oxy), un arc $\overset{\frown}{AB}$ d'une courbe d'équation $y=f(x)$ et dont les extrémités A et B ont pour coordonnées dans ce plan $A(a,\ f(a))$ et $B(b,\ f(b))$.

La rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ autour de l'axe (Ox) engendre une surface appelée surface de révolution (S). (voir figure ci-contre).



En particulier chaque point $M(x,\ f(x))$ de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ décrit un cercle d'axe (Ox), de centre H le projeté orthogonal de M sur (Ox) et de rayon $HM = |f(x)|$.

La partie de l'espace limitée par la surface (S) et les plans d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelée solide de révolution de surface (S).

La section du solide par le plan passant par M et perpendiculaire à l'axe $(O,\vec{i})$ est le disque de centre H et de rayon HM.

L'aire de ce disque est $S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$.

Nous donnons ci-dessous la formule donnant le volume du solide de révolution engendré par la rotation d'un arc de courbe autour de l'axe $(O,\ \vec{i})$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB} = \{M(x,y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } a \le x \le b\}$ autour de l'axe $(O,\ \vec{i})$ est le réel $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

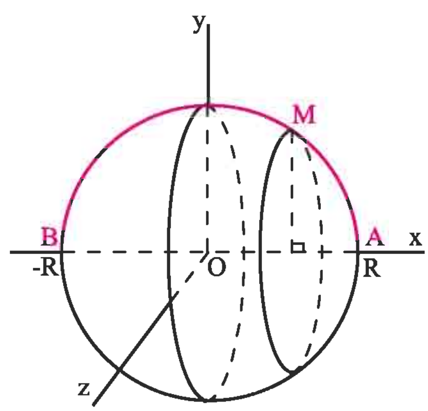
Activité 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit R un réel strictement positif.

On considère dans le plan (Oxy), le demi-cercle $\overset{\frown}{AB}$ d'équation $y = f(x)$ et dont les extrémités A et B ont pour coordonnées dans ce plan

$A\begin{cases} x = R \\ y = 0 \end{cases}$, $B\begin{cases} x = -R \\ y = 0 \end{cases}$.



La rotation de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ au tour de l'axe (Ox) engendre une sphère de rayon R et de centre O.

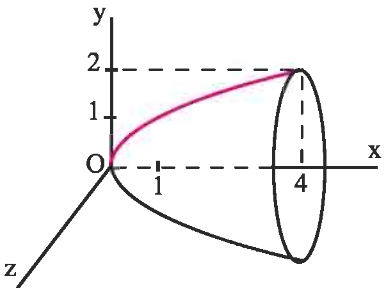
Si $M(x,\ f(x))$ est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors M décrit un cercle de rayon $|f(x)|$.

Déterminer $f(x)$.

Retrouver alors le volume de la sphère de centre O et de rayon R.

Activité 2

Le solide de révolution S est obtenu en faisant tourner la portion de la parabole d'équation $y=\sqrt{x}$,$(0\leq x\leq 4)$ au tour de son axe (Ox) (voir figure).
Déterminer le volume du solide S.



VI. Fonctions définies par une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. Alors la fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration

Pour toute primitive G de f sur I et pour tout x de I , $\int_a^x f(t)dt = G(x)-G(a)$.

On en déduit que la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F' = f$.

Le théorème en découle sachant que $F(a)=\int_a^a f(t)dt = 0$.

Conséquence

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur I et $F'(x)=f(x)$, pour tout x de I.

Activité 1

Justifier, dans chacun des cas, la dérivabilité de la fonction F sur I et calculer sa fonction dérivée.

1. $F(x)=\int_1^x \sqrt{1-t^2}dt$, $I=[-1,1]$.
2. $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$, $I=\mathbb{R}$.
3. $F(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt$, $I=]0,+\infty[$.
4. $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $I=]-1,1[$.

Exercice résolu 1

Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt$.

1. a. Montrer que F est croissante sur $[1,+\infty[$.

b. Montrer que F est majorée par 2.
c. En déduire que F admet une limite finie L au voisinage de $+\infty$.

2. Soit G la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $G(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt$.

Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $G(x)=F(x)+\frac{1-\cos x}{x}+\cos 1-1$.

En déduire que G possède une limite finie en $+\infty$.

Solution

Sur $[1,+\infty[$, la fonction F est la primitive qui s'annule en 1 de la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$.

De plus, la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est positive sur $[1,+\infty[$ car $0 \le \cos t \le 1$.

On en déduit que pour tout $x \ge 1$, $F'(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ et par suite F est croissante sur $[1,+\infty[$.

b. Pour tout $t \ge 1$, $\left|\frac{1-\cos t}{t^2}\right| \le \frac{2}{t^2}$. Il en résulte que $\left|\int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt\right| \le 2\int_1^x \frac{1}{t^2}dt$, $x \ge 1$.

Le résultat découle alors de l'égalité $2\int_1^x \frac{1}{t^2}dt = 2\left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 2-\frac{2}{x} \le 2$.

c. La fonction F est croissante et majorée sur $[1,+\infty[$. On en déduit qu'elle admet une limite finie L en $+\infty$.

2. Posons $u(t)=\frac{1}{t}$ $\quad u'(t)=-\frac{1}{t^2}$

$v'(t)=\sin t$ $\quad v(t)=1-\cos t$

On peut alors écrire $\int_1^x \frac{\sin t}{t}dt = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1-\cos t}{t^2}dt$.

On en déduit que $G(x)=F(x)+\frac{1-\cos x}{x}+\cos 1-1$, pour tout x de $[1,+\infty[$.

On sait que F admet une limite finie L en $+\infty$.

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{1-\cos x}{x}\right|=0$ car $0\leq\left|\dfrac{1-\cos x}{x}\right|\leq\dfrac{2}{x}$, pour tout $x\geq1$.

Le résultat en découle.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , u une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $u(J)\subset I$ et a un réel de I. Alors la fonction F définie sur J par

$F(x)=\displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)dt$ est dérivable sur J et $F'(x)=f(u(x)).u'(x)$, pour tout x de J.

Démonstration

Remarquons que $F=G\circ u$ avec $G:x\mapsto\displaystyle\int_a^{x} f(t)dt$ et $u:x\mapsto u(x)$.

On en déduit, d'après les hypothèses faites sur f et u que F est dérivable et que l'on a $F'(x)=f(u(x)).u'(x)$.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $[0,\ 1[$ par $f(x)=\displaystyle\int_0^{x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0,\ 1[$ et déterminer sa fonction dérivée f'.

2. Soit g la fonction définie sur $[0,\ \frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

   a. Montrer que g est dérivable sur $[0,\ \frac{\pi}{2}[$ et déterminer sa fonction dérivée.

   b. En déduire que $g(x)=x$ pour tout $x\in[0,\ \frac{\pi}{2}[$.

3. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

4. a. Montrer que pour tout $x\in[0,1[$ il existe un unique $t\in[0,\ \frac{\pi}{2}[$ vérifiant $\sin t=x$.

   b. Montrer que $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\frac{\pi}{2}$.

5. Représenter la fonction f.

Activité 3

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0.

On considère la fonction g définie sur I par $g(x)=\int_{-x}^{x} f(t)dt$.

1. Montrer que g est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

2. On suppose que f est impaire.
   a. Montrer que pour tout $x\in I$, $g(x)=0$.
   b. En déduire que pour tout $x\in I$, $\int_{-x}^{0} f(t)dt=-\int_{0}^{x} f(t)dt$.
3. On suppose que f est paire.
   a. Montrer que g est la primitive sur I qui s'annule en 0, de la fonction $t\mapsto 2f(t)$.
   b. En déduire que $\int_{-x}^{x} f(t)dt=2\int_{0}^{x} f(t)dt$ et que $\int_{-x}^{0} f(t)dt=\int_{0}^{x} f(t)dt$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et soit a un réel de I.

- Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$.
- Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

Activité 4

Calculer les intégrales suivantes

$\int_{-5\pi}^{5\pi} x^5\sin^6(x)dx$, $\int_{-1}^{1}\frac{t^5}{t^6+1}dt$, $\int_{-5\pi}^{5\pi} x^{1001}\cos^{100}(x)dx$, $\int_{-1}^{1}\left|t^3+t\right|dt$.

Activité 5

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\int_{x}^{x+T} f(t)dt$.

Montrer que pour tout réel x, $g(x)=\int_{0}^{T} f(t)dt$.

Théorème

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T.

Pour tout réel a, $\int_{a}^{a+T} f(t)dt=\int_{0}^{T} f(t)dt$.

Activité 6

Calculer les intégrales $\int_0^{20\pi} |\sin x| dx$; $\int_{-10\pi}^{10\pi} |\cos x| dx$.

VII. Exemples de suites définies par une intégrale

Activité 1

1. On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$ et $J_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$. Montrer que $I_1 = 1$ et $J_1 = \frac{\pi}{2} - 1$.

2. On pose pour tout $n \geq 2$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx$.

a. Calculer I_2 et J_2 .

b. Montrer que $I_n = nJ_{n-1}$ et que $J_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - nI_{n-1}$.

c. Calculer I_3 , J_3 , I_4 et J_4 .

Exercice résolu 2

On pose pour tout entier $n \geq 1$, $I_n = \int_0^2 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} dx$.

1. Calculer I_1 .
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, $I_n = \int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\, dx - 4I_{n-2}$.
3. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que
$nI_n = 2^n\sqrt{2} - 4(n-1)I_{n-2}$, pour tout entier $n \geq 3$.

En déduire les valeurs de I_3 et I_5 .

Solution

1. La fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+4}$.

On en déduit que $I_1 = 2\sqrt{2} - 2$.

2. Remarquons que l'on peut écrire que pour tout entier $n \geq 3$ et tout réel x,

$\frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x^{n-2}(x^2+4) - 4x^{n-2}}{\sqrt{x^2+4}}$. On en déduit que $I_n = \int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\, dx - 4I_{n-2}$. (*)

3. Intégrons par parties l'intégrale $\int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx$.

En posant $u(x)=\sqrt{x^2+4}$ et $v'(x)=x^{n-2}$, il vient que

$$\int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx=\left[\frac{x^{n-1}}{n-1}\sqrt{x^2+4}\right]_0^2-\frac{1}{n-1}\int_0^2 x^{n-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx.$$

On en déduit que $\int_0^2 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{2^n\sqrt{2}}{n-1}-\frac{1}{n-1}I_n$.

En reportant la formule obtenue dans (*), on obtient le résultat.

D'après ce qui précède, $I_3=\frac{16-8\sqrt{2}}{3}$ et $I_5=\frac{224\sqrt{2}-256}{15}$.

Problème résolu

On pose $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(t)\,dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.

2. a. Montrer que pour tout entier n, $I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n$.

   b. En déduire I_3, I_4, I_5 et I_6.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n, $0<I_{n+1}\le I_n$.

3. a. Montrer que pour tout $n\ge 0$, $1\le\frac{I_{n+1}}{I_{n+2}}\le\frac{I_n}{I_{n+2}}$.

   b. Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{I_n}{I_{n+1}}=1$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=(n+1)I_nI_{n+1}$.

   Montrer que la suite (u_n) est constante et que pour tout entier naturel n, $u_n=\frac{\pi}{2}$.

   Montrer que $\frac{\pi}{2(n+1)}\le I_n^2\le\frac{\pi}{2n}$. Donner un encadrement de I_{1000}.

Solution

1. a. Le calcul donne immédiatement que $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

D'autre part, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(\cos 2t + 1)dt = \frac{\pi}{4}$.

b. $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)dt$

Pour $n \geq 1$, on pose

$$u(t) = \cos^{n+1}(t) \qquad u'(t) = -(n+1)\cos^n(t)\sin t$$
$$v'(t) = \cos t \qquad v(t) = \sin t$$

Il en résulte que

$$I_{n+2} = \left[\cos^{n+1}(t)\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\sin^2(t)dt,$$

ou encore que, $I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\left(1-\cos^2(t)\right)dt = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$.

On en déduit que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$, pour tout entier $n \geq 1$.

D'autre part, il résulte de a) que $I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{4}$. Le résultat en découle.

c. En appliquant la relation $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$, $n \geq 0$, on obtient que

• $I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}$, • $I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{16}$, • $I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{8}{15}$, • $I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5\pi}{32}$.

2. Pour tout $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \cos t \leq 1$. On en déduit que pour tout entier naturel n et tout $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$. De plus, $\cos t > 0$ pour tout réel t de $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Il en résulte que pour tout entier naturel n, $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t\, dt \leq \int_0^{\alpha} \cos^n t\, dt$, ou encore que $0 < I_{n+1} \leq I_n$.

3. a. D'après la question précédente, la suite (I_n) est strictement positive et décroissante.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $0 < I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$. Ce qui implique que

$1 \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leq \dfrac{I_n}{I_{n+2}}$, pour tout entier naturel n. (*)

b. D'après la première question, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$, $n \geq 0$. On en déduit que

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+2}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+2}{n+1} = 1$. Par passage à la limite dans (*), on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} = 1$.

4. Pour $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = I_{n+1}\left[(n+2)I_{n+2} - (n+1)I_n\right]$

D'après la question 1. b. $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$, ou encore, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

Il en résulte que $u_{n+1} - u_n = 0$ pour tout entier naturel n , c'est à dire que la suite (u_n) est constante. On déduit de l'égalité $u_0 = I_0.I_1 = \dfrac{\pi}{2}$ que $u_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout entier naturel n.

La suite (I_n) étant décroissante, on peut écrire pour tout entier non nul n

$nI_nI_{n+1} \leq nI_n^2 \leq nI_nI_{n-1}$, ou encore que $\dfrac{n}{n+1}(n+1)I_nI_{n+1} \leq nI_n^2 \leq nI_nI_{n-1}$.

Il en résulte que $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\dfrac{\pi}{2} \leq nI_n^2 \leq \dfrac{\pi}{2}$, pour tout entier non nul n. Ce qui implique que

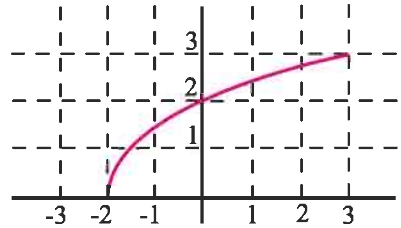
$\dfrac{\pi}{2(n+1)} \leq I_n^2 \leq \dfrac{\pi}{2n}$, pour tout entier non nul n.

On déduit de l'inégalité précédente que $\sqrt{\dfrac{\pi}{2002}} \leq I_{1000} \leq \sqrt{\dfrac{\pi}{2000}}$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. D'après la représentation graphique ci-contre, l'aire de la partie limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=3$ est encadrée par



☐ 7 et 13. ☐ 15 et 20. ☐ 14 et 21.

2. $I=\int_0^1 t\cos^2(\pi t)dt$ et $J=\int_0^1 t\sin^2(\pi t)dt$. Alors $I+J$ est égal à

☐ 1. ☐ $\frac{1}{2}$. ☐ 0.

3. Soit $I=\left|\int_{-1}^{1}\frac{-3x^5+5x}{x^4+1}dx\right|$ et $J=\int_{-1}^{1}\left|\frac{-3x^5+5x}{x^4+1}\right|dx$. Alors

☐ $I\leq J$. ☐ $I=J$. ☐ $I\geq J$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\int_{4\pi}^{\frac{9\pi}{2}}\sin x\,dx$.

2. $\int_{-1}^{1}|x|dx=1$.

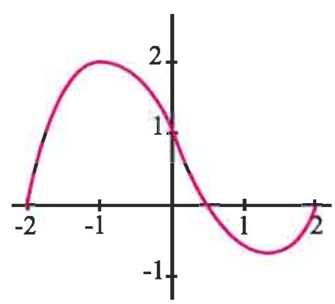
3. Si f est une fonction dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est continue sur $[a,b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[xf(x)\right]_a^b-\int_a^b x f'(x)dx.$$

4. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$.

Si $f\leq 1$ alors $\int_0^1 f(x)dx\leq 1$.

5. D'après la représentation graphique ci-contre $\int_{-2}^{2}f(x)dx\geq 0$.



6. Si $\int_a^b f(x)dx\geq 0$ alors $f\geq 0$ sur $[a,b]$.

7. La fonction $x\mapsto\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$ est définie sur $\mathbb{R}$.

1 Calculer les intégrales ci-dessous.

$$\int_{-1}^{3}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)dx \ ; \ \int_{1}^{2} t(t+1)^3 dt \ ;$$

$$\int_{-1}^{1}(2x+1)\left(x^2+x-5\right)^3 dx \ ; \int_{1}^{2}\sqrt{2x+1}\,dx \ ;$$

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{(1+x)^2} \ ; \int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \ ; \ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t \ \sin t\,dt \ ;$$

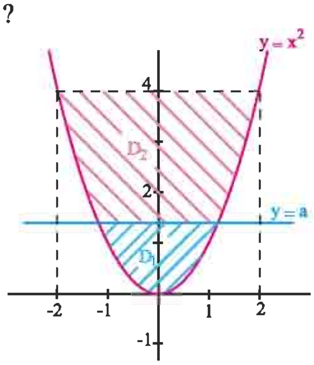
$$\int_{-2}^{1}|x(x+1)|dx \ ; \ \int_{-3}^{3}\left|x^3+x\right|dx \ ; \ \int_{0}^{3}|2t-1|dt \ ,$$

$$\int_{0}^{2\pi}|\sin x|dx \ .$$

2 le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit $a>0$.

Pour quelle valeur de a, les parties D_1 et D_2 ont-elles la même aire ?



3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par

$$f(x)=\frac{2x-1}{(x-1)^3}.$$

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier f et tracer C_f.
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x)=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(x-1)^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
3. Soit $\lambda<\frac{1}{2}$. On pose $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x=\frac{1}{2}$.

a. Déterminer $\mathcal{A}(\lambda)$.

b. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\mathcal{A}(\lambda)$.

4 1. On considère la fonction h définie sur $]0,\ +\infty[$ par $h(x)=x^2-4x+6-3\sqrt{x}$.

a. Calculer $h''(x)$, $x>0$.

b. Montrer que l'équation $h'(x)=0$ possède une unique solution α appartenant à $]2,\ 3[$.

c. Déterminer le signe de h' et dresser le tableau de variation de h.

d. Calculer $h(1)$ et $h(4)$. En déduire que 1 et 4 sont les uniques solutions de l'équation $h(x)=0$.

2. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]0,\ +\infty[$ par

$f(x)=x^2-4x+6$ et $g(x)=3\sqrt{x}$.

b. Calculer l'aire de la partie limitée par ces deux courbes.

5 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère les fonctions f et g définies sur $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ définies par $f(x)=\sin x$ et $g(x)=\sin^2 x$.

1. Etudier les fonctions f et g.
2. Etudier la position des courbes C_f et C_g de f et g.
3. Représenter C_f et C_g.
4. Calculer l'aire de la partie limitée par ces deux courbes.

6 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On considère la fonction f définie sur $[0,\ \pi]$ par $f(x)=x+\sin x$.

1. Etudier les variations de f sur $[0,\ \pi]$.
2. Etudier la position de la courbe C_f de f et de la droite D d'équation $y=x$.
3. Représenter C_f et D.
4. Calculer l'aire de la partie limitée par C_f et D.

7 1. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]0,\ +\infty[$ par

$f(x)=3x^2+\dfrac{2}{x^3}$ et $g(x)=3x^2$.

2. Soit $\lambda > 0$. On pose $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et g et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$.

a. Vérifier que $A(\lambda) = \left|\int_1^{\lambda} \frac{2dx}{x^3}\right|$. Calculer $A(\lambda)$.

b. Etudier et représenter la fonction $A : \lambda \mapsto A(\lambda)$.

c. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $A(\lambda) = m$.

8 1. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $]2, +\infty[$ par

$f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-2)^2}$ et $g(x) = x + 1$.

2. Soit $\lambda > 2$. On pose $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes de f et g et les droites d'équations $x = 3$ et $x = \lambda$.

a. Vérifier que $A(\lambda) = \left|\int_3^{\lambda} \frac{4dx}{(x-2)^2}\right|$.

b. Calculer $A(\lambda)$.

c. Etudier et représenter la fonction $A : \lambda \mapsto A(\lambda)$.

d. Déterminer suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de l'équation $A(\lambda) = m$.

9 On considère les intégrales $A = \int_0^1 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^3} dx$

et $B = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^3} dx$.

1. Calculer A.
2. Calculer $A + B$.
3. En déduire la valeur de B.

10 1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$.

2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$.

11 1. A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} x \cos 2x \, dx$.

2. Soit les intégrales $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx$ et

$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx$.

a. Calculer $I + J$ et $I - J$.

b. En déduire les valeurs de I et J.

12 1. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

2. Soit la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$. Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x}$.

3. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x}$.

13 Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par

$f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1. Montrer que pour tout réel x de $[0, \frac{\pi}{4}]$,

$1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$.

2. En déduire que $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

14 On pose $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$.

1. a. Vérifier que pour tout

$x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $0 \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$.

b. En déduire un encadrement de I.

2. a. Vérifier que pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$,

$\frac{\sin x}{1+\pi^2} \leq \frac{\sin x}{1+x^2} \leq \frac{\sin x}{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$.

b. En déduire un nouvel encadrement de I.

15 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ et on pose $I=\int_{100}^{1000} f(t)dt$.

1. a. Vérifier que pour tout $x>0$, $f(x)\le\dfrac{1}{x^2}$.

b. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que pour tout $x>0$ $1-\dfrac{x}{2}\le\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

c. En déduire que pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^6}\le f(x)$.

2. Déterminer un encadrement de I.

16 On considère la fonction f définie sur $]\dfrac{\pi}{2},\pi[$ par $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]\dfrac{\pi}{2},\pi[$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. Montrer que la réciproque f^{-1} de f est dérivable sur I et que $\left(f^{-1}\right)'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, pour tout x de I.
3. En déduire l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$.

17 1. Représenter dans un repère orthonormé, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

2. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

a. Vérifier que $\dfrac{1}{2}\le\mathcal{A}\le 1$.

b. Utiliser la méthode des rectangles, en partageant l'intervalle $[1,2]$ en cinq intervalles d'amplitude 0.2, pour donner un nouvel encadrement de $\mathcal{A}$.

18 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n=\int_0^1\frac{x^n}{\left(x^2+1\right)^2}dx,\ n\ge1.$$

1. Montrer que $0\le\dfrac{x^{2n+1}}{\left(x^2+1\right)^2}\le x^{2n+1}$, pour tout entier $n\ge1$ et tout $0\le x\le1$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

19 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx \text{ et } u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n\cos 2x\,dx,\ n\ge1.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Comparer u_n et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^n dx$, $n\ge1$.
3. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
4. a. Calculer u_0 et u_1.

b. Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n.

c. Calculer u_2 et u_3.

20 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0=\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx \text{ et } u_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx\ n\ge1.$$

1. Montrer que pour tout $n\ge1$, $0\le u_n\le\dfrac{1}{n+1}$.
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.
3. a. Calculer u_0 et u_1.

b. Montrer que pour tout $n\ge1$, $(3+2n)u_n=2nu_{n-1}$.

c. Calculer u_2 et u_3.

21 Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx,\ n\ge1.$$

1. Calculer u_1.
2. Montrer que pour tout $n\ge1$, $0\le u_n\le\dfrac{1}{n+1}$.
3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

22 Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par

$f(x) = \tan^3 x + \tan x$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[0,2]$.
3. a. Représenter dans un repère orthonormé, les fonctions f et f^{-1} en précisant les demi tangentes aux extrémités des deux courbes.

b. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$. En déduire $\int_0^2 f^{-1}(x)dx$.

23 On considère la fonction f définie sur $[0,3]$

par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]1,3]. \end{cases}$

1. Vérifier que f est continue sur $[0,3]$.
2. Soit F la fonction définie sur $[0,3]$ par

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a. Expliciter $F(x)$, $x \in [0,3]$.

b. Représenter la fonction F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

24 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. a. Etudier f.

b. Vérifier que la courbe représentative C_f de f est un quart de cercle de centre O et de rayon 1.

c. Tracer C_f .

2. Pour $x \in [0,1]$ on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Représenter la partie du plan dont l'aire est égale à $F(1)$. En déduire $F(1)$.

3. Pour tout $a \in [0,1]$, on désigne par θ le réel de $[0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos\theta = a$.

a. Montrer que $F(a) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} + \frac{a\sqrt{1-a^2}}{2}$.

b. Calculer $F\left(\frac{1}{2}\right)$, $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

25 On pose pour tout entier naturel n,

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2}x \, dx$.

1. a. Calculer I_0.

b. Vérifier que pour tout n, $0 \le I_{n+1} \le I_n$.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. a. Montrer que pour tout n, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+3}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

26 On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$

par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a. Calculer $\int_1^n f(x)dx$.

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_1^n f(x)dx \right)$.

2. Soit k un entier naturel non nul.

Calculer $\int_k^{k+1} f(x)dx$.

3. Montrer que la somme $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + ... + \frac{1}{n\times(n+1)}$ converge et déterminer sa limite.

27 On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$ et on pose pour tout entier

$n \ge 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$.

1. a. Vérifier que f est décroissante et positive.

b. Montrer que la suite (S_n) est croissante.

2. a. Calculer $\int_1^n f(t)dt$, $n \geq 1$ et en déduire que $0 \leq \int_1^n f(t)dt \leq \frac{1}{2}$.

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\int_1^n f(t)dt \right)$.

3. a. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$,
$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$.

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,
$\int_2^{n+1} f(t)dt \leq S_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt$.

c. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 \leq S_n \leq \frac{3}{2}$.

d. En déduire que la somme $1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{n^3}$ converge et de donner un encadrement de sa limite.

28 Dans chacun des cas, calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto x^4 - x^3 + 1$, $I = [-1, 3]$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^3} - 1$, $I = [2, 4]$.
3. $f : x \mapsto \sin(2x)$, $I = [0, \pi]$.

29 En utilisant l'inégalité de la moyenne donner un encadrement de $\int_2^4 \frac{dx}{x^2 - x + 1}$.

30 En utilisant l'inégalité de la moyenne donner un encadrement de $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 + \tan^2 x}$.

Dans les exercices 31, 32, 33, 34 et 35 L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

31 Soit $C = \left\{ M(x, y) \text{ tels que } y = x^2,\ 0 \leq x \leq 2 \right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

32 Soit $C = \left\{ M(x, y) \text{ tels que } y = \frac{1}{x},\ 1 \leq x \leq 3 \right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

33 Soit

$C = \left\{ M(x, y) \text{ tels que } y = \tan x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

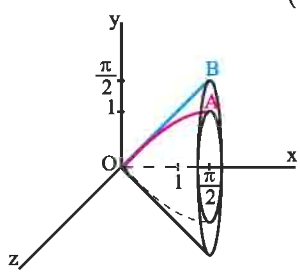
34 Soit

$C = \left\{ M(x, y) \text{ tels que } y = \sin x + \cos x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ et S le solide obtenu par rotation de C autour de l'axe (Ox). Calculer le volume de S.

35 Soit $C = \left\{ M(x, y) \text{ tels que } y = \sin x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$

et $C' = \left\{ M(x, y) \text{ tels que } y = x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.

On note S et S' les solides obtenus respectivement par rotation de C et C' autour de l'axe (Ox).



Calculer le volume de la partie de l'espace comprise entre les solides S et S'.

36 I. On considère la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

1. Vérifier que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $F(x) = x$.
3. Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

II. On considère la suite $\left(I_n\right)$ définie par

$$I_n=\int_0^1 \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}dt,\ n\geq 0.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n\geq 1$,

$$I_{n+1}=\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2^n}+(2n-1)I_n\right).$$

3. Calculer I_2, I_3 et I_4.

III. On considère la suite $\left(J_n\right)$ définie par

$$J_0=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \text{ et } J_n=\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt,\ n\geq 1.$$

1. a. Vérifier que pour tout n, $0\leq J_n\leq \dfrac{1}{1+2n}$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

2 a. Montrer que pour tout n, $J_{n+1}+J_n=\dfrac{1}{1+2n}$.

b. Calculer J_1, J_2, J_3, J_4 et J_5.

3. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{1+2n}.$$

a. Montrer que pour tout n, $J_{n+1}=(-1)^n\left(u_n-J_0\right)$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

37 Soit la suite $\left(I_n\right)$ définie par

$$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x+x^2}dx,\ n\geq 1.$$

1. a. Montrer que pour tout $n\geq 1$,

$$\frac{1}{3(n+1)}\leq I_n\leq \frac{1}{n+1}.$$

b. En déduire que la suite $\left(I_n\right)$ converge et déterminer sa limite.

2. a. Montrer que pour tout $n\geq 1$,

$$I_n=\frac{1}{3(n+1)}+\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{(1+2x)x^{n+1}}{\left(1+x+x^2\right)^2}dx.$$

b. En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$1+\frac{1}{3(n+2)}\leq 3(n+1)I_n\leq 1+\frac{3}{n+2}.$$

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

38 On considère la fonction F définie sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\sqrt{1-t^2}\,dt$.

1. Vérifier que F est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et déterminer sa fonction dérivée.
2. En déduire que pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin(2x).$$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$.
4. Etudier les variations de F.
5. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

39 On considère la fonction f définie sur $[-2,2]$ par $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$.

1. Etudier f et représenter sa courbe C dans un repère orthonormé.
2. Soit F la fonction définie sur $[0,\pi]$ par

$$F(x)=\int_0^{2\cos x}\sqrt{4-t^2}\,dt.$$

a. Montrer que F est dérivable sur $[0,\pi]$ et que $F'(x)=-4\sin^2 x,\ x\in[0,\pi]$.

b. Calculer $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

c. En déduire que pour tout $x\in[0,\pi]$, $F(x)=-2x+\sin(2x)+\pi$.

3. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations, $y=x$, $x=-2$ et $x=2$.

a. Montrer que $\mathcal{A}=F(0)-F(\pi)$.

b. En déduire $\mathcal{A}$.

Chapitre 7

Fonction logarithme népérien

M.Stifel (1544) met en évidence les deux suites

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...	8
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	4	8	16	...	256

Le passage de la ligne inférieure ("in inferiore ordine") à la ligne supérieure ("in superioreordine") transforme les produits en sommes. Par exemple, au lieu de multiplier 8 par 32 "in inferiore ordine", on peut prendre les "logarithmes" correspondants 3 et 5 "in superioreordine", calculer leur somme, qui est 8, retourner "in inferiore ordine", où l'on trouve le produit 8.32=256. Cette table plus détaillée, serait d'une grande utilité, car additionner est plus facile que multiplier. Les premières tables logarithmiques [...] ont été calculées par John Napier (1614, 1619), Henry Briggs (1624) et Jost Burgi (1620).

(E.Haier et al,L'analyse au fil de l'histoire, 2000).

Chapitre 7

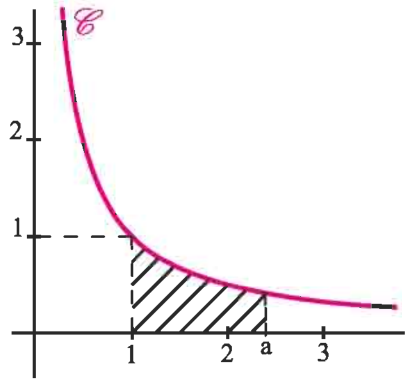
Fonction logarithme népérien

I. Introduction

Activité 1

A/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a construit la courbe de la fonction

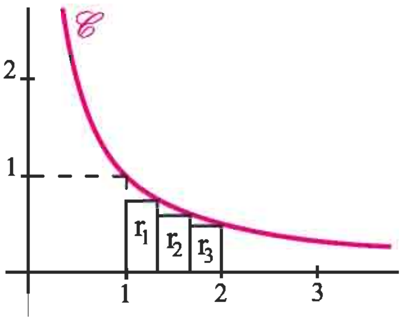
$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{1}{t}$$

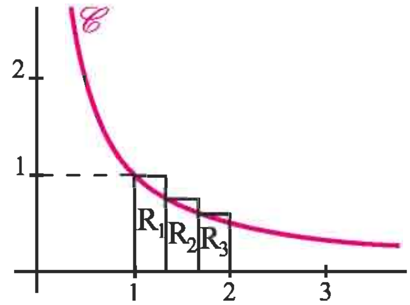


Pour tout réel $a > 0$, on désigne par $S(a)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.

1. Que vaut $S(1)$?

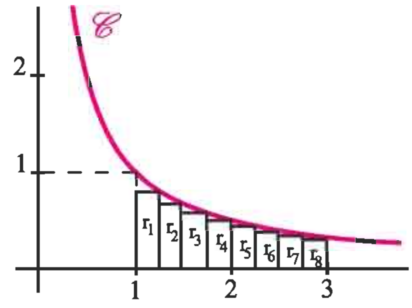
2. a. On partage l'intervalle $[1,2]$ en trois intervalles de même amplitude et on construit les rectangles r_1, r_2, r_3, R_1, R_2 et R_3 comme l'indique les deux figures ci-dessous.



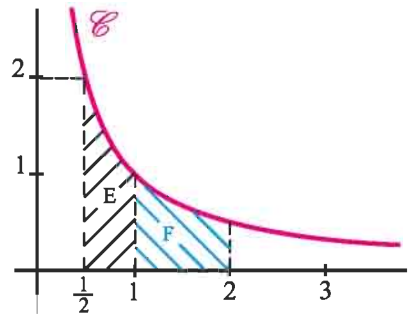


On désigne par $\mathcal{A}$ (respectivement $\mathcal{A}'$) la somme des aires des rectangles r_i (respectivement R_i), $1 \leq i \leq 3$. Montrer que $\frac{37}{60} \leq S(2) \leq \frac{47}{60}$.

b. On partage l'intervalle $[1,3]$ en huit intervalles de même amplitude et on construit les rectangles r_i, $1 \leq i \leq 8$, comme l'indique la figure ci-contre.
Calculer la somme des aires des rectangles r_i, $1 \leq i \leq 8$ et vérifier que $S(3) \geq 1$.



c. Montrer que $S(2.5) \leq 1$.



3. a. Soit $E = \left\{ M(x,y) \text{ avec } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$

et $F = \left\{ M(x,y) \text{ avec } 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$.

Montrer que E et F ont même aire.

b. En déduire que $S\left(\frac{1}{2}\right) = S(2)$.

B/ Pour tout réel $x > 0$, on pose $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

1. a. Montrer que $F(x) > 0$, si et seulement si, $x > 1$.

b. En déduire $F(x)$ à l'aide de $S(x)$.

2. Justifier la dérivabilité de F sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

En déduire que F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel x appartenant à $]2,3[$ tel que $F(x) = 1$.

Définition

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln, la fonction

$x \mapsto \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$, $x > 0$.

Les résultats suivants découlent immédiatement de la définition précédente.

La fonction logarithme népérien est la primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, qui s'annule en 1.

La fonction ln est définie, continue, dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et $\ln 1 = 0$.

Il existe un unique réel x appartenant à $]2,3[$ tel que $\ln(x) = 1$.

Il en résulte que

Soit a et b deux réels strictement positifs.

$\ln a > \ln b$, si et seulement si, $a > b$.

$\ln a = \ln b$, si et seulement si, $a = b$.

$\ln a = 0$, si et seulement si, $a = 1$.

$\ln a > 0$, si et seulement si, $a > 1$.

$\ln a < 0$, si et seulement si, $0 < a < 1$.

Activité 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations ci-dessous.
   a. $\ln\left(x^2+x+1\right)=0$. b. $\ln(1-x)=\ln(2+x)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations ci-dessous.
   a. $\ln(4x-1)\leq 0$. b. $\ln(4-3x)>0$. c. $\ln\left(x^2+x+1\right)\leq 0$. d. $\ln(2x-5)\leq \ln x$.

II. Etude et représentation graphique de la fonction ln

Activité 1

On se propose d'étudier la fonction ln et de construire sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. a. Soit un entier $n\geq 2$.

   Montrer que $\displaystyle\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{1}{t}dt\geq\frac{1}{2}$ pour $0\leq k\leq n-1$.

   En remarquant que $\displaystyle\int_{1}^{2^n}\frac{1}{t}dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\frac{1}{t}dt$, en déduire que $\displaystyle\int_{1}^{2^n}\frac{1}{t}dt\geq\frac{n}{2}$.

   b. En déduire que la fonction ln n'est pas majorée et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln x$.

2. a. Montrer que les deux fonctions $x\mapsto \ln x$ et $x\mapsto -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ définies sur $]0,+\infty[$ ont même dérivée.

   b. En déduire que $\ln x=-\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $x>0$.

   c. Calculer alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln x$

3. a. Montrer que $\frac{1}{t}\leq\frac{1}{\sqrt{t}}$, pour $t\geq 1$. En déduire que $\ln x\leq 2\sqrt{x}-2$, pour $x\geq 1$.

   b. Montrer alors que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

4. a. Dresser le tableau de variation de la fonction ln.
   b. Ecrire une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1.
   c. Construire la courbe C.

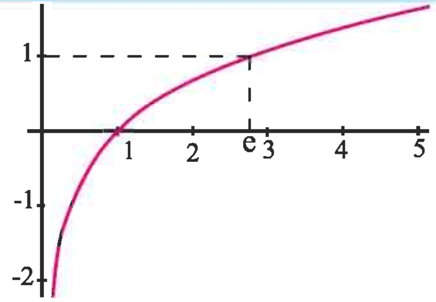
L'activité 1 fournit la démonstration du théorème suivant.

Théorème

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$.

- La fonction ln réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.
- L'unique solution de l'équation $\ln x = 1$ est le réel noté e. Ainsi, $\ln e = 1$.

Les calculatrices donnent des valeurs approchées du réel e, $e \simeq 2.71828...$



Activité 2

On désigne par C la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé.
Soit A un point de C d'abscisse a, la tangente à C en A coupe l'axe des ordonnées en K. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur l'axe des ordonnées et par y_H et y_K les ordonnées respectives des points H et K.

1. Montrer que $y_H - y_K$ est constant.
2. En déduire une construction de la tangente en un point de C.

III. Propriétés algébriques

Activité 1

1. On considère les deux fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln(ax)$ où a est un réel strictement positif.
   a. Comparer $f'(x)$ et $g'(x)$.
   b. En déduire qu'il existe une constante réelle c telle que $\ln(ax) = \ln x + c$, $x > 0$.
   c. Montrer alors que $\ln(ax) = \ln a + \ln x$, $x > 0$.
2. Montrer que $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, $a > 0$ et $b > 0$.

Théorème

Soit a et b deux réels strictement positifs.

$\ln(a.b) = \ln a + \ln b$. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$. $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln b$.

Activité 2

Soit un réel $a > 0$.

1. a. Montrer, par récurrence sur l'entier naturel p, que $\ln\left(a^p\right) = p\ln a$.
   b. Montrer que la formule précédente reste encore vraie pour tout entier négatif p.
2. Soit un entier $p \geq 2$. En écrivant $a = \left(\sqrt[p]{a}\right)^p$, montrer que $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \dfrac{1}{p}\ln a$.

Théorème

Soit a un réel strictement positif.

- Pour tout entier p, $\ln\left(a^p\right) = p\ln a$
- Pour tout entier $p \geq 2$, $\ln\left(\sqrt[p]{a}\right) = \dfrac{1}{p}\ln a$.

Activité 3

1. Exprimer, à l'aide des réels $\ln 2$ et $\ln 3$ chacun des réels ci-dessous.

$\ln\left(\sqrt{3}\right)$, $\ln\left(\sqrt[3]{2}\right)$, $\ln 108$, $\ln\left(\dfrac{81}{8}\right)$, $\ln\left(\sqrt[5]{2^3}\right)$ et $\ln\left(\sqrt{\dfrac{1}{27}}\right)$.

2. Simplifier les écritures ci-dessous.

$\ln\left(\sqrt{e}\right)$, $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$, $\ln\left(e^3\right)$, $\ln\left(e^{-2}\right)$, $\ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt{e}}\right)$ et $\ln\left(\sqrt[4]{e}.\sqrt[3]{e}\right)$.

3. Soit a et b deux réels strictement positifs. Exprimer à l'aide de $\ln a$ et $\ln b$, les réels

$\ln\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right)$, $\ln\left(\sqrt{a}.b^2\right)$ et $\ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

Activité 4

1. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leq 10^{-4}$.

2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $\left(\sqrt{2}\right)^n \geq 10^5$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations ci-dessous.

$2\ln x = 1$. $(\ln x)^2 + 2\ln x = 3$. $\left(\ln x + \dfrac{1}{2}\right)(\ln x - 2) = 0$.

$\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$.

$\ln x \geq -2$. $2\ln x < 1$. $(1-\ln x)(2-\ln x) \geq 0$.

Activité 6

Déterminer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\sqrt[3]{x}\right)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[10]{x}}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x+3)}{3x+4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$.

IV. Autres limites

Activité 1

Soit m un entier naturel non nul et n un entier supérieur ou égal à 2.

1. a. Vérifier que $\dfrac{(\ln x)^n}{x^m} = \left(\dfrac{n}{m} \times \dfrac{\ln\left(\sqrt[n]{x^m}\right)}{\sqrt[n]{x^m}}\right)^n$, $x > 0$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x^m} = 0$.

2. Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} \left|x^m (\ln x)^n\right|$

Théorème

Pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^n x}{x^m} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^m \ln^n x = 0$.

Activité 2

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - \ln^3 x$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + \ln^3 x$.

2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^4\left(1 - \ln^5 x\right)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4\left(1 - \ln^5 x\right)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\left(\ln(3-2x)\right)^2}{4x-6}$.

Activité 3

Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln^2 x, \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Etudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Activité 4

Considérons les réels $a = (2007)^{2008}$ et $b = (2008)^{2007}$.

Comparer a et b (on pourra calculer $\ln a$ et $\ln b$).

V. Fonctions $x \mapsto \ln(u(x))$ et $x \mapsto \ln(|u(x)|)$

Activité 1

Soit la fonction $u : x \mapsto x^2 + x - 2$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $u(x) > 0$.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(x^2 + x - 2\right)$

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

Activité 2

Soit la fonction $u : x \mapsto 1 - x^4$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $|u(x)| > 0$.

En déduire l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\left|1 - x^4\right|\right)$.

2. Montrer que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et que $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Le théorème de dérivation des fonctions composées fournit la démonstration des théorèmes ci-dessous.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) > 0$, pour tout réel x dans I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x dans I.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout réel x dans I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, pour tout x dans I.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $u(x) \neq 0$, pour tout réel x dans I.

Alors la fonction $f : x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive sur I la fonction

$f : x \mapsto \ln|u(x)| + k$, où k est une constante réelle.

Activité 3

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right|$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.
3. Déterminer la primitive sur l'intervalle $[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}]$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$,

   qui s'annule en $\dfrac{\pi}{3}$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)+x$

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Etudier la nature des branches infinies de la courbe de f.
3. Tracer la courbe de f.

Activité 5

1. Montrer que $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1)-\ln(x) \leq \dfrac{1}{x}$, pour tout réel $x > 0$.
2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$, $n \geq 1$.

   a. Montrer que , $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leq v_n \leq \ln(2)$, pour tout entier non nul n.

   b. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

Activité 6

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, dans chacun des cas suivants :

1. $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$, $\quad I =]1,+\infty[$.
2. $f(x)=\dfrac{x+1}{3x-2}$, $\quad I =]-\infty, \dfrac{2}{3}[$.
3. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, $\quad I =]\dfrac{1}{e}, 1[$.
4. $f(x)=\dfrac{\sin(2x)}{2+\cos^2(x)}$, $\quad I = \mathbb{R}$.
5. $f(x)=\dfrac{x^2-x+5}{x-1}$, $\quad I =]-\infty,1[$.

Activité 7

Dériver la fonction $x \mapsto x\ln x$

En déduire une primitive de la fonction ln.

Théorème

La fonction $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Activité 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit la fonction $f : x \mapsto 1-x+\ln x$

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe C_f.
2. Soit α un réel de $]0,1[$.
   a. Exprimer à l'aide de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

Activité 9

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$, $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1}$.
2. Calculer alors $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(t+1)}$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)dt}{t^2}$.

Activité 10

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x+2)dx$, $n \geq 1$. Calculer u_1.
2. a. Justifier que pour tout $0 \leq x \leq 1$, $\ln 2 \leq \ln(x+2) \leq \ln 3$.
   b. En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\ln 2\displaystyle\int_0^1 x^n dx \leq u_n \leq \ln 3\int_0^1 x^n dx$.
   c. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Problème résolu

1. Soit la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \geq 1$. Montrer que la suite (S_n) est divergente.
2. Soit la suite (T_n) définie par $T_n = S_n - \ln(n)$, $n \geq 2$.
   a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \dfrac{1}{x}$.
   b. En déduire que la suite (T_n) est décroissante.
3. Soit la suite (R_n) définie par $R_n = S_{n-1} - \ln(n)$, $n \geq 2$.
   a. Montrer que les suites (T_n) et (R_n) sont adjacentes.
   b. Soit α la limite commune des suites (T_n) et (R_n).
   Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $R_n \leq \alpha \leq T_n$.
   c. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} prés de α.

Solution

1. Soit k un entier non nul.

Pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ par conséquent $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t} dt$.

De l'égalité $\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_{1}^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1)$, on déduit que $S_n \geq \ln(n+1)$.

Par suite $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, car $\lim_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$.

2. a. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème des accroissement finis appliqué sur l'intervalle $[x, x+1]$, $x > 0$ justifie l'existence d'un réel c de $]x, x+1[$ tel que $\ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}$.

Le réel c est dans $]x, x+1[$, alors $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$.

Le résultat en découle.

b. Pour $n \geq 2$.

$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0$, d'aprés 2.a.

Par conséquent la suite (T_n) est décroissante.

3. a. Soit $n \geq 2$.

$T_n - R_n = \frac{1}{n} \geq 0$. Par suite $R_n \leq T_n$ et $\lim_{n \to +\infty} (R_n - T_n) = 0$.

La suite (T_n) étant décroissante. Il suffit donc de vérifier que la suite (R_n) est croissante.

D'aprés la question 2. a. $R_{n+1} - R_n = \frac{1}{n} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \geq 0$.

Le résultat en découle.

b. La suite (R_n) étant croissante et convergente vers α, alors $R_n \leq \alpha$, $n \geq 2$.

La suite (T_n) étant décroissante et convergente vers α, alors $\alpha \leq T_n$, $n \geq 2$.

On en déduit que $R_n \leq \alpha \leq T_n$, $n \geq 2$.

c. De l'égalité $T_n - R_n = \frac{1}{n}$, on déduit un encadrement de α d'amplitude 10^{-3} à partir de $n \geq 1000$. Il en découle que T_{1000} et R_{1000} sont des valeurs approchées de α à 10^{-3} prés.

(En utilisant le tableur Excel on obtient $T_{1000} \simeq 0.57771558$ et $R_n \simeq 0.57671558$).

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(x + x^2\right)$ est égal à

☐ $\ln x + \ln(x+1)$. ☐ $\ln\left(x^2\right) + \ln x$. ☐ $3\ln x$.

2. $\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ est égal à

☐ -2. ☐ $\dfrac{1}{2}$. ☐ $-\dfrac{1}{2}$.

3. Soit $f(x) = \ln(-x)$, $x < 0$. Alors $f'(x)$ est égal à

☐ $-\dfrac{1}{x}$. ☐ $\dfrac{1}{x}$. ☐ $-x$.

4. Soit $f(x) = x\ln\left(x^2\right)$, $x < 0$. Alors $f'(x)$ est égale à

☐ $2(1+\ln|x|)$. ☐ $2(1+\ln x)$. ☐ $\ln\left(x^2\right) + \dfrac{1}{x}$.

5. La limite de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ en 0^+ est égale à

☐ $+\infty$. ☐ $-\infty$. ☐ 0.

6. La limite de la fonction $x \mapsto \ln x + \dfrac{1}{x}$ en 0^+ est égale à

☐ $-\infty$. ☐ 0. ☐ $+\infty$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $x \mapsto x\ln x - x + 1$ est la primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.

2. La fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour tout réel x, $\ln x = \displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t} + \ln 2$.

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\ln x - x} = +\infty$.

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous.

1. $\ln x+\ln(x+1)=0$.
2. $\ln(\ln x)=0$.
3. $\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln\left(x^4\right)=3\ln 2$.
4. $(\ln x)^2-3\ln x+2=0$.
5. $\ln|x-1|+\ln|x+2|=\ln\left|4x^2+3x-7\right|$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations ci-dessous.

1. $\ln\left(\sqrt{3+x}\right)<4$.
2. $\ln(5x)>2+\ln 3$.
3. $\ln(4x+1)\leq 0$.
4. $\ln\left(\frac{1+x}{3x-5}\right)\geq 0$.
5. $(\ln x)^2-2\ln x<0$.
6. $\ln|\sin x|<0$.

3 Trouver, dans chacun des cas suivants, la limite de la fonction f en $+\infty$.

1. $f(x)=\frac{\ln(x+2)}{x+3}$.
2. $f(x)=\frac{\ln(2x+3)}{\sqrt[3]{x}}$.
3. $f(x)=\frac{x^2-2}{x\ln x}$.
4. $f(x)=\frac{\ln\left(x^2-3x+7\right)}{x}$.
5. $f(x)=\frac{\ln\left(x^5-x^3\right)}{x}$.
6. $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$.
7. $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$.
8. $f(x)=x\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)$.
9. $f(x)=x^2-(\ln x)^5$.

4 Déterminer les limites ci-dessous.

1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\ln x+\ln 2}{x-\frac{1}{2}}$.
2. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln 7}{x-7}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2\sin x)}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3\tan x)}{x^3}$.
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{\ln x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln x$.
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}(\ln x)^{10}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\sin x}$.

5 Déterminer dans chacun des cas suivants, une primitive de la fonction f sur I.

1. $f(x)=\frac{1+x+x^2+x^3}{x^4}$, $I=\mathbb{R}_+^*$.
2. $f(x)=\frac{3x-4}{x+5}$, $I=]-5,+\infty[$.
3. $f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$, $I=]0,\frac{\pi}{2}[$.
4. $f(x)=\frac{2x+1}{x(x+1)}$, $I=]0,+\infty[$.
5. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$, $I=]1,+\infty[$.
6. $f(x)=\frac{(\ln x)^3}{x}$, $I=]0,+\infty[$.

6 Calculer les intégrales ci-dessous.

1. $\int_e^1 \ln^2 x\,dx$.
2. $\int_1^e x\ln x\,dx$.

3. $\int_{e}^{e^2} x^2 \ln x \, dx$.

4. $\int_{e}^{1} \frac{x-1}{x+1} dx$.

5. $\int_{1}^{2} 5x(\ln x)^2 dx$.

6. $\int_{3}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

7. $\int_{2}^{3} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$.

8. $\int_{4}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$.

9. $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x} dx$.

10. $\int_{0}^{1} \frac{x^2+3x-1}{2x+1} dx$.

7 Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par

$f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$.

1. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1}$.

2. Calculer alors $\int_{2}^{3} f(x) dx$.

3. En déduire la valeur de $\int_{2}^{3} \frac{\ln(x-1) dx}{x^3}$.

8 Etudier, dans chacun des cas ci-dessous, f et tracer sa courbe représentative.

1. $f : x \mapsto (\ln x)^2$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{\ln x}$.
3. $f : x \mapsto \ln(\ln x)$.
4. $f : x \mapsto \ln|x| + \ln(x^2 - 3)$.

9 Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$.

1. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

2. Soit la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par

$g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

a. Etudier le sens de variation de g.

b. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g.

3. Vérifier que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

4. On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a. Montrer que la droite $\Delta : y = -x + 2$ est une asymptote à C.

b. Etudier la position relative de C et Δ.

c. Tracer C et Δ.

10 Soit la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2 - 3\ln x + 2$.

1. Dresser le tableau de variation de f.

2. Construire, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction f et préciser les points d'intersection de la courbe de f avec l'axe $(O,\vec{i})$.

3. Montrer que la fonction

$F : x \mapsto x(\ln x)^2 - 5x\ln x + 7x$ est une primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$.

4. Calculer l'aire du domaine du plan limitée par la courbe de f et les droites d'équations respectives

$x = e$, $x = e^2$ et $y = 0$.

11 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln|x| < 1$.

2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x\ln|x|, & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur son ensemble de définition.

b. Etudier la parité de f, puis dresser le tableau de variation de f.

c. Construire dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe de f et préciser la tangente au point d'abscisse 0, ainsi que la nature des branches infinies.

12 Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.
3. On pose
$g(x) = a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1)$
Calculer $g'(x)$ et en déduire que f est strictement croissante sur chacun des intervalles
$\left]-\frac{1}{b}, 0\right[$ et $]0,+\infty[$.
4. Montrer que $\ln\left(\frac{a}{b}+1\right).\ln\left(\frac{b}{a}+1\right) < (\ln 2)^2$.

13 1. Etudier les variations des fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(x) = \ln x - \dfrac{x-1}{x}$ et
$v(x) = x - 1 - \ln x$.
2. En déduire que $\dfrac{x-1}{x} < \ln x < x-1$, pour $x > 0$.
3. Utiliser l'inégalité précédente pour déduire que
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$ n entier, $n \geq 2$.

14 1. Montrer que pour
$t \geq 0, 1-t \leq \dfrac{1}{t+1} \leq 1-t+t^2$.
2. En déduire que pour tout
$x \geq 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.
3. Soit la fonction f définie par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
a. Montrer que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
b. Montrer que f est continue en 0 à droite.
c. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et préciser le nombre $f'_d(0)$.

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Tracer la fonction $x \mapsto \ln x$.
Pour tout entier un entier $n \geq 2$, on pose
$S_n = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln n$ et
$T_n = \ln 1 + \ln 2 + ... + \ln(n-1)$.

1. Montrer que $T_n \leq \displaystyle\int_1^n \ln x\,dx \leq S_n$.
2. En déduire que $\ln((n-1)!) \leq n\ln n - n + 1 \leq \ln(n!)$.

Puis que $e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

16 Soit f la fonction définie par

$f(x) = (x+1)\ln|x-3|$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition D de f.
2. a. Vérifier que si $x \in D$ alors
$f'(x) = \dfrac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$.
b. Calculer $f''(x)$.
En déduire les variations de f'.
c. Montrer que f' s'annule sur $]-\infty,3[$ pour une valeur de α.
Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1
Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty,3[$.
d. Etudier le signe de $f'(x)$ sur $]3,+\infty[$.
3. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition D_f.
Préciser les asymptotes éventuelles à C.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.
5. Tracer la courbe C.

17 Soit f la fonction définie par

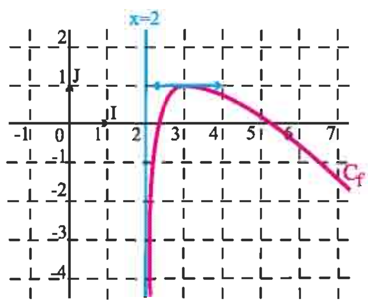
$f(x)=-\frac{x}{2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Préciser l'ensemble de définition D_f de f.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{-x}{2}$ est une asymptote à la courbe C.
Préciser la position relative de C par rapport à Δ.
4. Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie pour C.
5. Construire C.
6. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution réelle unique x_0 et que $\frac{2}{5}<x_0<\frac{9}{20}$.

18 A/ 1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x)=(1-x)\ln x$.
Résoudre l'équation $g(x)=0$ puis déterminer le signe de $g(x)$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x)=\ln x-x$.
a. Dresser le tableau de variation de h.
b. En déduire le signe de h.
B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
par $f(x)=\ln x(\ln x-x)$.
On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $f'(x)=\frac{g(x)+h(x)}{x}$.
2. Dresser le tableau de variation de f.
3. Déterminer la nature des branches infinies de C_f.
4. a. Déterminer le point d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses.
b. Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.
c. Vérifier que le point $A(e,-e+1)$ est un point d'intersection de C_f avec T.
5. Construire C_f et T.
6. Soit $\alpha\in]0,1[$ et D la partie du plan limité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\alpha$ et $x=1$.
a. Déterminer à l'aide de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de D.
b. Déterminer $\lim_{\alpha\to0^+}\mathcal{A}(\alpha)$.
7. a. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J à préciser.
b. Construire dans le même repère la courbe représentative de la fonction f^{-1}.

19 La courbe représentative C_f suivante est celle d'une fonction f dérivable sur $]2,+\infty[$.



1. a. Utiliser le graphique pour déterminer les valeurs de $f(3)$ et $f'(3)$.
b. On sait que la tangente au point d'abscisse 4 a pour coefficient $-\frac{1}{2}$. Tracer cette tangente.
2. a. Quelles semblent être les limites de f aux bornes de son ensemble de définition ?
b. Dresser le tableau des variations de f.
3. On suppose que la fonction f est de la forme $f(x)=ax+b+\ln(x+c)$.
A l'aide des valeurs mises en évidence dans la question 1, calculer les réels a, b et c.
Par la suite, on utilise la forme de f(x) trouvée dans cette question.

4. Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

5. a. Tracer la droite Δ d'équation $y=-x+4$.

b. Etudier algébriquement la position de la courbe C_f avec Δ.

6. Soit g la restriction de f sur $]2,3]$.

a. Montrer que g réalise une bijection de $]2,3]$ sur un intervalle J à préciser.

b. Construire dans le même repère la courbe C' de g^{-1}.

c. La fonction g^{-1} est-elle dérivable à gauche de 1?

20 A/ Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\ln x}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Interpréter les résultats graphiquement.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ et que $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(\ln x)^2}$.

b. Dresser le tableau de variation de f.

3. Soit h la restriction de f à $]0,1[$.

a. Montrer que h réalise une bijection de $]0,1[$ sur un ensemble J que l'on précisera.

b. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet dans $]0,1[$ une seule solution α et que $0.5<\alpha<0.6$.

c. En déduire que C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point que l'on précisera.

4. Tracer C_f.

5. Tracer dans le même repère la courbe représentative de la fonction h^{-1} puis déduire le tableau de variation de la fonction h^{-1}.

6. a. Montrer que $h'(\alpha)=-\frac{\alpha+1}{\alpha^3}$.

b. Montrer que h^{-1} est dérivable en 0 et exprimer $\left(h^{-1}\right)'(0)$ en fonction de α.

B/ Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=2f\left(x^2\right)$.

On désigne par C_g la courbe représentative de f dans le même repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. Vérifier que pour tout $x\in]1,+\infty[$,

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}$$

2. En déduire la position relative de C_f et C_g sur $]1,+\infty[$.

3. Soit $x\in[2,+\infty[$, on désigne par M et N les points respectifs de C_f et C_g d'abscisse x.

Pour quelle valeur de x, la distance NM est maximale?

21 A/ On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$

1. Etudier le sens de variation de g.

2. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,+\infty[$.

Donner un encadrement de α d'amplitude 0.1

3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$.

B/ On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}.$$

On note C la courbe de f dans un repère orthogonal. (unité 2 cm sur l'axe (Ox), 4 cm sur l'axe (Oy)).

1. Etudier les limites de f en 0 à droite et en $+\infty$.

2. Montrer que pour $x>0$, $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}\times g(x)$

En déduire le signe de $f'(x)$.

3. Dresser le tableau de variation de f et montrer que

$$f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$$

4. Tracer la courbe C et préciser la tangente à C au point d'abscisse 1.

C/ 1. a. Déterminer une primitive sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$

b. Montrer que pour $x \geq 1$, $f(x) \leq \frac{\ln x}{x}$.

2. Soit F la primitive de f sur $[1,+\infty[$ qui s'annule en 1. Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que pour $x \geq 1$, $F(x) \leq \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

22 Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la fonction dérivée de f.

b. Calculer alors $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$.

2. Etudier f et tracer (C).

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer la courbe de la fonction f^{-1}.

c. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^1 \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx$.

En déduire $\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} f^{-1}(x)dx$.

23 On pose pour tout entier $p \geq 1$,

$I_p = \int_1^e x^2 (\ln x)^p dx$.

a. Montrer que la suite (I_p) est décroissante.

b. Montrer que la suite (I_p) vérifie la relation de récurrence $I_{p+1} + \frac{p+1}{3} I_p = \frac{e^3}{3}$

c. Calculer I_1 et I_2.

2. Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\frac{e^3}{p+4} \leq I_p \leq \frac{e^3}{p+3}$

Calculer alors $\lim\limits_{p \to +\infty} I_p$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} pI_p$.

24 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(\ln x)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Etudier la dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

3. On pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$ avec $n \geq 2$.

Montrer que pour tout entier $k \geq 2$

$\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln t} dt \leq \frac{1}{k \ln k}$.

4. Calculer $\int_2^{n+1} \frac{1}{t \ln t} dt$ et en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

25 1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on a

$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2. a. Montrer que $\sum_{p=1}^{n} p = \frac{n(n+1)}{2}$ et

$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b. On pose $P_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \times \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \times \ldots \times \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.

26 Pour tout réel a, on désigne par f_a la fonction définie par $f_a(x) = \ln\left(x^2 + a\right)$.

1. a. Indiquer, suivant les valeurs de a, l'ensemble de définition de f_a.

b. Donner les différents tableaux de variations de f_a selon les valeurs de a.

c. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_a(x)}{x}$, en déduire la nature des branches infinies des courbes représentatives de f_a dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

d. (C_a) et $(C_{a'})$ désignant les courbes des fonctions f_a et $f_{a'}$ (avec $a \neq a'$).

Soit M un point de (C_a) et M' le point de $(C_{a'})$ de même abscisse.

Montrer que MM' est non nul.

Que pouvez-vous en déduire pour C_a et $C_{a'}$?

Montrer que MM' tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

e. Tracer, sur un même graphique, les courbes C_{-1}, C_0 et C_1 dans un même repère orthonormé (unité 2 cm).

Préciser les points d'intersection avec l'axe des abscisses et les tangentes en ces points.

2. Dans cette question, on pose $a = \frac{3}{4}$.

a. On se propose d'étudier la position de la courbe $C_{\frac{3}{4}}$ par rapport à la droite D d'équation $y = x$, pour x positif.

A cet effet, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x - \ln\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)$

Etudier le sens de variation de g.

En déduire la position de $C_{\frac{3}{4}}$ par rapport à D.

b. Soit h la restriction de la fonction $f_{\frac{3}{4}}$ à $\mathbb{R}_+$.

Montrer que h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble que l'on précisera.

c. Tracer la représentation graphique de h et de h^{-1} dans un repère orthonormé.

27 A/ Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = (x-1)^n \ln x$.

On désigne par C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On pose pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi_n(x) = n\ln x + 1 - \frac{1}{x}$

a. Etudier les variations de φ_n.

b. Calculer $\varphi_n(1)$ et en déduire le signe de $\varphi_n(x)$ pour tout x strictement positif.

2. a. Etudier les variations de f_n et dresser, suivant la parité de n, son tableau de variation.

b. Tracer les courbes C_1 et C_2 en précisant les positions relatives de ces deux courbes.

3. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_1 et C_2 et les droites $x = 1$ et $x = 2$.

B/ Dans cette partie, on se propose d'étudier la suite (v_n) définie par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$, $n \geq 0$.

1. On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \int_1^2 f_n(x)\,dx.$$

2. Montrer que pour tout

$$n \in \mathbb{N}^*, (n+1)u_n = \ln 2 - \int_1^2 \frac{(x-1)^{n+1}}{x}dx.$$

3. En déduire alors

a. La relation

$$\frac{1}{2(n+2)} \leq \ln 2 - (n+1)u_n \leq \frac{1}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

b. Calculer la limite de $(n+1)u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. On pose, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel $x > 0$,

$$S_n(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + \ldots + (-1)^n (x-1)^n$$

a. Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{x} - (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{x}$

b. En déduire, en utilisant la première question de la partie B, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\ln 2 - v_n = (-1)^{n+1}\left[\ln 2 - (n+1)u_n\right].$$

3. Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

28 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I/ 1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par $g(x) = x\ln x - x + 1$.

a. Dresser le tableau de variation de g.

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in [1, +\infty[$.

2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x} & \text{si } x \in]1, +\infty[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Montrer que f est continue à droite en 1.

3. a. Montrer que pour tout réel t de $[1, +\infty[$,

$$t - 1 - (t-1)^2 \leq 1 - \frac{1}{t} \leq t - 1.$$

b. En déduire que pour tout réel x de $[1,+\infty[$,

$\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{3}\leq x-1-\ln x\leq\frac{(x-1)^2}{2}$.

c. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$.

d. En déduire que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1)=\frac{1}{2}$.

4. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

b. Tracer la courbe représentative C de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On précisera la nature de la branche infinie de C).

II/ On considère la fonction F définie sur $[1,+\infty[$ par

$$F(x)=\begin{cases}\int_x^{x^2}\frac{1}{\ln t}dt & \text{si } x\in]1,+\infty[,\\ \ln 2 & \text{si } x=1.\end{cases}$$

On désigne par C′ la courbe représentative de la fonction F dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. a. montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$ et pour tout t de $[x,\ x^2]$, $\frac{x}{t\ln t}\leq\frac{1}{\ln t}\leq\frac{x^2}{t\ln t}$.

b. En déduire que pour tout x de $]1,+\infty[$, on a $x\ln 2\leq F(x)\leq x^2\ln 2$.

c. Montrer alors que F est continue en 1.

3. a. Montrer que pour tout x de $]1,+\infty[$, F est dérivable et que $F'(x)=f(x)$.

b. soit x un réel de $]1,+\infty[$. Montrer qu'il existe un réel c de $]1,x[$ tel que $F(x)-F(1)=(x-1)F'(c)$.

c. En déduire que F est dérivable à droite en 1 et que $F'_d(1)=1$.

4. Dresser le tableau de variation de F et tracer la courbe C′ de F.

(On précisera la nature de la branche infinie de C′).

III/ Soit α un réel de $]1,+\infty[$ et $\mathcal{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations $y=0$, $x=1$ et $x=\alpha$.

1. Montrer que pour tout réel x de $]1,+\infty[$, on a

$F(x)=\int_1^x f(t)dt+\ln 2$.

2. En déduire $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\mathcal{A}(\alpha)}{\alpha}$ et $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\frac{\mathcal{A}(\alpha)}{\alpha^2}$.

29 I/ 1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $h(x)=x-\ln x$.

a. Dresser le tableau de variation de f.

b. En déduire que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, $h(x)\geq 1$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-\ln x} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

a. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

b. La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ?

II/ Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$F(x)=\int_x^{2x}f(t)dt$.

1. a. Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$,

$F'(x)=\frac{\ln 2-\ln x}{h(2x).h(x)}$ et $F'_d(0)=0$.

2. Montrer que pour tout x de $]0,+\infty[$,

$\int_x^{2x}\frac{dt}{t}=\ln 2$.

3. Montrer que pour tout x de $[1,+\infty[$,

$0\leq F(x)-\ln 2\leq\frac{\ln(2x)}{x-\ln x}$.

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

4. a. Montrer que $F\left(\frac{1}{2}\right)\leq\ln 2$.

b. Montrer alors qu'il existe un réel α de $[\frac{1}{2},\ 1]$ tel que $F(\alpha)=\ln 2$.

5. a. Dresser le tableau de variation de F.

b. Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

$(\text{On donne } F(1)\simeq 0.9 \text{ et } F(2)\simeq 1.1)$.

III/ Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit la suite (v_n) définie par

$$v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t-\ln t}dt,\ n \geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $]0,+\infty[$, $\dfrac{t}{t-\ln t} \leq t$.

b. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

c. En déduire que la suite (v_n) est convergente et que $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \dfrac{1}{2}$.

2. Soit la suite (w_n) définie par

$$w_n = \int_{1}^{n} \frac{t}{t-\ln t}dt\ n\ \ n \geq 1.$$

a. Montrer que pour tout t de $[1,+\infty[$,

$\dfrac{t}{t-\ln t} \leq 1+\ln t$.

b. Calculer $\displaystyle\int_1^n 1+\frac{\ln t}{t}dt$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

30 A/ Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par

$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

b. Montrer que $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=+\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de f.

2. a. Etudier la position de la courbe de C_f et de la droite $D: y=x$.

b. Construire C_f.

3. a. Montrer que f réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b. Construire dans le même repère la courbe C' de la fonction réciproque f^{-1} de f.

B/ Soit F la fonction définie sur $]0,1]$ par

$$F(x)=\int_2^{\frac{2}{x}} f(t)dt.$$

1. Montrer que F est dérivable sur $]0,1]$ et calculer $F'(x)$.

2. a. Montrer que pour tout $t\in[2,+\infty[$, $f(t)\geq \ln t$.

b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_2^{\frac{2}{x}} \ln t\,dt$.

c) En déduire que pour tout $x\in]0,1]$,

$F(x)\geq \dfrac{2}{x}\left(\ln\left(\dfrac{2}{x}\right)-1\right)$.

d. Calculer alors $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$

3. Dresser le tableau de variation de F et donner une allure de la courbe de F.

C/ Pour tout $x\in]2,+\infty[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose

$$g_n(x)=\int_{2\sqrt{2}}^{x} \frac{t^{2n}}{\sqrt{t^2-4}}dt \text{ et } \ell_n = \lim_{x\to2^+} g_n(x).$$

1. Justifier l'existence de $g_n(x)$ pour tout $x\in]2,+\infty[$.

2. Calculer $g_0(x)$ pour $x\in]2,+\infty[$. En déduire ℓ_0.

3. Montrer que pour tout $x\in]2,+\infty[$,

$g_1(x)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}-2\sqrt{2}+2g_0(x)$.

En déduire ℓ_1.

4. a. Montrer que pour tout $x\in]2,+\infty[$ et pour tout,

$$n\in\mathbb{N},\ g_{n+1}(x)=x^{2n+1}\sqrt{x^2-4}-2^{3n+2}\sqrt{2} -(2n+1)\int_{2\sqrt{2}}^{x} t^{2n}\sqrt{t^2-4}\,dt.$$

b. En déduire que pour tout $x\in]2,+\infty[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$(2n+2)g_{n+1}(x)=x^{2n+1}\sqrt{x^2-4}-2^{3n+2}\sqrt{2} +4(2n+1)g_n(x).$$

c. Exprimer ℓ_{n+1} à l'aide de ℓ_n.

Chapitre 8

Fonction exponentielle

Des questions telles que "Si le nombre d'habitants d'une province s'accroît tous les ans d'une trentieme, & qu'il y ait au commencement 100.000 habitants; on veut savoir combien il y en aura au bout de 100 ans ?" (Euler 1748, Introductio §110) ou "Un particulier doit 400.000 florins, dont il est convenu de payer tous les ans l'intérêt à 5 pour cent…"
En appliquant la formule du binôme, Euler dit sans la moindre hésitation, "Si N est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable la fraction $\left(\frac{N-1}{N}\right)$ égalera l'unité". […] si N tend vers l'infini, $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ tend vers le nombre d'Euler e.

(E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000)

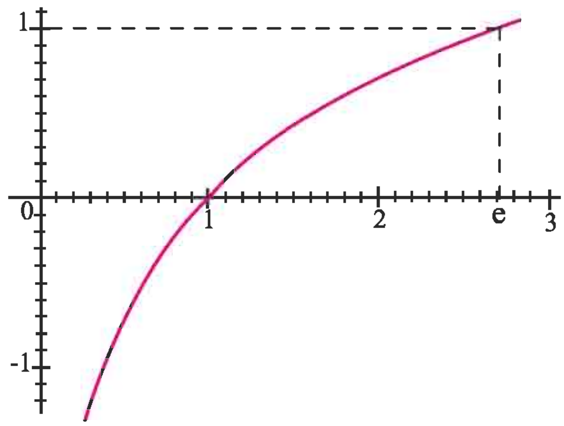
Chapitre 8

Fonction exponentielle

I. Définition et propriétés

Activité 1

1. Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction logarithme népérien.
Donner graphiquement une valeur approchée de l'antécédent de chacun des réels $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$



2. Montrer que la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ admet une fonction réciproque que l'on désignera par exp. Tracer la courbe représentative de la fonction exp.
3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction exp et ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
4. Que valent $\exp(0)$, $\exp(1)$, $\exp(2)$ et $\exp(-1)$?
5. Montrer que $\exp(n) = e^n$ pour n entier.
6. a. Soit a et b deux réels. Comparer $\exp(a+b)$ et $\exp(a).\exp(b)$; $\exp(a-b)$ et $\frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(na) = (\exp(a))^n$, $a \in \mathbb{R}$.

Définition

On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien.
L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est noté e^x.

Conséquences

- Pour tout réel x et pour tout réel strictement positif y, $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$.
- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- $\ln e = 1$.

Activité 2

Utiliser une calculatrice pour donner une valeur approchée de $e^{\frac{2}{3}}$, $e^{\sqrt{3}}$ et $e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Activité 3

Simplifier $e^{\ln 1}$, $e^{\ln 2}$, $e^{-\ln 3}$, $\ln\left(e^{-2}\right)$, $\ln\left(e^{-2\ln 3}\right)$.

Propriétés

Soit deux réels a et b.

P_1. $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

P_2. Pour tout entier n, $e^{na} = \left(e^a\right)^n$.

P_3. Pour tout entier naturel $q \geq 2$, $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.

P_4. Pour tout entier naturel $q \geq 2$ et tout entier p, $e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

Démonstration

Les propriétés P_1 et P_2 ont été démontrées dans l'activité 1.

P_3. Soit q un entier tel que $q \geq 2$ et a un réel.

En écrivant $a = q \times \dfrac{a}{q}$, on obtient $e^a = e^{q \times \frac{a}{q}}$. De la propriété P_2 on en déduit que $e^a = \left(e^{\frac{a}{q}}\right)^q$.

Par suite $e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a}$.

P_4. Soit q un entier tel que $q \geq 2$ et p un entier naturel. On peut écrire $e^{\frac{p}{q}a} = e^{\frac{1}{q}(pa)} = \sqrt[q]{e^{pa}}$.

Activité 4

Simplifier les écritures suivantes $\sqrt[6]{e^2} \times e^{\frac{3}{2}}$; $\dfrac{\sqrt{e^3}}{\sqrt{e^{-4}}}\sqrt[4]{e^2}$ et $\dfrac{\sqrt{e^{30}}}{\sqrt{e^{-42}}}\sqrt[10]{e^{-20}}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1. $e^x = 3$.
2. $\ln x = 3$.
3. $e^{2x+3} = 4$.
4. $e^{2x+3} = e$.
5. $\left(e^x - 1\right)\left(e^x - 2\right) = 0$.
6. $e^{2x} + e^x - 3 = 0$.

Activité 6

Soit x un réel positif. Pour tout entier $n > 0$, on pose $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II. Etude de la fonction exponentielle

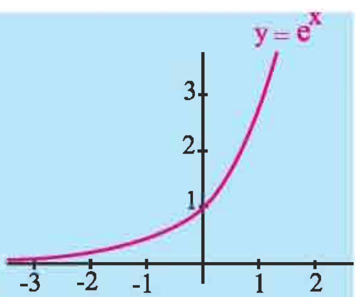
Activité 1

On désigne par C la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$.
2. On pose $X = e^x$.
   a. Montrer que $\dfrac{e^x}{x} = \dfrac{X}{\ln X}$
   b. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement.
3. a. Justifier la dérivabilité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
   b. Calculer alors $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}$
   c. Dresser le tableau de variation de la fonction exponentielle.
4. Etudier l'intersection de la courbe C avec les axes du repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
5. a. Déterminer l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
   b. Soit la fonction h définie pour tout réel x par $h(x) = e^x - x - 1$.
   Etudier les variations de h et en déduire la position relative de (C) par rapport à T.
6. Tracer C et T.

Théorème

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto e^x$.
  La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel x, $e^x > 0$.



Activité 2

On se propose de déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation $(E): f'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

1. Montrer que la fonction exponentielle vérifie (E).
2. Soit f une fonction qui vérifie (E) et h la fonction définie par $h(x) = e^{-x} f(x)$

   Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $h'(x) = 0$ pour tout réel x.
3. En déduire l'ensemble des fonctions qui vérifient (E).

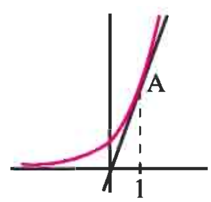
Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1. $e^{3x} \leq e^{x^2}$.
2. $e^{3x} \leq 4e^{x}$.
3. $e^{x(x-1)} > 1$.

Activité 4

Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction $f : x \mapsto e^{x}$ ainsi qu'une tangente T qui passe par l'origine.



1. Déterminer les coordonnées du point de contact A entre C_f et T.
2. Soit n un entier naturel, montrer que la tangente à C_f au point d'abscisse $(n+1)$ passe par le point de coordonnées $(n, 0)$.

III. Limites usuelles

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x}$.

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.
2. a. Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^{t}}$

   b. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^{x}$ puis interpréter le résultat graphiquement.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que C_f admet un point d'inflexion I que l'on précisera.
5. Tracer C_f en précisant la tangente T en I.

Activité 2

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x)=e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

1. Montrer par récurrence sur l'entier naturel n, que pour tout réel $x>0$, $f_n(x)\geq 0$.
2. a. Montrer que pour tous entiers naturels non nuls n et m, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{nx}}{x^m}=+\infty$.

   b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left|x^m e^{nx}\right|$.

Théorème

Soit m et n deux entiers naturels non nuls, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{nx}}{x^m}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^m e^{nx}=0$.

Activité 2

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-e^{2x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^4-x\right)e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(e^{2x}-e^x+1\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(e^{2x}-e^x\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}x+1+\frac{1}{e^x+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2-x+1}$.

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-e^x$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.
2. a. Montrer que C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α et que $-1<\alpha<0$.

   b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. a. Montrer que C_f admet un point d'inflexion I que l'on précisera.

   b. Ecrire une équation de la tangente à C_f au point I.
4. Tracer C_f.
5. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

IV. La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Activité 1

Etudier et représenter la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction $h : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $h'(x) = u'(x)e^{u(x)}$, $x \in I$.

Démonstration

On peut écrire pour tout réel x de I, $h(x) = f(u(x))$ avec $f : x \mapsto e^{x}$ de sorte que $h = f \circ u$.

Le théorème en résulte.

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Les primitives sur I de la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions

$x \mapsto e^{u(x)} + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Activité 2

Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous.

$x \mapsto \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$, $x \mapsto (2x+1)e^{-3x}$, $x \mapsto \dfrac{e^{2x}+1}{2e^{2x}+3}$ et $x \mapsto x^3e^{3x}$.

Activité 3

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

$x \mapsto e^{-3x}$; $x \mapsto xe^{x^2}$; $x \mapsto (2x+1)e^{x^2+x}$ et $x \mapsto \sin x\, e^{\cos x}$.

Activité 4

Calculer les intégrales ci-dessous.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2}dx$; $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$; $\displaystyle\int_0^1 xe^{x}dx$ et $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x+1}dx$.

Activité 5

1. Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Etudier f et représenter C_f.
2. Montrer que pour $x \geq \frac{1}{2}$, $x^2 \geq \frac{1}{2}x$.
3. Pour tout réel $\alpha > \frac{1}{2}$, on désigne par $A(\alpha)$ l'aire de la partie limitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \frac{1}{2}$.
   a. Montrer que $A(\alpha) \leq \int_{\frac{1}{2}}^{\alpha} e^{-\frac{1}{2}x} dx$.
   b. En déduire que la fonction $\alpha \mapsto A(\alpha)$ possède une limite finie L quand α tend vers $+\infty$.
4. Montrer que pour tout réel $\alpha \geq 1$, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{-x} dx \leq A(\alpha)$.
5. Donner un encadrement de L.

Activité 6

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. a. Montrer que tout entier naturel n, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \frac{n!}{e}\left[e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right]$.
4. En déduire que $e = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

V. Exponentielle de base a

Activité 1

1. Calculer les réels $e^{3\ln 2}$, $e^{4\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$, $e^{-2\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$, $e^{-2\ln\sqrt{2}}$.
2. Vérifier que pour tout réel a strictement positif et pour tout entier n, $a^n = e^{n\ln a}$.

Soit un réel $a > 0$. Pour tout réel b, on pose $a^b = e^{b\ln a}$.

Activité 2

Soit p et q deux entiers tels que $q \geq 2$ et a un réel strictement positif.

Montrer que $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$; $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous.

$2^x = \frac{1}{2}$, $10^{x+1} = 2^{-x+2}$ et $\left(\sqrt{2}\right)^x = 2^{-x+1}$

Les règles opératoires ci-dessous découlent des propriétés de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle.

Propriétés

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b et tous réels c et d,

$a^{c+d} = a^c \times a^d$; $\left(a^c\right)^d = a^{cd}$; $a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d}$; $a^c \times b^c = (ab)^c$; $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit les fonctions $f : x \mapsto e^{x\ln 2}$ et $g : x \mapsto e^{-x\ln 2}$. On note C_f et C_g leurs courbes représentatives.

1. Etudier et représenter la fonction f.
2. Soit un réel a et $A(a, f(a))$ un point de C_f.
   Montrer que le symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées est un point de C_g.
3. Montrer que C_f et C_g sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Définition

Soit un réel $a > 0$. On appelle fonction exponentielle de base a la fonction $x \mapsto a^x$.

Conséquences

Les résultats ci-dessous découlent de la définition précédente et des propriétés de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle.

Soit un réel $a > 0$. La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \mapsto (\ln a)a^x$.

La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $a > 1$.

La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < a < 1$.

La fonction $x \mapsto 1^x$ est une fonction constante.

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto a^x$.

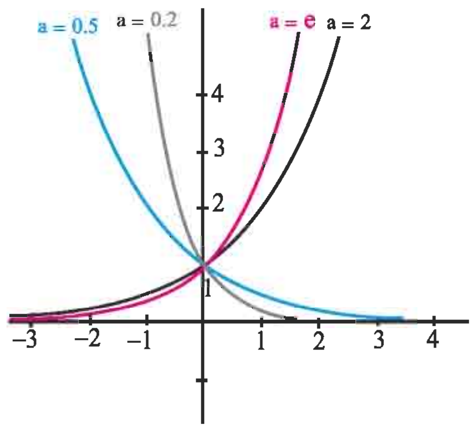
$a > 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

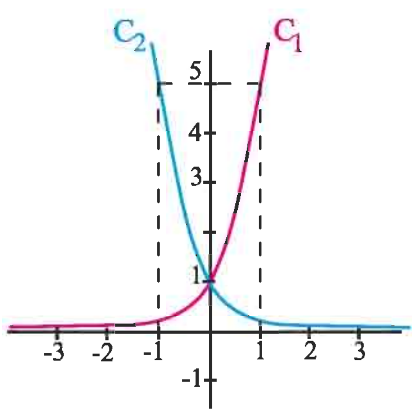
$0 < a < 1$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0

Courbes représentatives



Activité 5



Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Le graphique ci-contre représente C_1 et C_2 deux courbes représentatives respectives des fonctions $f_{b_1} : x \mapsto (b_1)^x$ et $f_{b_2} : x \mapsto (b_2)^x$.
Déterminer les réels strictement positifs b_1 et b_2.

Activité 6

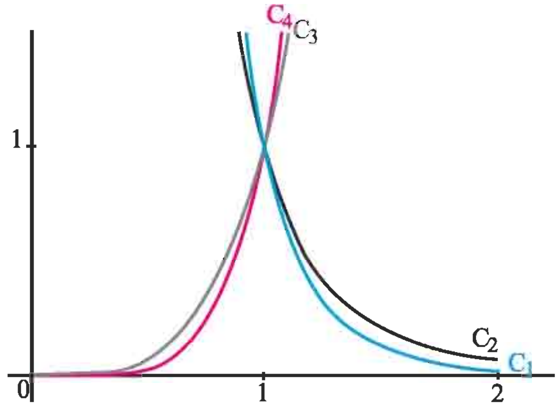
Déterminer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to+\infty} 2^{x^2-2x} \; ; \; \lim_{x\to-\infty} 2^{x^2-2x} \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2x} .$$

VII. Fonctions puissances

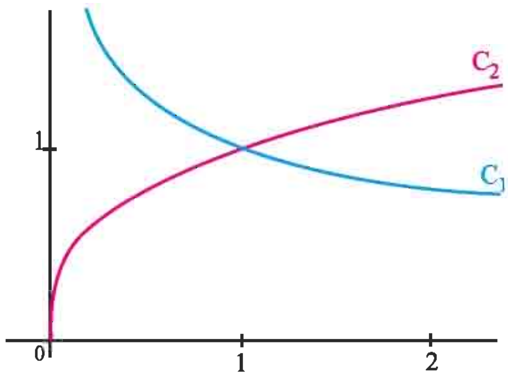
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On a représenté les fonctions
$x \mapsto x^4$; $x \mapsto x^5$; $x \mapsto x^{-4}$; $x \mapsto x^{-5}$, $x > 0$.
Identifier chacune des fonctions.



Activité 2

On a représenté les fonctions
$x \mapsto \sqrt[3]{x}$; $x \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{1}{x}}$.
Identifier chacune des fonctions.



Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sqrt{x^3}$.

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = e^{\frac{3}{2}\ln x}$
2. Etudier et représenter f.
3. Montrer que f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Déterminer f^{-1}.

Activité 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\geq 2$

Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)=x^{\frac{1}{n}}$.

Notation

Pour tout rationnel r et tout $x>0$, on note $e^{r.\ln x}=x^r$.

Définition

Soit r un rationnel. On appelle fonction puissance r la fonction $x\mapsto e^{r.\ln x}, x>0$.

Les résultats ci-dessous découlent des propriétés des limites des fonctions ln et exp.

Si $r>0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=+\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} x^r=0$.

Si $r<0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r=0$; $\lim\limits_{x\to0^+} x^r=+\infty$.

Activité 5

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}}$; $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\frac{2}{3}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-\frac{4}{3}}$; $\lim\limits_{x\to0^+} x^{-\frac{4}{3}}$.

Théorème

Soit r un rationnel. La fonction $x\mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x\mapsto r\,x^{r-1}$.

Corollaire

Soit r un rationnel différent de -1. Les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x\mapsto x^r$ sont les fonctions $x\mapsto \dfrac{1}{r+1}x^{r+1}+k,\ k\in\mathbb{R}$.

Activité 6

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$ et $g(x)=\begin{cases} x^{\frac{10}{3}} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$

1. a. Montrer que f et g sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
   b. Etudier la dérivabilité de f et g à droite en 0.
2. Etudier et représenter les fonctions f et g.

3. Déterminer l'aire de la partie limitée par les courbes C_f et C_g et les droites $x=1$ et $x=2$.
4. Montrer que les fonctions précédentes sont des bijections strictement croissantes et déterminer leurs fonctions réciproques.

VIII. Croissances comparées

Activité 1

On considère les fonctions $f: x \mapsto (\ln x)^2$ et $g: x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Etudier le signe de $f'(x)-g'(x)$.
3. Comparer $f(x)$ et $g(x)$.
4. Soit les fonctions $h: x \mapsto x^2$, $t: x \mapsto \sqrt{e^x}$.
   Comparer $h(x)$ et $t(x)$.

Théorème

Soit r un rationnel strictement positif.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \;;\; \lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0 \;;\; \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty \;.$$

Démonstration

On peut écrire $\frac{\ln x}{x^r} = \frac{1}{r}\frac{\ln x^r}{x^r}$. Il découle alors de $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$.

On démontre de même que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$.

On peut écrire pour tout $x > 0$, $\frac{e^x}{x^r} = e^{x - r\ln x}$.

De plus $x - r\ln x = x\left(1 - r\frac{\ln x}{x}\right)$.

Il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - r\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - r\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty$.

Activité 2

1. Montrer que $(1+x)^{-\frac{3}{4}} \leq x^{-\frac{3}{4}}$, pour tout $x > 0$.

2. Comparer alors $(1+x)^{\frac{1}{4}}$ et $1+x^{\frac{1}{4}}$ pour tout $x > 0$.

Activité 3

Soit un rationnel $r > 0$ et $f : x \mapsto (1+x)^r$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Dans cette question, on suppose que $0 < r < 1$.

Comparer $(1+x)^r$ et $1+rx$.

3. Reprendre la question précédente lorsque $r > 1$.
4. Représenter f lorsque $r = \dfrac{1}{3}$ puis lorsque $r = \dfrac{5}{3}$.

Activité 4

1. Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.
2. En déduire les variations de la fonction $g : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$.
3. Représenter graphiquement la fonction g.

Exercice résolu 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

et C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Etudier la dérivabilité de f en tout réel différent de 0 et de 1.
   b. Etudier la continuité de f en 0 et en 1.
   c. Etudier la dérivabilité de f en 1.
   d. Montrer que f est dérivable à gauche en 0.
2. a. Pour tout x non nul et différent de 1, calculer $\ln(f(x))$ et en déduire $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

   b. Etudier le sens de variation de f.
3. Etudier la limite de $f(x)$, puis celle de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter.
4. Dresser le tableau de variation de f puis représenter graphiquement f.

Solution

1. a. La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est dérivable en tout réel non nul.

La fonction $x \mapsto \sqrt{|x-1|}$ est dérivable en tout réel différent de 1.

On en déduit que f est dérivable en tout réel non nul et différent de 1.

b. Remarquons que $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x-1|}=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to -\infty} e^{X}=0$,

par suite $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0=f(0)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to +\infty} e^{X}=+\infty$. On en déduit que f n'est pas continue en 0.

c. Pour $x\neq 1$ et $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}}}{x-1}=\dfrac{|x-1|e^{\frac{1}{x}}}{(x-1)\sqrt{|x-1|}}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{|x-1|}}=+\infty$, on en déduit que f n'est pas dérivable en 1.

d. Pour $x<0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\sqrt{|x-1|}e^{\frac{1}{x}}}{x}=\sqrt{|x-1|}\times\left(\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{X\to -\infty} Xe^{X}=0$.

On en déduit que f est dérivable à gauche en 0, $f'_g(0)=0$.

2. a. Pour $x\neq 0$ et $x\neq 1$, $\ln(f(x))=\ln\left(\sqrt{|x-1|}\right)+\ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right)=\dfrac{1}{2}\ln|x-1|+\dfrac{1}{x}$.

D'après la question 1, la fonction f est dérivable en tout réel non nul différent de 1 et on peut écrire $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=(\ln\circ f)'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)-\dfrac{1}{x^2}$.

b. Pour $x\neq 0$ et $x\neq 1$, $f(x)>0$ et par suite le signe de $f'(x)$ est celui de $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{x^2-2(x-1)}{2(x-1)x^2}=\frac{x^2-2x+2}{2(x-1)x^2}=\frac{(x-1)^2+1}{2(x-1)x^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2(x-1)x^2$.

f est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et croissante sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

3. • Remarquons que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{|x-1|}=+\infty$, de plus $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x}=1$,

par suite $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

On montre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

• Pour $x\neq0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x}e^{\frac{1}{x}}$.

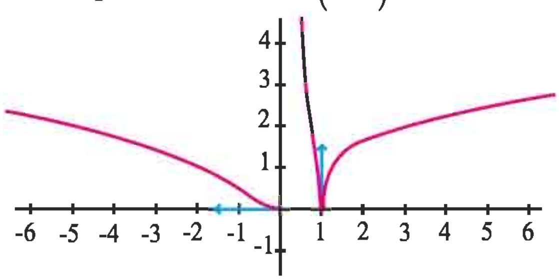
Les égalités $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{|x-1|}}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ impliquent que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

On montre de même que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

C_f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ des branches paraboliques de direction $(O,\vec{i})$.

4.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$+$	
f	$+\infty$	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



Exercice résolu 2

1. a. Montrer $e^{-t}(1+t)\leq1$, $t\geq0$.

b. En déduire les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u(t)=\dfrac{e^{-t}-1}{t}$.

2. Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt & \text{si } x>0,\\ \ln2 & \text{si } x=0.\end{cases}$

a. Montrer que $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt+\ln2$, $x>0$.

b. Montrer que $e^{-x}-1\leq\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\leq\frac{e^{-2x}-1}{2}$, $x>0$.

c. En déduire que F est continue sur $[0,+\infty[$.

3. Montrer que $e^{-2x}\ln2\leq F(x)\leq e^{-x}\ln2$, $x>0$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

4. Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et préciser $F'_d(0)$.

5. Tracer la courbe représentative de F dans un repère.

Solution

1. a. Soit $t \geq 0$. On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=(1+t)e^{-t}-1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geq 0$, $f'(t)=e^{-t}-(1+t)e^{-t}=-te^{-t}$.

On en déduit que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, $f(0)=0$. Alors $f(t)\leq 0$ pour tout $t\geq 0$. Le résultat en découle.

b. La fonction $u : t \mapsto \dfrac{e^{-t}-1}{t}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Sa fonction dérivée est définie par $u'(t)=\dfrac{1-e^{-t}(t+1)}{t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

D'après la question 1. a. $e^{-t}(1+t)\leq 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que u est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a. Soit $x>0$. $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt=F(x)-[\ln t]_x^{2x}=F(x)-\ln 2$.

b. La fonction u étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x>0$ et pour tout $t\in[x,2x]$, $u(x)\leq u(t)\leq u(2x)$.

Par conséquent $\displaystyle\int_x^{2x}u(x)dt \leq \int_x^{2x}u(t)dt \leq \int_x^{2x}u(2x)dt$. Le résultat en découle.

c. D'après la question 2. b. $\displaystyle e^{-x}-1\leq \int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\leq \frac{e^{-2x}-1}{2}$ pour tout $x>0$.

De plus $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-2x}-1}{2}=0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}e^{-x}-1=0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt=0$.

Par conséquent $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}F(x)-\ln 2=0$. Il en résulte que f est continue à droite en 0.

Continuité de F sur $]0,+\infty[$

Soit G une primitive de $v : t\mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. $F(x)=G(2x)-G(x)$.

La fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus $2x>0$, on déduit que la fonction $x\mapsto G(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent F est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit un réel $x>0$ et t un réel de l'intervalle $[x,2x]$.

$x \le t \le 2x$ équivaut à $-2x \le -t \le -x$

équivaut à $e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x}$

équivaut à $\dfrac{e^{-2x}}{t} \le \dfrac{e^{-t}}{t} \le \dfrac{e^{-x}}{t}$.

Par conséquent $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t}dt \le F(x) \le \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t}dt$.

De l'égalité $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t} = \ln 2$ découle $e^{-2x}\ln 2 \le F(x) \le e^{-x}\ln 2$. Par suite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

4. **Dérivabilité de F à droite en 0**

D'après 2. b. $e^{-x} - 1 \le \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}-1}{t}dt \le \frac{e^{-2x}-1}{2}$, $x > 0$.

Par conséquent $\dfrac{e^{-x}-1}{x} \le \dfrac{F(x)-\ln 2}{x} \le \dfrac{e^{-2x}-1}{2x}$.

Les égalités $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-2x}-1}{2x} = -1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$ impliquent que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x} = -1$.

Par suite la fonction F est dérivable à droite en 0 et $F'_d(0) = -1$.

Dérivabilité de F sur $\mathbb{R}_+^*$

On sait que pour $x > 0$, $F(x) = G(2x) - G(x)$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $2x > 0$.

Par suite F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout

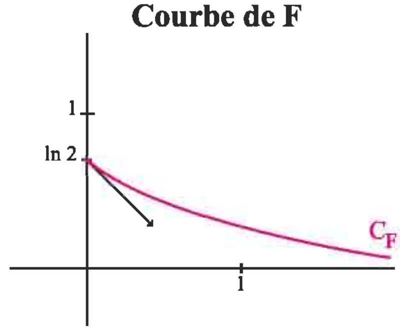
$x \in \mathbb{R}_+^*$, $F'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = \dfrac{2e^{-2x}}{2x} - \dfrac{e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = \dfrac{e^{-x}\left(e^{-x}-1\right)}{x}$.

5. Pour tout $x > 0$, $e^{-x} - 1 < 0$ d'où $F'(x) < 0$ pour tout $x > 0$.

Tableau de variation de F

x	0		$+\infty$
F'(x)	-1	$-$	
F	$\ln 2$	$\searrow$	0

Courbe de F



- La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe de F au voisinage de $+\infty$.
- La courbe de F admet au point d'abscisse 0 une demi tangente de coefficient directeur -1.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Le réel $e^{-3\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ est égal à

☐ $-\frac{1}{8}$. ☐ 8. ☐ -6.

2. Le réel $2e^{x+y}$ est égal à

☐ e^{2x+2y}. ☐ $e^{2x}e^{2y}$. ☐ $2e^{x}e^{y}$.

3. L'équation $e^{x}=\frac{1}{e}$ est équivalente à

☐ $x=-1$. ☐ $x=\ln e$. ☐ $x=e$.

4. L'inéquation $-2<e^{x^2-1}<1$ est équivalente à

☐ $e^{x^2-1}>0$. ☐ $x^2>1$. ☐ $-1<x<1$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{2e^{x}}{x^4}-\frac{1}{x^2}$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$. ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

6. Sur $\mathbb{R}_+^*$ la dérivée de $f: x\mapsto \frac{e^{x}}{x}$ est

☐ $f'(x)=e^{x}$. ☐ $f'(x)=\frac{x-1}{x^2e^{-x}}$. ☐ $f'(x)=\frac{e^{x}(x+1)}{x^2}$.

7. L'intégrale $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ est égale à

☐ $e-1$. ☐ $\frac{1}{2}e$. ☐ $\frac{1}{2}(e-1)$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\ln x<x<e^{x}$.
3. Soit r un rationnel différent de 1.
   La fonction $x\mapsto x^{r+1}$ est une primitive de $x\mapsto x^{r}$ sur $]0,+\infty[$.
4. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ est paire.
5. L'équation $\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1$ est équivalente à $e^{x}=1$.

1 1. Simplifier les écritures ci-dessous.

$e^{5\ln(3)}$ et $e^{-3\ln(2)}$.

2. Soit x un réel, Ecrire plus simplement les réels ci-dessous.

$e^x.e^{-2x}$, $e.e^x$, $\left(e^{-x}\right)^2$, $\dfrac{e^x}{e^{-x}}$,

$\dfrac{e^{2x}}{e^{1-x}}$ et $\dfrac{\left(e^x\right)^4}{e^{2x}}$.

3. Vérifier que pour tout réel x,

a. $e^{2x}+e^{-2x}+2=\left(e^x+e^{-x}\right)^2$.

b. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

4. a. Montrer que,

si $1\leq e^x\leq 2$ alors $\dfrac{1}{4}\leq e^{-2x}\leq 1$.

b. Montrer que,

si $1\leq e^x\leq 9$ alors $2\leq 2e^{\frac{x}{2}}\leq 6$.

2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes.

1. $\left(x^2-5x+4\right)e^x=0$.

2. $e^{\frac{x}{4}}=\dfrac{1}{e}$.

3. $e^{3x}-e^{-x}=0$.

4. $e^{2x}+e^x-2=0$.

5. $e^x-5e^{-x}+4=0$.

6. $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)=4$.

7. $e^{-x}\leq 1$.

8. $e^{-3x}\geq 0$.

9. $e^{2x}-\dfrac{1}{e^x}\geq 0$.

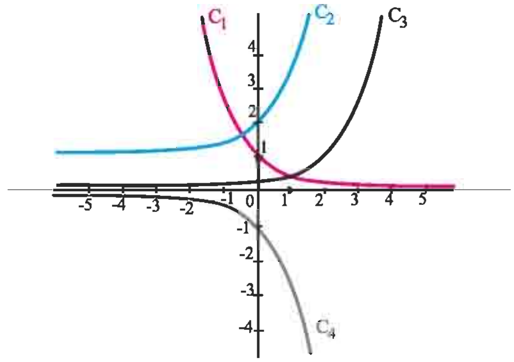
10. $2-e^{\frac{1}{x}}>0$.

11. $e^x+\dfrac{2}{e^x}-3\leq 0$.

3 On a représenté dans un même repère les courbes représentatives des fonctions

$f:x\mapsto -e^x$, $g:x\mapsto e^{-x}$, $h:x\mapsto \dfrac{1}{e^{2-x}}$ et

$k:x\mapsto 1+e^x$.



Associer chaque fonction à sa courbe.

4 Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{e^k}$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\dfrac{e}{e-1}$.

5 Déterminer les limites suivantes.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x}-2e^x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^x-\dfrac{1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x-\dfrac{1}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-(1-x)}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-2x+3\right)e^x$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x\right)e^x$; $\lim\limits_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-e^{2x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-e^x}{x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{2x}-e^x\right)$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$;

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1-e^{-x}}$; $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x-1}{\sqrt{2x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} x(e^{\frac{1}{x^2}}-1)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(e^{\frac{1}{x}}-1)}{e^{\frac{1}{x}}+1}$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}})$.

6 Pour chacune des fonctions suivantes, donner la dérivée f' sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto 2x - e^{-x}$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto x^2 + e^{\frac{1}{x}}$, $I = \mathbb{R}_+^*$.
3. $f : x \mapsto xe^{-x}$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{e^x}$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}-1}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto 2x - 2\ln(1+e^x)$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = e^x \ln(x)$, $I = \mathbb{R}_+^*$.
8. $f(x) = e^{-x}(e^{2x} + e^x - 1)$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, $I = \mathbb{R}$.

7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.
On note C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On sait que la courbe C passe par le point $A(0,1)$ et qu'elle admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. On sait aussi que $f'(0) = -6$.
Déterminer a, b et c.

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

1. calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Pour tout entier non nul n, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{ème}$ de f. Montrer que $f^{(n)}(x) = (-1)^n (x^2 + a_n x + b_n)e^{-x}$, où a_n et b_n sont des réels.

Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} à l'aide de a_n et b_n .

3. Donner l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de $f^{(100)}$.

9 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto e^{2x}$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto xe^{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^2(x)}$, $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. $f : x \mapsto \sin(2x)e^{\cos^2(x)}$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}$, $I =]1, +\infty[$.
6. $f : x \mapsto \sqrt{e^x}$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f : x \mapsto xe^{2x^2}$, $I = \mathbb{R}$.

10 1. Calculer les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_0^1 (1+e^x)dx$.

b. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2} dx$.

c. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx$.

d. $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+e^x}$.

e. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x} e^{\ln(x)} dx$

f. $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$.

g. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$.

2. Calculer à l'aide des intégrations par parties les intégrales suivantes.

a. $\displaystyle\int_1^2 2xe^{-x} dx$.

b. $\int_0^1 \frac{x^3}{e^{x^2}}dx$.

c. $\int_0^{-\ln(2)} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx$.

d. $\int_1^0 x^2e^xdx$.

e. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin x dx$.

11 1. Montrer que pour tout $t>0$, $t+\frac{1}{t}\geq 2$.

2. En déduire que pour tout réel x,

$e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\geq 2$ et $\ln(1+e^x)\geq \frac{x}{2}+\ln 2$.

12 1. Montrer que pour tout réel $x\geq 0$,

$0\leq e^x-1\leq xe^x$.

2. En déduire que pour tout réel $x\geq 0$,

$0\leq e^x-1-x\leq \frac{x^2}{2}e^x$.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\frac{2+e^x}{1+e^x}$.

1. Trouver des réels a et b tels que pour tout réel x,

$f(x)=a+\frac{be^x}{1+e^x}$.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{2+e^x}{1+e^x}dx$.

14 Soit la fonction $f: x\mapsto x-2+e^{-\frac{x}{2}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier les variations de f.

2. a. Vérifier que la droite $D: y=x-2$ est une asymptote à C_f.

b. Tracer D et C_f.

3. Soit $\lambda>0$ et la droite $\Delta: x=\lambda$.

On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, D, Δ et l'axe des ordonnées.

Calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

15 Soit la fonction $f: x\mapsto \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Etudier la parité de f.

2. a. Etudier les variations de f.

b. Tracer C_f.

3. Soit $\lambda>1$ et la droite $\Delta: x=\lambda$.

On note $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f, Δ, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Calculer $A(\lambda)$.

16 1. a. Montrer que pour tout réel non nul x,

$e^x>1+x$.

b. En déduire que

i. Pour tout réel non nul x on a $e^{-x}>1-x$.

ii. Pour tout réel x de $]0,1[$ on a $e^x<\frac{1}{1-x}$.

2. Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par

$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\geq 1$.

a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n<e<v_n$.

b. Sachant que $2<e<3$, montrer que $v_n-u_n\leq\frac{3}{n}$

c. En déduire un encadrement de e d'amplitude 10^{-6}.

17 1. Calculer les intégrales $A=\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ et

$B=\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$.

2. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $t>0$, $\frac{1}{(1+t)^2}=a+\frac{bt}{(1+t)}+\frac{ct}{(1+t)^2}$.

En déduire la valeur de $I=\int_0^1 \frac{1}{\left(1+e^x\right)^2}dx$.

3. On pose $J=\int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$.

Exprimer J en fonction de I et en déduire la valeur de J.

18 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2-e^{\frac{1}{x}}>0$.

2. Soit la fonction $f:x\mapsto \ln\left(2-e^{\frac{1}{x}}\right)$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c. En déduire que f est prolongeable par continuité à gauche en 0 (on note g le prolongement ainsi obtenu).

3. a. Etudier la dérivabilité de g à gauche en 0.

b. Déterminer les intervalles sur lesquels g est dérivable et expliciter $g'(x)$.

4. Etudier les variations de g et tracer sa courbe C_g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

19 Soit un réel $a>0$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $G_a : x\mapsto e^{-ax^2}$.

1. Démontrer que G_a est dérivable et calculer sa dérivée.

2. En déduire le tableau de variation de G_a .

3. Calculer la dérivée seconde de G_a et démonter que la courbe de G_a admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

4. Déterminer le lieu des points d'inflexion des courbes de G_a lorsque a varie.

5. Tracer les courbes de G_a pour $a=\frac{1}{2}$,1 et 2.

20 Soit f la fonction définie par

$f(x)=\left|3x^2-1\right|e^{1-x^2}$.

1. Vérifier que f est paire.

2. Etudier la limite de f en $+\infty$.

3. Etudier la continuité de f.

4. Etudier la dérivabilité de f en $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Dresser le tableau de variation de f .

6. Donner une représentation graphique de f.

21 Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\sin x\,dx$ et

$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx}\cos x\,dx$.

1. calculer I_0 et J_0 .

2. On suppose n non nul.

En intégrant par parties I_n , puis J_n , montrer que

$$\begin{cases} I_n+nJ_n=1, \\ -nI_n+J_n=e^{-\frac{n\pi}{2}}. \end{cases}$$

3. En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

22 Pour tout entier naturel n, on pose

$I_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-nx}\sin x\,dx$.

1. A l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que $I_n=(-1)^n e^{-n^2\pi}\frac{1+e^{-n\pi}}{n^2+1}$.

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

23 Soit n un entier naturel et m un entier non nul.

On pose,

$I(n,m)=\int_0^1 t^n(1-t)^m\,dt$ et $I(n,0)=\frac{1}{n+1}$.

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I(n,m)=\frac{m}{n+1}I(n+1,m-1)$.

2. Montrer que $I(n,m)=\frac{n!m!}{(n+m)!}I(n+m,0)$.

Montrer alors que $I(n,m)=\frac{n!m!}{(n+m+1)!}$.

24 Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2}, \\ u_{n+1}=\frac{e^{u_n}}{u_n+2},\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Dans cet exercice, on se propose de montrer que (u_n) est convergente et de donner une valeur approchée de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1. On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par

$f(x)=\frac{e^x}{x+2}$.

a. Etudier les variations de f.

b. Montrer que pour tout x de $[0,1]$, $|f'(x)|\le\frac{e}{4}$.

c. Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $[0,1]$.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\le u_n\le 1$.

3. a. Justifier l'égalité $f(x)-f(\alpha)=\int_\alpha^x f'(v)\,dv$.

b. En déduire que pour tout entier n, $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{e}{4}|u_n-\alpha|$.

c. Montrer alors que pour tout entier n, $|u_n-\alpha|\le\frac{1}{2}\left(\frac{e}{4}\right)^n$.

En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

25 Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3}\right)^x$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2^x}{2^{x^2+x}}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3^x+3^{x+1}}{2^x+2^{x-1}}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{2^x}$.
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{3}}e^{-x}$.
9. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}\right)\ln x$.
10. $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x-e^x$.

26 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par

$f(x)=\ln(2^x)-\ln(x^2)$.

1. Calculer $f(2)$ et $f(4)$.
2. Etudier les variations de la fonction f et en déduire son signe.
3. Comparer x^2 et 2^x.

27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x-1$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer le sens de variation de f.
En déduire le nombre de solutions de l'équation $3^x+4^x=5^x$.

28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$f(x)=\dfrac{4^x}{4^{2x}-1}$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.
3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=\dfrac{4}{15}$

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=-\dfrac{4}{15}$

29 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 3^x dx$.
2. $\int_0^{-1} \dfrac{3^x}{1+3^x}dx$.
3. $\int_0^{\frac{1}{\ln(2)}} 2^x\left(1+2^x\right)^2 dx$.
4. $\int_1^2 x^{\frac{4}{3}}dx$.
5. $\int_{\frac{1}{2}}^1 4x^{-\frac{1}{5}}dx$.
6. $\int_0^1 \sqrt[4]{x}\,dx$.
7. $\int_{\frac{1}{2}}^1 (3x-1)^{\frac{3}{2}}dx$.

30 Le but de l'exercice est de calculer

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x\cos^2(x)dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x\sin^2(x)dx$.

1. Montrer que $I+J=\dfrac{\sqrt{2^\pi}-1}{\ln 2}$.
2. Soit $K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^x\cos(2x)dx$.

A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que $K=-\dfrac{\ln 2}{2}\left[\dfrac{\sqrt{2^\pi}+1}{2}+\dfrac{\ln 2}{2}K\right]$.

En déduire la valeur de $I-J$.

3. Donner les valeurs de I et J.

31 1. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x^{-\alpha}$, où α est un rationnel strictement supérieur à 1.

Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

2. Soit (S_n) la suite définie par $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^\alpha}$, $n\geq 1$.

Soit k un entier supérieur où égal à 1.

Montrer que pour tout x de $[k,k+1]$,

$\dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\leq\int_k^{k+1} f(x)dx\leq\dfrac{1}{k^\alpha}$.

3. a. Montrer que pour tout entier n,

$\int_1^{n+1} f(x)dx\leq S_n\leq S_1+\int_1^n f(x)dx$.

b. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq1}$ est croissante et majorée.

c. En déduire que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

d. Déterminer un réel α tel que la suite (S_n) converge vers un réel compris entre 2007 et 2008.

32 A/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=1+x-e^{-\frac{x}{2}}$.

On désigne par C_f sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b. Montrer que la droite D d'équation $y=x+1$ est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

c. Etudier la position de C_f par rapport à D.

2. a. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3. Tracer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe C_f et la droite D (Unités graphiques 2 cm).

B/ Soit un entier $n>0$, on désigne par A_n l'aire, en unités d'aires, de la partie du plan limitée par la droite D, la courbe C_f et les droites d'équations $x=n$ et $x=n+1$.

1. Exprimer A_n en fonction de n.
2. En déduire que la suite (A_n) est géométrique. On précisera sa raison q et son premier terme A_1.
3. Exprimer la somme $S_n=A_1+A_2+...+A_n$ en fonction de n. Que représente S_n graphiquement ?
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

33 On considère la fonction numérique f de la variable réelle x, définie sur $[0,+\infty[$ par

$f(x) = \sqrt{x}\,e^{1-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
Interpréter graphiquement.
2. a. Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x strictement positif.
b. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe C.
5. Montrer que l'équation $f(x)=1$ a deux solutions, l'une α dans l'intervalle $]0,\frac{1}{2}[$ et l'autre β dans $]\frac{1}{2},+\infty[$. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

34 A/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x)=2e^x-x-2$.

1. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g et puis dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions réelles 0 et α telle que $-1.6\le\alpha\le-1.5$.
4. En déduire le signe de g.

B/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ et $g(x)$ ont le même signe.
Etudier les variations de f.
3. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{-(\alpha^2+2\alpha)}{4}$.
En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
6. Soit m un réel négatif.
a. Calculer $\int_m^0 xe^x dx$.
b. Calculer alors $\int_m^0 f(x)dx$.
c. Déterminer $\lim\limits_{m\to-\infty}\int_m^0 f(x)dx$.

35 A/ Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$\varphi(x)=(x^2+x+1)\,e^{-x}-1$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.
2. Etudier les variations de φ puis dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une α dans l'intervalle $[1,+\infty[$. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
4. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$.

B/ On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)e^{-x}$ et $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

On note C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Vérifier que C_f et C_g passent par $A(0,1)$.
Montrer que C_f et C_g admettent en ce point la même tangente.

2. a. Vérifier que $f(x)-g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$.
b. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
c. En déduire la position relative de C_f et C_g.

3. a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=-(2x+3)e^{-x}$.
Vérifier que $F'(x)=f(x)$, pour tout x dans $\mathbb{R}$.
b. En déduire la primitive sur $\mathbb{R}$ de $f-g$ qui s'annule en 0.

36 A/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^{x})$.
et on note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(t)=\dfrac{t}{1+t}-\ln(1+t)$.
Etudier les variations de g sur $[0,+\infty[$ et en déduire le signe de $g(t)$.

2. a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^{-x}\left[\dfrac{e^{x}}{1+e^{x}}-\ln(1+e^{x})\right]$.
b. Etudier le sens de variations de f.

3. a. Montrer que pour tout réel x,
$f(x)=xe^{-x}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$.
b. En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
c. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$.

4. Dresser le tableau de variations de f et tracer la courbe C.

B/ On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0=0.5, \\ u_{n+1}=f(u_n),\ n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

1. a. Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une seule solution notée α. Montrer que $0.5\le x\le 0.6$.
b. Démontrer que pour tout réel x tel que $0.5\le x\le 0.6$, $0.5\le f(x)\le 0.6$ et $-0.25\le f'(x)\le 0$.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha|\le 0.25|u_n-\alpha|$.
Montrer par récurrence que $|u_n-\alpha|\le (0.25)^n\times 0.1$.
b. En déduire que la suite (u_n) converge vers α.
c. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n\ge n_0$, $|u_n-\alpha|\le 5\times 10^{-4}$.

C/ L'objet de cette partie est l'étude d'une primitive de f.

1. Montrer que pour tout réel x,
$f'(x)+f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

2. En utilisant la question précédente, calculer une primitive F de f.

37 Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On se propose d'étudier, pour tout entier $n>0$, les fonctions f_n définies sur $[0,+\infty[$ par $f_n(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}\right)e^{-x}$.

1. a. Justifier que f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.
c. Etudier le sens de variation de f_n.

2. a. Montrer que pour tout réel $x\in[0,1]$,
$\dfrac{-1}{n!}\le f_n'(x)\le 0$.
b. En déduire que $\dfrac{-1}{n!}\le f_n(x)-1\le 0$.

3. En utilisant l'encadrement précédent, déterminer la limite de la somme $\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ et $a_n = \ln(u_n)$.

1. Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$,

$$a_n = -\frac{\ln\left(1+(-\frac{1}{n})\right)}{(-\frac{1}{n})}.$$

2. En déduire que la suite (a_n) est convergente.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

38 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A/ 1. a. Montrer que le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie de C.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

c. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f.

2. a. Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe C au point A.

b. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - f(x+1)$.

Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$.

a. En déduire le sens de variation de la fonction g (on précisera $g(0)$).

b. En déduire la position de C et Δ.

3. Tracer la courbe C et Δ.

B/ Dans cette partie, on désigne par I, l'intervalle $[2,3]$.

1. a. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = x$ si, et seulement si, $g(x) = -1$.

b. En déduire que la droite D d'équation $y = x$ coupe la courbe C en un seul point dont l'abscisse α est telle que $2 < \alpha < 3$.

2. On suppose que pour tous réels x et x' de I, $|f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$.

En déduire que, pour tout réel x de I, $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$.

3. On définit la suite (u_n) d'éléments de l'intervalle I telle que $\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|3 - \alpha|$.

b. Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

c. Donner en utilisant la calculatrice une valeur approchée de u_p.

39 A/ On désigne par g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = e^x - \ln(x) - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
3. Etudier le sens de variation de g puis dresser son tableau de variation.
4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
5. Justifier que $\alpha \in]1.23\ ,\ 1.24[$ (*).
6. Donner le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

B/ On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - \ln(x)} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On désigne par C la représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Etudier la dérivabilité de f en 0.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Montrer que $f'(x)$ est de même signe que $g(x)$.
En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.
5. Monter que $f(\alpha)=\dfrac{1}{e^{\alpha}-\dfrac{1}{\alpha}}$.

C/ 1. Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $]0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{e^{x}-\dfrac{1}{x}}$.
2. En utilisant l'encadrement $(*)$ du réel α, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$.
En déduire que 0.38 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2}.
3. Tracer la courbe C et préciser ses tangentes aux points d'abscisses 0 et α.

40 Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A/ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}x+\left(\frac{1-x}{2}\right)e^{2x}$.
On désigne par C la courbe représentative de f . (On prendra 2cm pour unité graphique)
1. a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b. Montrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{1}{2}x$ est une asymptote à la courbe C.
c. Etudier la position de la droite Δ par rapport à la courbe C.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=1+(1-2x)e^{2x}$.
a. Etudier le sens de variation de u.
b. Montrer que l'équation $u(x)=0$ possède, dans l'intervalle $[0,1]$, une solution unique α.
c. Déterminer une valeur approchée décimale de α par excès à 10^{-2} près.
d. Déterminer le signe de $u(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

B/ On considère la courbe C' d'équation $y=e^{x}$ et la droite Δ' d'équation $y=x$.
1. Pour tout réel t, on désigne par M_t le point de C' d'abscisse t. La tangente T à la courbe C' au point M_t coupe l'axe des ordonnées au point N_t.
Déterminer les coordonnées du point N_t.
2. Pour tout réel t, on désigne par P_t le point de Δ' d'abscisse t et par G_t le barycentre des points pondérés $(O,1)$, $(M_t,1)$, $(P_t,1)$ et $(N_t,1)$.
a. Placer les points M_{-2}, P_{-2} et N_{-2} puis construire en le justifiant le point G_{-2}.
b. Déterminer en fonction de t, les coordonnées du point G_t.
3. Quel est l'ensemble des points G_t, quand t décrit $\mathbb{R}$?

C/ 1. Construire la courbe C.
2. Calculer l'aire $\mathcal{A}$, en cm^2, de la partie du plan délimitée par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations $x=0$ et $y=0$.

41 On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\begin{cases}(x+1)e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
1. Etude des variations de f.
a. Montrer que la dérivée f' de f sur $[0,+\infty[$ est de la forme $e^{-\frac{1}{x}}Q(x)$, où Q est une fonction rationnelle.
b. Déterminer la limite de $(1+t)e^{-t}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$.
c. Etudier le sens de variation de f.
d. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

e. Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$ dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près.

2. Etude d'une fonction auxiliaire.
Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(t)=1-(1+t)e^{-t}$.

a. Calculer la dérivée de φ.

b. Prouver que, pour tout réel positif ou nul t, $0 \le \varphi(t) \le \frac{1}{t^2}$.

3. Etablir que , pour tout réel strictement positif x, $0 \le x - f(x) \le \frac{1}{2x}$.
En déduire que C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de C par rapport à D.

4. Soit a un réel strictement positif et T_a la tangente à C au point d'abscisse $\dfrac{a}{1+a+a^2}$.

a. Déterminer une équation de T_a.

b. Déterminer l'intersection de T_a avec l'axe des abscisses.

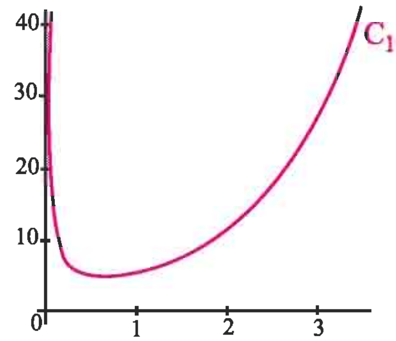
5. Construire C et D. On placera le point de C d'ordonnée 2 et on précisera les tangentes à C aux points d'abscisses $\frac{1}{3}$, 1 et 3

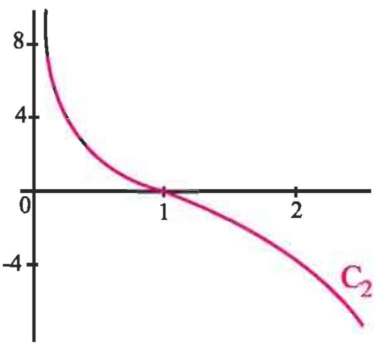
42 Pour tout réel $k \le 0$, on considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par $f_k(x)=\dfrac{kx+1}{x}e^x$.

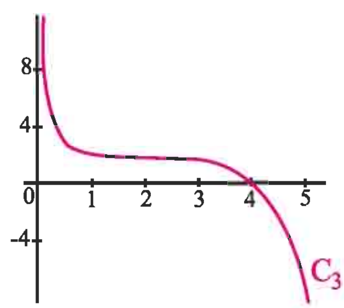
1. Déterminer les limites de f_k en 0 et en $+\infty$.

2. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$ et déterminer le nombre de solution de l'équation $f_k'(x)=0$.

3. On a représenté ci-après les fonctions f_{-1}, $f_{-0.25}$ et f_0.
Identifier la courbe de chaque fonction.







4. Pour tout réel a strictement positif, on pose $A(a)=\int_a^{a+1} f_0(x)\,dx$.

a. Que représente le réel $A(a)$?

b. Etudier le sens de variation de $a \mapsto A(a)$.

c. Déterminer a pour que l'aire du domaine limité par C_0, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=a+1$ soit minimale.

43 A/ 1. Montrer que l'équation $(E): x+\ln x=0$ admet une unique solution α appartenant à $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$.

2. Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ définie par $\varphi(x)=e^{\frac{1}{x}}$.

a. Vérifier que $\varphi(x)=x$, si et seulement si, $\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)=0$.

b. En déduire que $\frac{1}{\alpha}$ est l'unique solution de $\varphi(x)=x$ dans $]0,+\infty[$.

c. Montrer que pour tout x de $[\frac{3}{2}, 3]$, $|\varphi'(x)|\leq\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}$.

3. Soit (v_n) la suite définie par $v_0=2$ et $v_{n+1}=\varphi(v_n)$ pour tout entier naturel n.

a. Montrer que pour tout entier n, $\frac{3}{2}\leq v_n\leq 2$.

b. Démontrer que pour tout entier n,

$$\left|v_{n+1}-\frac{1}{\alpha}\right|\leq\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}}\left|v_n-\frac{1}{\alpha}\right|.$$

c. En déduire que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

B/ **Etude d'une fonction.**

On considère la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+\ln x} & \text{si } x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{\alpha\},\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(On prendra $\alpha\simeq 0.6$).

C/ **Encadrement d'une aire.**

Pour tout entier non nul n, on pose

$$u_n=\int_1^2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n dx.$$

1. Calculer u_1.

2. Montrer à l'aide de deux intégrations par parties que $u_2=1-\ln 2-\frac{(\ln 2)^2}{2}$.

3. Soit un réel $x>0$ et n un entier naturel non nul. Simplifier la somme

$$1-\frac{\ln x}{x}+\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2+\ldots(-1)^n\left(\frac{\ln x}{x}\right)^n.$$

4. Pour tout entier non nul n, on pose

$I_n=1-u_1+u_2+\ldots+(-1)^n u_n$ et

$$I=\int_1^2 f(x)dx.$$

a. Montrer que $I-I_n=\int_1^2(-1)^{n+1}f(x)\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{n+1}dx$.

b. Montrer que pour tout $x>0$, $\frac{\ln x}{x}\leq\frac{1}{e}$, puis que $|I-I_n|\leq\frac{1}{e^{n+1}}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

d. Vérifier que $I_2-\frac{1}{e^3}\leq I\leq I_2$.

D/ **Fonction définie à l'aide d'une intégrale.**

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$F(x)=\int_1^{e^x} f(t)dt.$$

1. Etudier la dérivabilité de F et déterminer $F'(x)$.

2. Vérifier que pour tout $t\geq 1$, $\frac{t}{t+\ln t}\geq\frac{1}{2}$.

3. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$.

4. Donner l'allure de la courbe de F.

Chapitre 9

Equations différentielles

Le pendule isochrone. Le problème consiste à modifier le pendule standard pour rendre la période indépendante de l'amplitude.
Hygens (1673, Horologium Oscillatorium) a l'idée de modifier le cercle du pendule standard pour que la force accélératrice devienne proportionnelle à la longueur d'arc s.
Le mouvement du pendule serait alors décrit par $s''+Ks=0$, dont les oscillations sont indépendantes de l'amplitude.

(E.Haier et al, L'analyse au fil de l'histoire, 2000).

Chapitre 9

Equations différentielles

I. Définition

Activité 1

1. Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$. Déterminer une relation entre f' et f.
2. Reprendre la même question pour les fonctions $g : x \mapsto -2e^{-x}$ et $h : x \mapsto 0,5e^{-x}$.
3. Représenter les fonctions f, g et h dans un même repère.
4. Donner d'autres fonctions qui vérifient la relation trouvée dans la première question.

Activité 2

Une expérience consiste à étudier l'évolution d'une population de bactéries.
On désigne par N_0 le nombre de bactéries à l'instant $t = 0$, $N(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t et on note $N'(t)$ la vitesse instantanée d'évolution des bactéries à l'instant t.

1. On constate que $N(t) = 9000e^{-0,4t}$.
   a. Donner le nombre de bactéries aux instants $t = 0$, $t = 10$ et $t = 20$.
   b. Donner une relation entre N' et N.
   c. Déterminer la vitesse instantanée d'évolution aux instants $t = 10$ et $t = 20$.
   d. Représenter la fonction $t \mapsto N(t)$.
2. Reprendre les questions précédentes si on suppose que $N(t) = 3000e^{0,4t}$.

Vocabulaire

Une équation de la forme $y' = ay$, où l'inconnue y est une fonction et a est un réel, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $y' = ay$, c'est trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y' = ay$.
Ces fonctions sont appelées solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$.

Théorème

Soit a un réel. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ke^{ax}$, où k est un réel quelconque.

Démonstration

Désignons par (E) l'équation différentielle $y' = ay$.

Pour tout réel k, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f'(x) = kae^{ax} = af(x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Réciproquement, montrons que toute solution g de (E) est telle que $g(x) = ke^{ax}$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Soit g une solution de (E) et h la fonction définie pour tout réel x par $h(x) = g(x)e^{-ax}$,

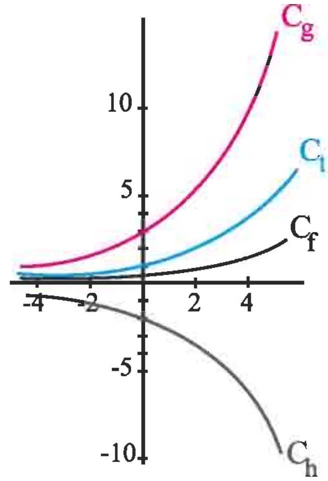
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$, pour tout réel x.

La fonction g étant solution de (E) par hypothèse, on en déduit que

$h'(x) = ag(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax}$, ou encore que $h'(x) = 0$, pour tout réel x.

Ce qui implique que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$, c'est à dire qu'il existe un réel k tel que $h(x) = g(x)e^{-ax} = k$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Il en résulte que $g(x) = ke^{ax}$, pour tout réel x.



Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal.
On a représenté ci-contre les courbes représentatives de quatre fonctions f, g, h et t, solutions de l'équation $y' = 0.3y$.
Donner les expressions des fonctions f, g, h et t.

Activité 4

1. a. Résoudre l'équation différentielle $(E): 2y' + 3y = 0$.

b. Montrer qu'il existe une unique solution f de (E) vérifiant $f(0) = -3$.

c. Représenter graphiquement cette solution.

2. Reprendre la question précédente pour l'équation $(E): y' = 0$.

Théorème

Soit a un réel non nul. Pour tous réels x_0 et y_0, l'équation $y' = ay$ admet une unique solution qui prend la valeur y_0 en x_0.

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Démonstration

Soit f une solution de (E) qui prend la valeur y_0 en x_0.

Alors $f(x) = ke^{ax}$, pour tout x de $\mathbb{R}$ et $ke^{ax_0} = y_0$. Il en résulte que $k = y_0 e^{-ax_0}$.

Par suite l'unique solution de (E) qui prend la valeur y_0 en x_0 est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Représenter graphiquement la fonction f dont la courbe C_f passe par le point $A(1,2)$ et telle que la tangente en tout point M de C_f a un coefficient directeur égal au double de l'ordonnée de M.

Activité 6

On considère une substance radioactive. On désigne par $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs existants dans la substance à l'instant t (exprimée en années) et par N_0 le nombre de noyaux existants à $t = 0$.

On constate que la vitesse $N'(t)$ de désintégration des noyaux à l'instant t est proportionnelle au nombre $N(t)$, avec un coefficient de proportionnalité égal à $-\lambda$ où le réel strictement positif λ est appelé constante radioactive du noyau.

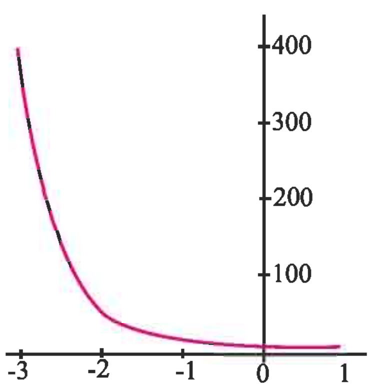
1. Donner l'expression de $N(t)$.
2. Déterminer, en fonction de λ, le temps $T_{0.5}$ au bout duquel la moitié des noyaux s'est désintégrée. ($T_{0.5}$ est appelé durée de demi-vie de la substance).
3. On suppose que la substance radioactive est du carbone 14.
   a. Déterminer λ sachant que $T_{0.5} = 5730$.
   b. Déterminer l'âge d'un fragment d'os qui contient 60% de la quantité initiale.

II. Equations différentielles du type $y' = ay + b$, où a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$

Activité 1

On a représenté ci-contre la fonction $f : x \mapsto e^{-2x} + 3$.

1. Montrer que f vérifie l'équation différentielle $(E) : y' = -2y + 6$.
2. Montrer que g est solution de (E), si et seulement si, $h : x \mapsto g(x) - 3$ est solution de l'équation différentielle $y' = -2y$.
3. Donner toutes les solutions de (E).



Théorème

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.
De plus pour tous réels x_0, y_0, la fonction $f : x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$ est l'unique solution de $y' = ay + b$, telle que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration

Soit a non nul.

L'équation différentielle (E): $y' = ay + b$, est équivalente à l'équation différentielle $(E_1) : \left(y + \frac{b}{a}\right)' = a\left(y + \frac{b}{a}\right)$.

On en déduit qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f + \frac{b}{a}$ est solution de (E_1). Il en résulte que les solutions de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.

Si f est une solution de (E) prenant la valeur y_0 en x_0, alors $f(x_0) = ke^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0$. On en déduit que $k = (y_0 + \frac{b}{a})e^{-ax_0}$, ou encore que f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$.

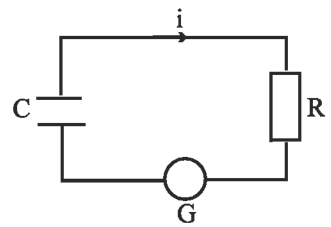
Activité 2

Donner, dans chacun des cas ci-dessous, la solution f de l'équation différentielle et la représenter.

a. $\sqrt{2}y' - 2y = 1$, $f(0) = -1$.

b. $\sqrt{2}y' - 2y = 1$, $f(0) = -\frac{1}{2}$.

Activité 3



Un circuit électrique est constitué d'un générateur G délivrant une tension E, d'un condensateur C et d'une résistance R.
On désigne par $i(t)$ l'intensité du courant électrique à l'instant t (en seconde) et par $q(t)$ la charge à l'instant t.

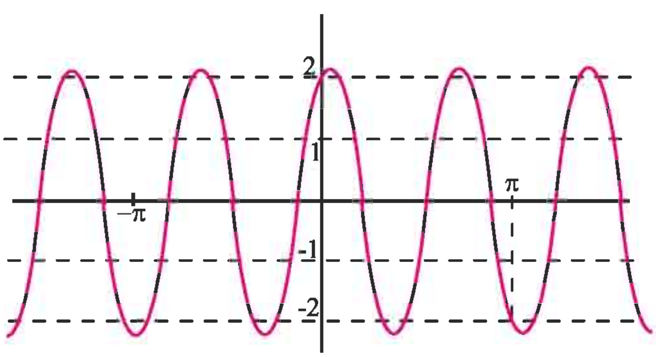
1. Donner une relation entre $i(t)$ et $q'(t)$.
2. Montrer que $Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)=E$.
3. Donner l'expression de $q(t)$, puis de $i(t)$.
4. Représenter $t \mapsto i(t)$ si l'on sait que $i(0)=10$ mA.

III. Equations différentielles du type $y''+\omega^2 y=0$, ω réel

Activité 1

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x + \cos x$.
   a. Déterminer les réels $r>0$ et φ appartenant à $]-\pi,\pi]$ tels que $f(x)=r\cos(x-\varphi)$ pour tout réel x.
   b. Ecrire f'' en fonction de f.
   c. Représenter la fonction f.
2. Reprendre les questions précédentes pour la fonction $g : x \mapsto \sqrt{3}\sin(2x)-\cos(2x)$.

Activité 2



Dans la figure ci-contre on a représenté la courbe représentative d'une fonction de la forme
$f : x \mapsto a\sin(3x)+b\cos(3x)$.

1. Déterminer les réels a et b.
2. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et trouver une relation entre f'' et f.

Vocabulaire

Une équation de la forme $y''+\omega^2 y=0$, où l'inconnue y est une fonction et ω est un réel, est appelée équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Résoudre une équation de la forme $y''+\omega^2 y=0$, c'est trouver toutes les fonctions deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ qui la vérifient.

Activité 3

On considère l'équation différentielle $(E): y''+9y=0$, où l'inconnue y est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. a. Montrer que pour tous réels a et b, la fonction $f: x \mapsto a\sin(3x)+b\cos(3x)$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

   b. On suppose que $f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f'(0)=\frac{3}{2}$. Déterminer a et b.

   c. En déduire les réels $r>0$ et φ appartenant à $]-\pi,\pi]$ tels que $f(x)=r\cos(3x-\varphi)$ pour tout réel x.

   d. Représenter f.

Activité 4

Soit ω un réel non nul, x_0 et y_0 deux réels.

On considère l'équation différentielle $(E): y''+\omega^2 y=0$

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x)+x_0\cos(\omega x)$

est solution de (E).

Vérifier que $f(0)=x_0$ et $f'(0)=y_0$.

2. On suppose qu'il existe une autre fonction g solution de (E) qui vérifie $g(0)=x_0$ et $g'(0)=y_0$.

Soit h la fonction définie par $h(x)=\omega^2(f(x)-g(x))^2+(f'(x)-g'(x))^2$.

a. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que pour tout réel x,
$h'(x)=2\omega^2(f'(x)-g'(x))(f(x)-g(x))+2(f''(x)-g''(x))(f'(x)-g'(x))$.

b. En déduire que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.

c. Calculer $h(0)$ et conclure.

Théorème

Soit ω un réel non nul et x_0, y_0 deux réels.

L'équation $y''+\omega^2 y=0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=x_0$ et $f'(0)=y_0$.

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x)+x_0\cos(\omega x)$.

Conséquence

Soit ω un réel non nul.

La fonction nulle est l'unique solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ qui vérifie $y(0) = y'(0) = 0$.

Activité 5

1. a. Déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$,telle que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

b. Représenter f.

c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = 1$, $f(x) = -1$.

2. Reprendre les questions précédentes pour la solution g de l'équation différentielle $y'' + \pi^2 y = 0$, qui vérifie $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

Activité 6

Soit ω un réel non nul et l'équation différentielle $(E): y'' + \omega^2 y = 0$.

A/ 1. Montrer que les fonctions $x \mapsto \cos(\omega x)$ et $x \mapsto \sin(\omega x)$ sont des solutions de (E).

2. Montrer que pour tous réels A et B la fonction $x \mapsto A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$ est une solution de (E).

B/ Soit f une solution de (E).

1. Montrer que pour tous réels A et B la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = f(x) - A\sin(\omega x) - B\cos(\omega x)$ est une solution de (E).

2. a. Déterminer $g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b. En déduire qu'il existe un unique couple (A, B) de réels tel que $g(0) = g'(0) = 0$.

3. Montrer alors que les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Théorème

Soit ω un réel non nul.

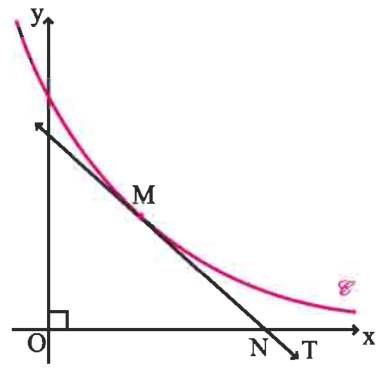
L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = A\sin(\omega x) + B\cos(\omega x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Activité 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+9y=0$.
2. Montrer qu'il existe une seule solution de (E) telle que $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$.
3. Existe-il une solution de (E) telle que $f(0)=\frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1$?

Problème résolu 1

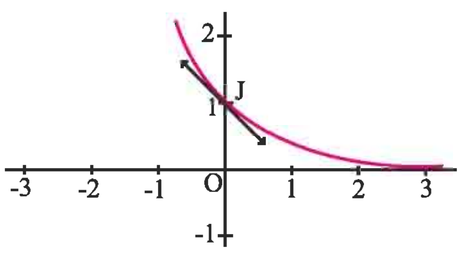
Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé. Si la tangente T à $\mathscr{C}$ en un point M coupe l'axe des abscisses en un point N, on appellera « sous tangente en M » le nombre $x_N - x_M$.



1. Dans cette question, la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation $y=e^{-x}$.
   a. Calculer la sous tangente au point d'abscisse 0.
   b. Montrer que la sous tangente en tout point de la courbe d'équation $y=e^{-x}$ est une constante que l'on précisera.
2. Dans cette question, on donne un réel $a \neq 0$ et on se propose de déterminer des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ dont les courbes représentatives admettent en tout point une sous tangente constante égale à a.
   Soit $y=f(x)$ l'équation d'une telle courbe avec $f'(x)\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   a. Soit $x_0\in\mathbb{R}$, calculer la sous tangente au point M_0 d'abscisse x_0 et vérifier que l'on a $f(x_0)=-af'(x_0)$.
   b. En déduire que f est une solution de l'équation différentielle $y'=-\frac{1}{a}y$
   c. Résoudre cette équation différentielle.

Solution

1. a. On pose J le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 0.
La tangente T à $\mathscr{C}$ en J a pour équation $y=-x+1$.
La tangente T coupe l'axe des abscisses en $I(1,0)$.
On en déduit que la sous tangente à $\mathscr{C}$ au point J est le réel $x_J - x_O = 1$.



b. Soit T une tangente à $\mathscr{C}$ en un point M d'abscisse a.
La tangente T a pour équation $y=-e^{-a}(x-a)+e^{-a}$ ou encore $y=-e^{-a}x+e^{-a}(1+a)$.
La tangente T coupe l'axe des abscisses au point N tel que $x_N=1+a$.
On en déduit que $x_N - x_M = 1$.
Le résultat en découle.

2. a. La tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0 a pour équation

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

De l'hypothèse $f'(x_0)\neq 0$ on déduit que (T) coupe l'axe des abscisses au point N

d'abscisse $x_N = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Par conséquent $x_N - x_0 = -\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Ainsi $\mathscr{C}$ admet en M_0 une sous tangente égale à a, si et seulement si, $-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=a$

Autrement dit $f(x_0)=-af'(x_0)$

b. f admet en tout point d'abscisse x_0 une sous tangente égale à a, si et seulement si, la relation $f(x_0)=-af'(x_0)$ est vérifiée pour tout x_0 dans $\mathbb{R}$,

autrement dit f est une solution de l'équation différentielle $y'=-\dfrac{1}{a}y$.

c. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $y'=-\dfrac{1}{a}y$ sont les fonctions $x\mapsto ke^{-\frac{1}{a}x}$, $k\in\mathbb{R}$.

Problème résolu 2

Un mobile se déplace sur un axe horizontal $(x'x)$ avec un mouvement uniformément varié.

On désigne par $x(t)$ la position du mobile à l'instant, $x'(t)$ sa vitesse et $x''(t)$ son accélération. (t est exprimé en secondes et $x(t)$ en mètres).

On suppose de plus qu' à tout instant t, l'accélération $x''(t)$ est proportionnelle à $x(t)$ de coefficient $-\dfrac{\pi^2}{4}$.

1. Donner l'équation horaire du mouvement si l'on sait que $x(1)=2$ et $x(2)=0$.
2. déterminer la position et la vitesse du mobile à l'instant $t=0$.
3. Représenter $t\mapsto x(t)$.

Solution

1. La fonction $x\mapsto x(t)$ est la restriction à $\mathbb{R}_+$ de la solution de l'équation différentielle

$x''+\dfrac{\pi^2}{4}x=0$ qui vérifie $x(1)=2$ et $x(2)=0$.

Il existe deux réels A et B tels que $x(t)=A\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)+B\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\in\mathbb{R}_+$.

De l'hypothèse $x(1)=2$ et $x(2)=0$ on en déduit que $A=2$ et $B=0$.

Par conséquent l'équation horaire du mouvement est $x(t)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t\geq 0$.

2. • A l'instant $t=0$, $x(0)=0$, c'est-à-dire le mobile est à l'origine du repère.

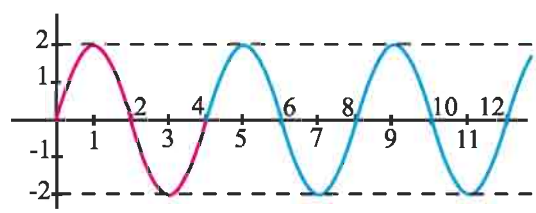
• Pour tout $t\geq 0$, $x'(t)=\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Par conséquent $x'(0)=\pi$, c'est-à-dire la vitesse à l'instant $t=0$ est π m/s.

3. La fonction $t\mapsto 2\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ est périodique dont 4 est une période, il suffit donc de l'étudier sur $[0,4]$. Pour tout $t\geq 0$, $x'(t)=\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Tableau de variation de f sur $[0,4]$.

	0		1		3		4
x'(t)		+	0	−	0	+	
x(t)	0	↗	2	↘	−2	↗	0



QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto 2e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle

☐ $y' = 4y$. ☐ $y' = -4y$. ☐ $y' = 2y$.

2. Si f est la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ telle que $f(0) = 1$ alors la courbe de f admet une tangente

☐ horizontale. ☐ parallèle à $y = 2x$. ☐ parallèle à $y = -x$.

3. Si f est la solution de l'équation différentielle $y' = -y + 1$ telle que $f(0) = 1$ alors la fonction f est

☐ négative. ☐ positive. ☐ n'a pas un signe constant.

4. La fonction $x \mapsto 2\cos x - 3\sin x$ est solution de l'équation différentielle

☐ $y'' + 2y = 0$. ☐ $y'' + y = 0$. ☐ $y'' + 3y = 0$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $f : x \mapsto 2^x$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \ln 2 - y = 0$.

2. Si f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -2y$ alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Si f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ telle que $f'(1) = 3$ alors $f(1) = 1$.

4. Si f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$ qui s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{4}$ alors sa courbe dans un repère orthonormé admet un point d'inflexion.

1 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles ci-dessous.

a. $y'+3y=0$.

b. $y'+\sqrt{2}y=0$.

c. $-5y'+y=0$.

2. Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

a. $y'-\frac{y}{2}=0$ et $y(-1)=e$.

b. $-3y'-y=0$ et $y(\ln 8)=1$.

c. $y'-2y=0$ et $y(0)=1$.

2 1. Déterminer la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} f'=af, \\ f(0)=1, \\ f(x+10)=2f(x). \end{cases}$

2. Représenter f.

3 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles ci-dessous

a. $y'-2y+1=0$.

b. $y'-\pi y+3=0$.

c. $-2y'+5y-1=0$.

2. Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

a. $y'-y-1=0$ et $y(2)=0$.

b. $2y'+y-3=0$ et $y(0)=3$.

c. $y'+3y+\frac{3}{4}=0$ et $y(-1)=0$.

4 La loi de refroidissement de Newton, établit que la vitesse instantanée de perte de chaleur d'un corps homogène et inerte est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu.
On suppose que la température de l'air ambiant est constante et égale à 25 °C.
Dans ces conditions, la température d'un corps homogène et inerte passe de 100 °C à 75 °C en 15minutes.
On désigne par $f(t)$ la température de ce corps à t minutes.
1. Vérifier qu'il existe un réel a tel que

$$\begin{cases} f'(t)=a(f(t)-25) \\ f(0)=100 \\ f(15)=75 \end{cases}$$

2. Déterminer f.
3. Au bout de combien de temps (à 1minute prés), ce corps aura une température de 25°C ?

5 Une substance se dissout dans l'eau à une vitesse instantanée proportionnelle à la quantité non encore dissoute.
On place 20 g de cette substance dans un volume d'eau suffisant pour la dissoudre totalement. On sait que les dix premiers grammes se dissolvent en 5 minutes.
1. Donner l'expression de la quantité dissoute $f(t)$ (en grammes) en fonction du temps t (en minutes).
2. Quelle est la quantité (à 1mg près) non dissoute au bout de 10minutes ? 30minutes ? 1heure ?

6 On désigne par $C(t)$ la concentration (en mg/l) d'un certain médicament dans le sang, en fonction du temps exprimé en heures. La concentration initiale est de 5 mg/l.
On suppose que la vitesse instantanée d'élimination de ce médicament par l'organisme est donnée par $C'(t)=-0.25\,C(t)$.
1. Déterminer $C(t)$.
2. Représenter la fonction $C:t\mapsto C(t)$.
3. Donner un encadrement à 0.1 près de l'instant t_0 à partir duquel $C(t)<1$.

7 La charge et la décharge d'un condensateur sont définies sur l'intervalle $[0,2\ln 3[$ par la fonction f qui vérifie les conditions suivantes :
- Sur l'intervalle $[0,2\ln 3[$, f est une solution de l'équation différentielle $y'+y=0$ avec $f(\ln 3)=-2$.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
2. Etudier f et la représenter.

8 1. Vérifier que la fonction $u:x\mapsto 2$ vérifie l'équation différentielle $y'+2y=y^2$.
1. Soit E l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$, telles que $f'(x)+2f(x)=(f(x))^2$ pour tout réel x.
a. Vérifier que l'ensemble E est non vide.

b. Soit f une fonction de E.

Montrer que la fonction $g=\frac{1}{f}$ est une solution d'une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$, où a et b sont deux réels.

c. Déterminer alors E.

9 Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t.

La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction.

On a constaté que : $y'(t)=ky(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif.

On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t=0$.

1. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y'=ky$ telle que $y(0)=N$.

2. Sachant qu'au bout de deux heures, le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N, le nombre de microbes au bout de trois heures.

3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures ?

10 L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}\sin x$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.(l'unité graphique étant 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. a. Calculer f' et vérifier que

$f'(x)=\sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0,\,2\pi]$ l'inéquation

$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$

En déduire le signe de f' sur $[0,2\pi]$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0,2\pi]$.

Préciser les tangentes à C aux deux extrémités de l'intervalle.

2. On note C_1 et C_2 les représentations graphiques des deux fonctions $x\mapsto e^{-x}$ et $x\mapsto -e^{-x}$.

a. Donner les abscisses, dans $[0,\,2\pi]$, des points où C rencontre C_1 et C_2.

b. Vérifier qu'en chacun des points communs précédents, les courbes C et C_1 d'une part, C et C_2 d'autre part, ont même tangente.

3. a) Vérifier que $f''+2f'+2f=0$.

b. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine du plan limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$.

11 Soit l'équation différentielle $(E): y'+2y=x^2$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y'+2y=0$.

2. Déterminer un trinôme du second degré qui vérifie (E).

3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f-g$ est une solution de (E_0).

4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

12 Soit l'équation différentielle

$(E): y'-y=4\cos x$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y'-y=0$.

2. Déterminer les nombres a et b tels que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=a\cos x+b\sin x$, vérifie (E).

3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f-g$ est une solution de (E_0).

4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

13 Dans un circuit contenant un générateur de force électromotrice E ainsi qu'une bobine de résistance r (en ohms) et d'inductance L (en henrys), on montre que l'intensité est une fonction du temps solution de l'équation différentielle $Ly'+ry=E$.

On prend $E=10v$, $r=100\Omega$ et $L=0.2H$.

A l'instant 0, l'intensité est nulle dans le circuit.

1. Déterminer la fonction $i: t\mapsto i(t)$ décrivant l'évolution de l'intensité i en fonction du temps.

2. Déterminer la limite de i quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

14 Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.
1. $y''+2y=0$, $y(0)=1$ et $y'(0)=\sqrt{2}$.
2. $y''+16y=0$, $y(\pi)=-1$ et $y'(\pi)=-2$.
3. $y''+\frac{y}{4}=0$, $y(-\pi)=1$ et $y'(-\pi)=0$.

15 On désigne par (E) l'équation différentielle $y''=2y'$.
1. En posant $z=y'$, résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f'(0)=1$ et $f(0)=2$.

16 On désigne par (E) l'équation différentielle $y''=-3y'+1$.
1. En posant $z=y'$, résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f'(0)=0$ et $f(0)=0$.

17 1. Résoudre l'équation différentielle $y''+16y=0$.
2. Trouver la solution f de cette équation vérifiant $f(0)=1$ et $f'(0)=4$.
3. Trouver deux réels positifs a et b tels que pour tout réel t, $f(t)=\sqrt{2}\cos(at-b)$.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{8}]$.

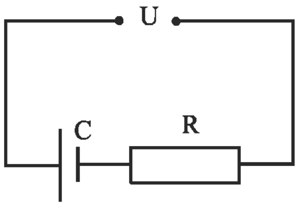
18 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+y'=0$.
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'''+y''=0$.

19 1. Linéariser $\cos^4(x)$.
2. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction $g: x \mapsto a\cos(4x)+b\cos(2x)+c$ soit solution de l'équation différentielle. $(E): y''+y'=\cos^4(x)$.
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f-g$ est solution de l'équation différentielle $y''+y'=0$.
4. En déduire toutes les solutions de (E), puis celle qui vérifie les conditions $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

20 Soit l'équation différentielle $4y''+\pi^2y=0$
1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer la fonction g solution de cette équation différentielle, qui satisfait aux conditions ci-dessous.
- La courbe représentative de g passe par le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- La tangente à cette courbe en N est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Vérifier que pour tout réel x, $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

21 On considère le circuit électrique ci-dessous où C est la capacité du condensateur, R la valeur de la résistance et U désigne la tension aux bornes du circuit.
En physique, on montre que $Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)=U$ où q, la charge du condensateur, est une fonction du temps qui prend la valeur 0 pour $t=0$.



1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par q.
2. Montrer que $q(t)=CU-CUe^{-\frac{t}{RC}}$
3. Sachant que l'intensité $i(t)=q'(t)$, déterminer $i(t)$.

22 On se propose de déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation
(E): Pour tout réel x, $f(x)=\int_0^x f(t)dt+x$.

1. Montrer que si une fonction f vérifie l'équation (E), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que toute solution de (E) est solution de l'équation différentielle $(E'): y' = y+1$.

Réciproquement ,quelle condition doit vérifier une solution de (E') pour être une solution de (E) ?

3. Résoudre (E).

23 **(La piqûre intraveineuse)**

A l'instant $t=0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 1.8 unité d'une substance médicamenteuse.

On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.

On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées.

On admet que le processus d'élimination se modélise par l'équation différentielle $Q'(t) = -\alpha Q(t)$ où α est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1. Montrer que $Q(t) = 1.8e^{-\alpha t}$.

Sachant qu'au bout d'une heure, la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30 %, en déduire une équation vérifiée par α.

En utilisant la fonction $x \mapsto e^{-x}$, montrer qu'il existe un réel α unique tel que $e^{-\alpha} = 0.7$

Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-4} près.

2. Etudier le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, déterminer sa limite en $+\infty$ et tracer la courbe représentative C de Q.

3. On décide de réinjecter une dose analogue à l'instant $t=1$ (au bout d'une heure), puis aux instants $t=2$, $t=3$, etc.

On note R_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t=n$, dès que la nouvelle injection est faite.

a. Montrer que $R_1 = 1.8 + 0.7 \times 1.8$.

b. Montrer que $R_2 = 1.8 + 0.7 \times R_1$ et calculer R_2.

c. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n.

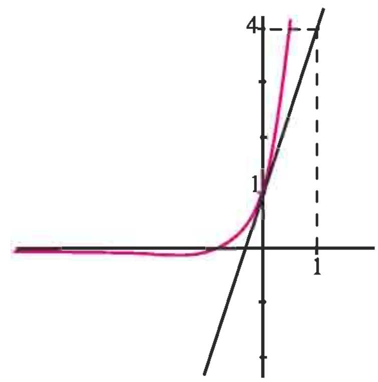
d. Montrer que pour tout entier naturel n,
$R_n = 6\left(1-(0.7)^{n+1}\right)$.

e. Déterminer la limite de R_n quand n tend vers l'infini.

24 On considère les deux équations différentielles $(I): y' = 2y$ et $(II): y' = y$.

1. Résoudre chacune de ces équations différentielles.
2. Le graphique ci-dessous représente une partie de la courbe C d'une fonction f et d'une de ses tangentes T, dans un repère orthonormé.

Cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, où f_1 est une solution de l'équation (I) et f_2 une solution de l'équation (II).



2.a. A partir des données lues sur le graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.

b. Déterminer les fonctions f_1 et f_2.

En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = 2e^{2x} - e^{x}$.

c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

d. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

3. Soit un réel $t < -\ln 2$.

a. Exprimer à l'aide de t, l'aire $\mathcal{A}(t)$ du domaine du plan limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t$ et $x = -\ln 2$.

b. Montrer que $\lim\limits_{t \to -\infty} \mathcal{A}(t) = \int_{-\ln 2}^{0} f(t)\,dt$.

Interpréter graphiquement.

25 1. a. Résoudre l'équation différentielle $(E): 4y' + 3y = 0$.

b. Déterminer la fonction f, solution de (E) telle que $f'(0) = -6$.

2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = [0,4]$ par $g(x) = 8e^{-0.75x}$.

a. Etudier les variations de g sur I et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
b. Soit A le domaine plan compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$.
Calculer le volume V du solide engendré par la rotation du domaine A autour de l'axe des abscisses.
On donnera la valeur exacte de V en cm^3 puis sa valeur approchée arrondie au mm^3.

26 La masse de sel (en grammes) que contient un mélange d'eau et de sel à l'instant t (en minutes) est notée m(t).
Soit m la fonction qui à tout instant t associe le réel m(t). Nous admettons que la fonction m vérifie les conditions ci-dessous.
$m(0)=300$, m est solution sur $[0,+\infty[$ de l'équation différentielle $(E): 5y'+y=0$.
1.a. Résoudre l'équation différentielle (E).
b. Montrer que pour tout t de $[0,+\infty[$, $m(t)=300e^{-0.2t}$.
2. Déterminer le réel t_0 tel que $m(t_0)=150$.
3. Nous admettrons qu'il est impossible de détecter la présence de sel à l'instant t, si et seulement si, $m(t)\leq 10^{-2}$.
A partir de quel instant est-il impossible de détecter la présence de sel ?

27 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\cos x-\sin x$.
1. Montrer que pour tout réel x, $g'(x)=g(\pi-x)$.
2. On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f'(x)=f(\pi-x)$.
a. Montrer que f est deux fois dérivable et que f est solution de l équation différentielle $y''+y=0$.
b. Déterminer les fonctions f.

28 A/ On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y'-2y=-\dfrac{2}{1+e^{-2x}}$.
1. Déterminer la solution de l'équation $y'-2y=0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2. soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0)=\ln 2$, et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}g(x)$.
a. Calculer $g(0)$.
b. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.
c. Montrer que f est une solution de (E), si et seulement si, $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
d. En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).
B/ Etude de la fonction f définie par $f(x)=e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.
1. On pose $h(x)=\ln\left(1+e^{-2x}\right)-\dfrac{1}{e^{2x}+1}$.
a. Etudier la limite de h en $+\infty$.
b. Etudier le sens de variation de h.
c. En déduire le signe de $h(x)$, pour tout réel x.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.
3. Etudier la limite de f en $+\infty$.
Montrer que $f(x)=e^{2x}\left[-2x+\ln\left(1+e^{2x}\right)\right]$.
En déduire la limite de f en $-\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé en prenant 5 cm pour unité.
Préciser la tangente au point d'abscisse nulle.
C/ 1. En remarquant que $\dfrac{1}{1+e^{-2x}}=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{1+e^{-2x}}$.
2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire $\left(\text{en } cm^2\right)$ du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f

définie au B/ et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$.

On donnera la valeur exacte de cette aire ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.

D/ On définit la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que $f([0,1])\subset[0,1]$ et en déduire que pour tout $n\geq 0$, $u_n\in[0,1]$.
2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
En déduire qu'elle converge vers un réel α.
3. Vérifier que $f(\alpha)=\alpha$ et $0<\alpha<1$.
4. Utiliser le graphique de f, pour donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

29 Un corps dont la température initiale θ_0 est égale à 30 °C, est placé dans une ambiance dont la température T est constante.

La température de ce corps est une fonction du temps $\theta : t\mapsto\theta(t)$.

Une loi de physique (Newton) énonce que la dérivée de θ est proportionnelle à la différence entre la température ambiante et la température du corps.

On a donc $\theta'(t)=k[T-\theta(t)]$ où k est le coefficient de proportionnalité fixé par la nature, la forme, la taille, etc. du corps.

On prend $k=0.1$ et $\theta_0=30$ °C, la température pour $t=0$.

Le temps est exprimé en minutes, les températures en degrés Celsius.

1. Exprimer cette loi à l'aide d'une équation différentielle en précisant les conditions initiales.
2. Dans cette question, T, la température ambiante, est 100 °C.

a. Déterminer θ, la solution de cette équation différentielle.

b. Calculer la limite de θ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

3. Représenter les courbes d'évolution de la température en fonction du temps pour $T=100$ °C, $T=30$ °C et $T=-10$ °C.

30 Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température, en degrés Celsius, est une fonction θ du temps t exprimé en secondes .On choisit l'instant de mise sous tension comme origine des temps $(t=0)$ et, à cet instant, la température du conducteur est égale à 0 °C.

Dans les conditions de l'expérience, la fonction θ vérifie $\theta'(t)+0.1\theta(t)=2$.

1. Déterminer $\theta(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$.
2. a. Quelle température atteint le conducteur au bout de dix secondes, au bout d'une minute ?

b. Calculer la limite de $\theta(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter cette limite.

31 A/ On considère la fonction f définie par

$f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}}+2}$ et C sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal. (L'unité graphique étant 1cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées).

1. Etudier les variations de la fonction f et préciser les asymptotes de C.
2. Donner l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
3. Tracer C, la tangente et les asymptotes.
4. a. Trouver la primitive de f qui s'annule en 0.

b. Calculer le nombre qui mesure (en unités d'aire) l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe (C) et la droite d'équation $x=5$.

B/ 1. Une population de poissons d'une certaine espèce croît au cours des ans selon la loi $g'=\frac{g}{5}$ (I), où g désigne la quantité de poissons (exprimée en milliers) dépendant du temps t (exprimé en années).

a. Résoudre l'équation différentielle (I).

b. Sachant qu'à l'instant $t=0$, la population comprend un millier de poissons, trouver l'expression de g.

2. En réalité, un prédateur de cette espèce empêche une telle croissance, tuant chaque année une certaine quantité de poissons (dépend de l'effectif total).

La population suit alors la loi : $g'=\frac{g}{5}-\frac{g^2}{15}$ (II).

a. On pose $h=\dfrac{g}{3-g}$ et on suppose que pour tout t on a $g(t)\neq 3$.

Montrer que g est solution de (II), si et seulement si, h est solution de (I).

b. Trouver les fonctions h solutions de (I), puis les fonctions g solutions de (II).

c. Trouver la fonction g solution de (II) telle que $g(0)=1$.

Montrer que cette fonction coïncide avec la fonction f étudiée dans la partie A.

d. Vers quelle limite tend la population de poissons ?

32 On considère un circuit électrique fermé comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur.

Le temps t est exprimé en secondes.

A l'instant $t=0$, on suppose le condensateur chargé. On ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.

On appelle $q(t)$ (en Coulombs) la valeur de la charge du condensateur à l'instant t.

La fonction q est deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$.

On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle $(E): y''+\dfrac{1}{LC}y=0.$

Dans tout l'exercice on prend $C=1.25\times10^{-3}$ et $L=0,5\times10^{-2}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution q de (E) vérifiant $q(0)=6\times10^{-3}$ et $q'(0)=0$.

3. On sait que la valeur $i(t)$ de l'intensité, exprimée en ampères, du courant qui parcourt le circuit à l'instant t vérifie $i(t)=-q'(t)$.

On définit ainsi une fonction i sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a. Vérifier que, pour tout t de $[0,+\infty[$, $i(t)=2.4\sin(400t)$.

b. Calculer $\dfrac{400}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{400}}\cos(800t)\,dt$.

a. On désigne par I_e la valeur (positive), exprimée en ampères, de l'intensité efficace dans le circuit.

Son carré est donné par la formule

$$(I_e)^2=\frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}}i^2(t)\,dt.$$

Calculer $(I_e)^2$, puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près.