DRE-GL	Devoir de la fête de la Saint valentin	Année Scolaire : 2022-2023
« Lycée Tokoin 2»	EPREUVE DE MATHEMATIQUES	Durée : 3H
Coef : 3	Terminale D	Date : 13/02/2023

Exercice1 : (4pts)

A. Répondre par Vrai ou Faux . $(0{,}5pt \times 2)$

1) Toute fonction dérivable sur un intervalle K admet une primitive sur cet intervalle.
2) f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a;b]$ tel $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires et l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $[a;b]$

B. Parmi les réponses proposées une seule est juste, choisie la bonne réponse. $(0{,}5pt \times 4)$

Soit deux intégrales définies par $I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx$ et $J = \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx$

1) La valeur de $I + J$ est : a) $-\pi$ b) π c) 0 d) Aucune réponse juste

2) $I - J = \int_0^{\pi} e^x \cos(ax)\, dx$ où la valeur de a est : a) 2 b) 4 c) -2 d) Aucune réponse juste

3) A l'aide d'une double intégration par parties la valeur de $J - I$ est : a) $\frac{1}{5}(e^{\pi} - 1)$ b) $\frac{1}{5}(1 - e^{\pi})$ c) $\frac{1}{5}(1 + e^{\pi})$

4) La valeur exacte de J est : a) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{10}(e^{\pi} - 1)$ b) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{10}(1 - e^{\pi})$ c) $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{10}(1 + e^{\pi})$ d) Aucune réponse juste.

C. 1) Qu'appelle-t-on équation différentielle ? 2) Enumérer les formules d'Euler $(0{,}5pt \times 2)$

Exercice 2 (03points)

On considère l'équation suivante dans l'ensemble des nombres complexes : $(E): 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3\left(3 + i\sqrt{3}\right)z - 4 = 0$

1) Déterminer les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$ puis résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - \left(1 + 3i\sqrt{3}\right)z - 4 = 0$ *(0,5 pt x 2)*

2) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle que l'on déterminera. *(0,5 pt)*

3) Déterminer les nombres complexes a, b et c tel que l'équation (E) soit équivalente à $(2z + 1)(az^2 + bz + c) = 0$ *1pt*

4) a. En déduire les solutions de (E) *(0,5 pt)*

Problème (13pts)

Partie A 1) (E_0) désigne l'équation différentielle : $y'' + 3y' + 2y = 0$. Déterminer les solutions générales de (E_0). (0,75pt)

2) (E) est l'équation différentielle : $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$.

a) Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = xe^{-x}$ est une solution particulière de (E). (0,75pt)

b) Démontrer que si f est une solution de (E) alors $g = f - h$ est une solution de (E_0). (0,5pt)

c) Démontrer que si $g = f - h$ est une solution de (E_0) alors f est une solution de (E). (0,5pt)

d) Déterminer toutes les solutions de (E). (0,5pt)

e) Déterminer la solution f_0 de (E) satisfaisant aux conditions initiales : $f_0(0) = 1$ et $f'_0(0) = 0$. (0,5pt)

Partie B On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)e^{-x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4cm).

1) a) Etudier le sens de variation de f. (1pt)

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat. Déterminer la limite de f en $-\infty$. (0,75pt)

c) Dresser le tableau de variation de f. (0,25pt)

d) Prouver que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{4}$ admet exactement deux solutions réelles. On notera α et β ces solutions ($\alpha < \beta$).

e) Montrer que $\alpha \in]-1 ; -\dfrac{1}{2}[$. (0,5pt)

f) Déterminer une valeur approchée de β à 10^{-2} près par défaut en justifiant la méthode utilisée. (0,5pt)

2) Tracer (C) en faisant apparaître graphiquement tous les résultats obtenus dans la question 1). (1pt)

Partie C . Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x + 1)e^{-kx}$. On note (C_k) la courbe représentative de f_k dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Lorsque k = 1, on retrouve la fonction f étudiée dans la partie A ; c'est-à-dire que dans ce cas : $f_1 = f$ et $C_1 = C$.

1) Quelle est la nature de la fonction f_o ? (0,5pt)

a) Déterminer par calculs les coordonnées des points d'intersection des courbes C_0 et C_1. (1pt)

b) Vérifier que, pour tout entier relatif k, la courbe (C_k) passe par ces points. (0,5pt)

2) a) Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $(x + 1)(e^{-x} - 1)$. (0,75pt)

b) En déduire les positions relatives de (C_k) et de (C_{k+1}). (0,5pt)

3) On suppose que k est non nul.

a) Calculer $f'_k(x)$ pour tout x réel. (0,5pt)

b) En déduire le sens de variation de la fonction f_k (on distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$). (1pt)

« Celui qui maîtrise son cours a toujours la moyenne » AZOUGO