MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2020	DUREE : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE C	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (3 points)

Soit m un entier relatif. On considère x et y les entiers relatifs et l'équation (E_m) :

$24x + 9y = m$.

1- Préciser la condition nécessaire et suffisante sur m pour que l'équation (E_m) ait des solutions. (0,5 pt)

2- On suppose m = 3. Résoudre l'équation (E_m). (0,75 pt)

3- On suppose $m = 3q$ ($q \in \mathbb{Z}$).
Trouver en fonction de q toutes les solutions de l'équation (E_m). (0,75 pt)

4- En utilisant la question 3, déterminer tous les entiers relatifs n solutions du système de congruences. (1 pt)

$$(S) : \begin{cases} n \equiv 20\ [24] \\ n \equiv 5\ [9] \end{cases}$$

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. Soit I et J les points du plan tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{v}$. On note K le point du plan tel que OIKJ soit un carré. M, un point quelconque de la droite (OK) différent de O et s la similitude plane directe de centre I qui transforme O en M. On note m, l'affixe du point M, J' et M' les images respectives de J et de M par s.

1- Montrer que $|m - 1| = |m - i|$ et que les complexes $(1 + im)(1 - m)$ et $m(1 - i)$ sont des réels non nuls. (on pourra utiliser $m = t + it$ où t est un réel non nul). (1 pt)

2-a/ Déterminer le rapport de s. (0,25 pt)

b/ Exprimer M'J' en fonction de m. Montrer que $M'I = |m - 1|^2$. (0,5 pt)

c/ En déduire que M'I = M'J'. (0,25 pt)

3-a/ Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = (1 - m)z + m$.
En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{JJ'}$ et $\overrightarrow{M'J'}$ ont pour affixes respectives $m(1 - i)$ et $i(1 + im)(1 - m)$. (0,75 pt)

b/ Prouver alors que J' est le projeté orthogonal de M' sur la droite (JK). (0,25 pt)

c/ Montrer que dans le repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ le point M' appartient à la courbe (P) d'équation $y = x - \frac{x^2}{2}$ lorsque le point M décrit la droite (OK) privée du point O. (0,25 pt)

4- Placer toute les données précédentes sur la figure et tracer la courbe (P). (0,75 pt)

Problème (13 points)

A- n désigne un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur $IR\backslash\{-n-2\}$ par :
$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n+2} - e^{-x-1}$.

1- Déterminer le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation. (1,25 pts)

2-a/ Démontrer par récurrence que, pour tout n de IN, $e^{n+2} > 2n + 3$.
En déduire le signe de $f_n(n + 1)$. (0,75 pt)

b/ Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions dont une positive notée u_n appartenant à $[n\,;\,n+1]$. (0,75 pt)

3- Calculer les limites u_n et $\frac{u_n}{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$. (0,5 pt)

B- Dans cette partie, on prendra $n = 0$ et on note $f_0 = f$ et $u_0 = u$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,)$ d'unité graphique 1 cm.

1- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse -1. (0,5 pt)

2-a/ Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u. (0,25 pt)

b/ En déduire la solution de l'équation $x \in [0; +\infty[$, $f(x-1) = 0$ en fonction de u. (0,25 pt)

3- Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ sur la même figure. (0,75 pt)

4- Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (T), $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation $x = 0$. (0,75 pt)

C- On appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$ et (γ) la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$.

1- Dessiner (Γ) et (γ) sur la figure précédente. (0,5 pt)

2- Démontrer qu'il existe un unique point M_0 appartenant à (γ) tel que la tangente à (γ) en ce point passe par O. Donner les coordonnées de M_0.

En déduire le nombre de tangentes à (Γ) passant par O. (0,75 pt)

3- Soit (T_a) la tangente à (Γ) au point A d'abscisse a. ($a \in$ IR) ; (D_λ) la tangente à (γ) au point K d'abscisse λ $(\lambda > 0)$.

a/ Déterminer une équation de (T_a) et une équation de (D_λ). (0,5 pt)

b/ Déterminer λ en fonction de a pour que les droites (T_a) et (D_λ) soient parallèles. (0,25 pt)

On notera b la valeur de λ ainsi obtenue, B est le point de (γ) d'abscisse b et (D_b) la tangente correspondante.

c/ (T_{-1}) et (D_b) peuvent-elles être confondues ?

Montrer que (T_a) et (D_b) sont confondues si et seulement si $b = e^{-a}$ et $e^{-a} = \frac{a-1}{a+1}$. (1 pt)

4- Monter que l'équation $f(x-1) = 0$ si et seulement si $\frac{x-1}{x+1}e^x = 1$. (0,25 pt)

5- On pose $g(x) = \frac{x-1}{x+1}e^x$.

a/ Démontrer que l'équation, $x \in [0; +\infty[$, $g(x) = 1$ admet une unique solution μ dans [1,5 ; 1,6].

Exprimer μ en fonction de u. (1 pt)

b-i/ Pour tout réel x, différent de 1 et de -1, calculer le produit $g(x).g(-x)$. (0,25 pt)

ii/ Déduire des questions précédentes que l'équation $x \in IR$, $e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}$ admet deux solutions opposées. (0,25 pt)

iii/ Déterminer les tangentes communes aux courbes (Γ) et (γ). (0,5 pt)

iv/ Tracer ces tangentes dans le repère précédent. On prendra μ = 1,55. (0,5 pt)

6- Soit A le point d'abscisse μ de la courbe (Γ) , (T_μ) est donc tangente à la courbe (Γ) au point A et tangente à la courbe (γ) au point B d'abscisse $\frac{\mu-1}{\mu+1}$.

a/ Donner les ordonnées des points A et B. (0,5 pt)

b/ En utilisant la C-3-c/, montrer que (T_μ) et $(T_{-\mu})$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$. (0,5 pt)

c/ En déduire les coordonnées des points de contact de (Γ) et (γ) avec $(T_{-\mu})$. (0,5 pt)

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2020	DUREE : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIE E	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on donne les points $A(0; -1; 1)$; $B(0; 1/2; 1)$; $C(-1/2; 0; 3)$ et $D(1; 1; 1)$.

1- Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par les points non alignés A, C et D. (0,5 pt)

2- Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace.

a/ Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$. (0,5 pt)

b/ Déterminer les coordonnées du point M_0 tel que $\overrightarrow{M_0A} \wedge \overrightarrow{M_0B} = \overrightarrow{M_0C}$. (0,5 pt)

3- Déterminer l'ensemble des points M du plan $(O; \vec{i}; \vec{k})$ tels que : $\frac{2}{3}\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$. (0,5 pt)

4- a/ Placer l'épure des points A, D. (0,5 pt)

b/ Tracer l'épure des traces du plan $\mathcal{P}$. (0,5 pt)

Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit I et J les points du plan tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{v}$. On note K le point du plan tel que OIKJ soit un carré. M, un point quelconque de la droite (OK) différent de O et s la similitude plane directe de centre I qui transforme O en M. On note m, l'affixe du point M, J' et M' les images respectives de J et de M par s.

1- Montrer que $|m - 1| = |m - i|$ et que les complexes $(1 + im)(1 - m)$ et $m(1 - i)$ sont des réels non nuls. (on pourra utiliser $m = t + it$ où t est un réel non nul). (1 pt)

2-a/ Déterminer le rapport de s. (0,25 pt)

b/ Exprimer M'J' en fonction de m. Montrer que $M'I = |m - 1|^2$. (0,5 pt)

c/ En déduire que M'I = M'J'. (0,25 pt)

3-a/ Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = (1 - m)z + m$.

En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{JJ'}$ et $\overrightarrow{M'J'}$ ont pour affixes respectives $m(1 - i)$ et $i(1 + im)(1 - m)$. (0,75 pt)

b/ Prouver alors que J' est le projeté orthogonal de M' sur la droite (JK). (0,25 pt)

c/ Montrer que dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ le point M' appartient à la courbe (P) d'équation $y = x - \frac{x^2}{2}$ lorsque le point M décrit la droite (OK) privée du point O. (0,25 pt)

4- Placer toutes les données précédentes sur la figure et tracer la courbe (P). (0,75 pt)

Problème (13 points)

A- n désigne un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n - 2\}$ par :

$f_n(x) = \frac{x - n}{x + n + 2} - e^{-x-1}$.

1- Déterminer le sens de variation de f_n puis dresser son tableau de variation. (1,25 pts)

2-a/ Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $e^{n+2} > 2n + 3$.

En déduire le signe de $f_n(n + 1)$. (0,75 pt) b/ Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet deux solutions dont une positive notée u_n appartenant à $[n\,;\, n+1]$. (0,75 pt)

3- Calculer les limites u_n et $\frac{u_n}{n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$. (0,5 pt)

B- Dans cette partie, on prendra $n = 0$ et on note $f_0 = f$ et $u_0 = u$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$ d'unité graphique 1 cm.

1- Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ en son point d'abscisse -1. (0,5 pt)

2-a/ Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u. (0,25 pt)

b/ En déduire la solution de l'équation $x \in [0; +\infty[$, $f(x-1) = 0$ en fonction de u. (0,25 pt)

3- Tracer (T) et $(\mathcal{C})$ sur la même figure. (0,75 pt)

4- Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par (T), $(\mathcal{C})$ et la droite d'équation $x = 0$. (0,75 pt)

C- On appelle (Γ) la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$ et (γ) la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln x$.

1- Dessiner (Γ) et (γ) sur la figure précédente. (0,5 pt)

2- Démontrer qu'il existe un unique point M_0 appartenant à (γ) tel que la tangente à (γ) en ce point passe par O. Donner les coordonnées de M_0.

En déduire le nombre de tangentes à (Γ) passant par O. (0,75 pt)

3- Soit (T_a) la tangente à (Γ) au point A d'abscisse a. ($a \in IR$) ; (D_λ) la tangente à (γ) au point K d'abscisse λ ($\lambda > 0$).

a/ Déterminer une équation de (T_a) et une équation de (D_λ). (0,5 pt)

b/ Déterminer λ en fonction de a pour que les droites (T_a) et (D_λ) soient parallèles. (0,25 pt)

On notera b la valeur de λ ainsi obtenue, B est le point de (γ) d'abscisse b et (D_b) la tangente correspondante.

c/ (T_{-1}) et (D_b) peuvent-elles être confondues ?

Montrer que (T_a) et (D_b) sont confondues si et seulement si $b = e^{-a}$ et $e^{-a} = \frac{a-1}{a+1}$. (1 pt)

4- Monter que l'équation $f(x-1) = 0$ si et seulement si $\frac{x-1}{x+1}e^x = 1$. (0,25 pt)

5- On pose $g(x) = \frac{x-1}{x+1}e^x$.

a/ Démontrer que l'équation, $x \in [0; +\infty[$, $g(x) = 1$ admet une unique solution μ dans [1,5 ; 1,6].

Exprimer μ en fonction de u. (1 pt)

b-i/ Pour tout réel x, différent de 1 et de -1, calculer le produit $g(x).g(-x)$. (0,25 pt)

ii/ Déduire des questions précédentes que l'équation $x \in IR$, $e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}$ admet deux solutions opposées. (0,25 pt)

iii/ Déterminer les tangentes communes aux courbes (Γ) et (γ). (0,5 pt)

iv/ Tracer ces tangentes dans le repère précédent. On prendra μ = 1,55. (0,5 pt)

6- Soit A le point d'abscisse μ de la courbe (Γ), (T_μ) est donc tangente à la courbe (Γ) au point A et tangente à la courbe (γ) au point B d'abscisse $\frac{\mu-1}{\mu+1}$.

a/ Donner les ordonnées des points A et B. (0,5 pt)

b/ En utilisant la **C-3-c/**, montrer que (T_μ) et $(T_{-\mu})$ sont symétriques par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$. (0,5 pt)

c/ En déduire les coordonnées des points de contact de (Γ) et (γ) avec $(T_{-\mu})$. (0,5 pt)