MATIÈRE : MATHÉMATIQUES
SÉRIE: C_4 & E

SUJET & PROPOSITION DE CORRIGÉ-TYPE

MATHÉMATIQUES

BACII 2022 SÉRIES C_4 & E

SOMMAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT	Durée : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 5
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIES CE	

Exercice 1 (5 points) **SESSION NORMALE**

On considère dans le plan orienté un rectangle $ABCD$, tel que $Mes\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) = -\frac{\pi}{2}$, $AB = 1, AD = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ puis $FCDE$ et $BFGH$ deux carrés de même sens que celui du rectangle $ABCD$.

1) a) Faire la figure avec précision en prenant 4 cm pour unité graphique. (0,5 pt)

b) On pose $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, montrer que $q^2 = 1 - q$ et vérifier que $FG = q$ et $AH = q^2$. (0,75 pt)

2) Soit S_1 la similitude directe de centre F d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$ et de rapport q .

a) Montrer que l'antécédent de G par S_1 est C . (0,5 pt)

b) Déterminer l'image du carré $FCDE$ par S_1 . (0,5 pt)

3) Soit S_2 la similitude directe de centre G qui transforme H en E .
Donner les autres éléments caractéristiques de S_2 . (0,5 pt)

4) Soit $g = S_2 \circ S_1$.

a) Montrer que $g(D) = E$ et $g(C) = G$. (0,5 pt)

b) Déterminer le réel $\frac{AE}{AD}$ en fonction de q puis donner les éléments caractéristiques de g . (1 pt)

c) Soit $I = g(E)$ et $J = g(F)$, donner la nature du quadrilatère $EGJI$ puis construire les points I et J . (0,75 pt)

Exercice 2 (3,5 points)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1 et on désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CD]$. Dans l'espace muni du repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$, on considère le point M élément du segment $[EC]$.

1) a) Montrer que M est le barycentre des points pondérés (C,t) et $(E,1-t)$ où t appartient à $[0;1]$ puis déterminer les coordonnées du point M en fonction de t. (0,75 pt)

b) Montrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment $[IJ]$ puis en déduire la nature du triangle IMJ. (1 pt)

c) Exprimer IM^2 en fonction de t. (0,25 pt)

2) On désigne par θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{IMJ}$.

a) Montrer que $sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4IM}$. (0,5 pt)

b) En supposant que $\theta \in [0,\pi]$, démontrer que θ est maximal lorsque IM est minimale. (0,5 pt)

c) Etudier le sens de variation de la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(t) = 3t^2 - 5t + \frac{9}{4}$ puis déterminer le point M_0 position de M sur le segment $[EC]$ tel que la mesure $\widehat{IMJ}$ soit maximale. (0,5 pt)

Problème (11,5 points)

A- Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des fonctions numériques f d'une variable réelle dérivables sur $]-2;+\infty[$ et vérifiant la relation :
$\forall x \in]-2;+\infty[, (2+x)f'(x) + f(x) = 1 + ln(2+x)$.

1) Soit f un élément de $\mathcal{J}$, g la fonction dérivable sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ et définie par $g(x) = (2+x)f(x)$.

a) Démontrer que g est une primitive sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ de la fonction h définie par $h(x) = 1 + ln(2+x)$. (0,75 pt)

b) Réciproquement, g_1 une primitive de la fonction h, démontrer que la fonction t définie par : $\forall x \in]-2;+\infty[, t(x) = \frac{g_1(x)}{2+x}$ est élément de $\mathcal{J}$. (0,5 pt)

2) A l'aide d'une intégration par parties déterminer l'ensemble des primitives de h sur $]-2;+\infty[$. (0,5 pt)

3) En déduire l'ensemble $\mathcal{J}$. (0,25 pt)

B- 1) On considère l'ensemble des fonctions $f_k : x \mapsto ln(2+x) + \frac{k}{2+x}$ dérivables sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ où k est un paramètre réel.

a) Calculer suivant les valeurs de k les limites de f_k aux bornes de l'ensemble de définition. (1 pt)

b) Etudier le sens de variation de f_k et dresser son tableau de variation suivant les valeurs de k. (1,5 pts)

c) Dans un même repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 1\,cm$ et $\|\vec{\jmath}\| = 2\,cm$ tracer avec soin les courbes respectives C_{-2}, C_0 et C_1 des fonctions f_{-2}, f_0 et f_1. (1,5 pts)

2) $\forall t \in IR$ et $\forall n \in IN \setminus \{0;1\}$ on pose :
$Q_{n-2}(t) = -t + (1+t)^2 + \cdots + (-1)^{n-2}(1+t)^{n-2}$.

a) Démontrer que $\forall t \in IR \setminus \{-2\}\ Q_{n-2}(t) = \frac{1-(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}$ puis en déduire que $\frac{1}{2+t} = -t + (1+t)^2 + \cdots + (-1)^{n-2}(1+t)^{n-2} + (-1)^{n-1}\frac{(1+t)^{n-1}}{2+t}$. (1 pt)

b) Démontrer que : $\forall x \in]-1;0], f_0(x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1}\int_{-1}^{x}\frac{(1+t)^{n-1}}{2+t}dt$ où $P_{n-1}(x)$ est un polynôme que l'on précisera. (0,75 pt)

3) On considère la fonction φ définie par : $\begin{cases} \varphi(x) = \frac{f_0(x)}{x+1} & \forall x \in]-1;0] \\ \varphi(-1) = 1 \end{cases}$

a) Démontrer que $\forall x \in [-1;0], \int_{-1}^{x}\frac{(1+t)^{n-1}}{2+t}dt \leq \frac{1}{n}$. (0,5 pt)

b) Utiliser la question 2) b) pour démontrer que : (0,5 pt)
$\forall x \in]-1;0]\ \left|\varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| \leq \frac{1}{n(x+1)}$.

c) Démontrer que :
$\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\varphi(x)dx + \frac{1}{n}ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right) \leq S_n(0) \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\varphi(x)dx - \frac{1}{n}ln\left(\frac{1}{n}\right) + S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right)$

Avec $S_n(x) = x - \frac{1}{2^2}(1+x)^2 + \frac{1}{3^2}(1+x)^3 + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{(1+x)^{n-1}}{(n-1)^2}, n \geq 2$. (0,75 pt)

C- Soit $\psi_n(x) = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i(1+x)^i$

1) Démontrer par récurrence que, $\forall n \in IN^*, \forall x \in]-2;+\infty[, f_0'(x) = \psi_n(x) + \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}$ (0,5 pt)

2) Démontrer que $\forall n \in IN,\ 0 \leq \int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx \leq \frac{1}{2n+1}$. (0,5 pt)

3) On considère la suite (U_n) définie par : $\forall n \in IN^*, U_n = \sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)^{1+i}}{i}$.

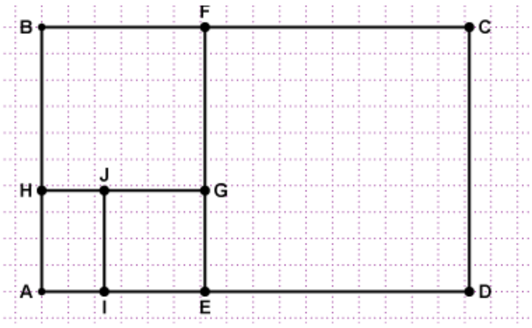
a) Démontrer que $\forall n \in IN^*, f_0(0) = U_n + \int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx$. (0,5 pt)

b) En déduire la limite de la suite (U_n). (0,5 pt)

PROPOSITION DE CORRIGÉ-TYPE

Exercice I (05,00points)

1.a. Figure :



b. Montrons que $q^2 = 1 - q$ et vérifions que $FG = q$ et $AH = q^2$

- On a $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
  Alors $q^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4}$
  $= \frac{2+(1-\sqrt{5})}{2} = 1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
  donc $q^2 = 1 - q$.
- $ABCD$ est un rectangle donc $CD = AB = 1$, $BC = AD = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Comme $BFGH$ est un carré et que $F \in [BC]$ alors $FG = FB = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = q$.
Donc $FG = q$.

Comme $H \in [AB]$ alors $AH = AB - BH = AB - FG$. Donc $AH = 1 - q$. D'où $AH = q^2$.

2.a. $S_1 = S(F, -\frac{\pi}{2}, q)$. Montrons que $S_1^{-1}(G) = C$.
On a $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{FG}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ et $\frac{FG}{FC} = \frac{q}{1} = q$. Ainsi, $S_1(C) = G$. D'où $S_1^{-1}(G) = C$.

b. Déterminons l'image du carré $FCDE$ par S_1.
S_1 est une similitude directe donc l'image d'un carré par S_1 est un carré de même sens. Comme $FCDE$ est un carré, alors son image par S_1 est un carré de même sens d'où l'image du carré $FCDE$ par S_1 est le carré $FGHB$.

$$\boxed{S_1(FCDE) = FGHB}$$

Autre méthode

$S_1(F) = F$, $S_1(C) = G$. On a : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FB}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ et $\frac{FB}{FE} = q$ donc $S_1(E) = B$.
D'autre part $S_1(D) = D'$ et $S_1(E) = E'$ alors $FD' = qFD$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FD'}}\right) = -\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire $D' = q\sqrt{2}$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FD'}}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
$FH = q\sqrt{2}$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FH}}\right) = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FE}}\right) + Mes\left(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FH}}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$. Donc $D' = H$.
D'où

$$\boxed{S_1(FCDE) = FGHB}$$

3. Déterminons les autres éléments caractéristiques de S_2.
Comme $S_2(G) = G$ et $S_2(H) = E$ alors, $\frac{GE}{GH} = \frac{1-q}{q} = \frac{q^2}{q} = q$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{GH}, \overrightarrow{GE}}\right) = \frac{\pi}{2}$.
Donc

$$\boxed{S_2 \text{ a pour rapport } q \text{ et pour angle de mesure } \frac{\pi}{2}}$$

4. a. Montrons que $g(D) = E$ et $g(C) = G$.
$g(D) = S_2 \circ S_1(D) = S_2(S_1(D)) = S_2(H) = E$. Donc $\boxed{S_2(D) = E}$
$g(C) = S_2 \circ S_1(C) = S_2(S_1(C)) = S_2(G) = G$. On a donc $\boxed{S_2(C) = G}$
b. Déterminons le réel $\frac{AE}{AD}$.

$\frac{AE}{AD}=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$. Donc $\frac{AE}{AD}=q^2=1-q$. $\boxed{\frac{AE}{AD}=1-q}$.

- Les éléments caractéristiques de g.

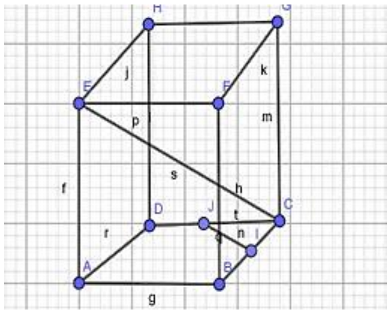
la somme des mesures des angles de S_1 et de S_2 est égale à 0 et comme $E\in[AD]$ alors g est l'homothétie de centre A et de rapport $q^2=1-q$.

c. Nature du quadrilatère $EGJI$.

$g(A)=A,\ g(E)=I,\ g(F)=J,\ g(D)=E$ et $g(C)=G$.

Comme l'homothétie conserve la nature des figures géométriques et les angles orientés alors $EGJI$, image du carré $DCFE$ est un carré de même sens.

Exercice II (03,50points)



1.a. Montrons que $M=bar\{(C,t),(E,1-t)\}$

$M\in[CE]\Leftrightarrow\exists t\in[0,1]/\ \overrightarrow{EM}=t\overrightarrow{EC}$.

$\overrightarrow{EM}=t\,\overrightarrow{EC}\ \Leftrightarrow\overrightarrow{EM}=t\overrightarrow{EM}+t\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow(1-t)\overrightarrow{EM}+t\,\overrightarrow{CM}=\vec{0}$. Donc $M=bar\{(C,t),(E,1-t)\}$.

- Les coordonnées de M en fonction de t.

On a $A(0;0;0), B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $E(0;0;1)$, $D(0;1;0)$.

$$M=bar\{(C,t);\ (E,1-t)\}\Longrightarrow\begin{cases}x_M=\frac{(1-t)\times0+t\times1}{1}=t\\ y_M=\frac{(1-t)\times0+t\times1}{1}=t\\ z_M=\frac{(1-t)\times1+t\times0}{1}=1-t\end{cases}$$ d'où $\boxed{M(t,t,1-t)}$.

b. Montrons que C et E appartiennent au plan médiateur du segment $[IJ]$.

Soit I' le milieu de $[IJ]$. On a $I\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $J\left(\frac{1}{2};1;0\right)$, $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$ et $I'\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};0\right)$.

Comme (π) est le plan médiateur de $[IJ]$ alors $(\pi):-x+y+d=0, d\in\mathbb{R}$.

$I'\in(\pi)$ donc $(\pi):-x+y=0$.

$-x_E+y_E=0$ et $-x_C+y_C=1-1=0$ donc $C\ et\ E$ appartiennent à (π), plan médiateur du segment $[IJ]$.

- Déduisons la nature du triangle IMJ.

$\begin{cases}\text{E et C }\in(\pi)\\ M\in[EC]\end{cases}\Longrightarrow M\in(\pi)$. Par suite, $IM=JM$. Sur ce, IMJ est un triangle isocèle en M.

Autre méthode:

$\overrightarrow{I'C}.\overrightarrow{IJ}=\left(1-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+0=0$ et $\overrightarrow{I'E}.\overrightarrow{IJ}=0$ donc C et E appartiennent à (π), plan médiateur du segment $[IJ]$.

c. Exprimons IM^2 en fonction de t.

$IM^2=(t-1)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+(1-t)^2$

$=2t^2-4t+2+t^2-t+\frac{1}{4}$. Donc $\boxed{IM^2=3t^2-5t+\frac{9}{4}}$.

2.a. Montrons que $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4IM}$.

On a: $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{II'}{IM}=\frac{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+0}}{IM}$. Ainsi, $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4IM}$.

b. Montrons que θ est maximal lorsque IM est minimale.

$\theta \in [0,\pi] \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin\frac{\theta}{2} \leq 1$.

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4IM} \leq 1$

$\Leftrightarrow IM \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$. Donc $\frac{\sqrt{2}}{4}$. est un minorant de IM.

En prenant $IM = \frac{\sqrt{2}}{4}$ on obtient $\theta = \pi$. Donc θ est maximal lorsque IM est minimale.

c. Sens de variation de f.

$$f(t) = 3t^2 - 5t + \frac{9}{4}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(t) = 6t - 5$.

$f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \frac{5}{6}$ donc f est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{5}{6}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5}{6}, 1\right]$.

$\widehat{IMJ}$ est maximal si $f(t)$ est minimale donc pour $t_0 = \frac{5}{6}$ et $M_0\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

$$\boxed{M_0\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)}$$

Problème II (11,50points)

Partie A

$\mathcal{J} = \{f:]-2;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} / (2+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(2+x)\}$.

1. $g(x) = (2+x)f(x)$

a. Montrons que g est une primitive de la fonction $h: x \mapsto 1 + \ln(2+x)$.

g est dérivable sur $]-2;+\infty[$ et on a $g'(x) = f(x) + (2+x)f'(x)$.

Or $(2+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(2+x)$ donc $g'(x) = h(x)$.

d'où g est une primitive de h.

b. Démontrons que la fonction $t: x \mapsto \frac{g_1(x)}{2+x}$ est élément de $\mathcal{J}$.

La fonction t est dérivable sur $]-2;+\infty[$ et on a : $t'(x) = \frac{g_1'(x)(2+x)-(g_1 x)}{(2+x)^2}$.

$(2+x)t'(x) + t(x) = \frac{g_1'(x)(2+x)-g_1(x)}{2+x} + \frac{g_1(x)}{2+x}$.

$= g_1'(x)$

$= 1 + \ln(2+x)$

$(2+x)t'(x) + t(x) = 1 + \ln(2+x)$ donc $t \in \mathcal{J}$.

2. Déterminons l'ensemble des primitives H de h.

$H(x) = \int h(x)dx = \int(1 + \ln(2+x))dx$

$H(x) = x + \int \ln(2+x)\, dx$

Calcul de $\int \ln(2+x)\, dx$

Posons : $u(x) = \ln(2+x)$ et $v'(x) = 1$

on a :

$u'(x) = \frac{1}{2+x}$ et $v(x) = x + 2$

$\int \ln(2+x)\, dx = (x+2)\ln(2+x) - \int dx$

$= (x+2)\ln(2+x) - x + \propto$.

Donc

$$\boxed{H(x) = (x+2)ln(2+x) + \propto, \quad \propto \in \mathbb{R}}$$

3. Déduction de $\mathcal{J}$.

$f \in \mathcal{J} \Leftrightarrow (2+x)f'(x) + f(x) = 1 + \ln(2+x)$

$\Leftrightarrow g'(x) = 1 + \ln(2+x)$

$\Leftrightarrow \int g'(x)dx = \int(1 + \ln(2+x))dx$

$\Leftrightarrow g(x) = H(x)$ donc $f(x) = \frac{H(x)}{2+x}$

d'où $f(x) = \ln(2+x) + \frac{\propto}{2+x}$, $\propto \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{J}$ est l'ensemble des fonctions $x \longmapsto \ln(2+x) + \frac{\propto}{2+x}$ où $\propto$ est un nombre réel.

Partie B

1. $f_k(x) = \ln(2+x) + \frac{k}{x+2}$.

a. Les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{\substack{x\to-2\\ >}} f_k(x) = \begin{cases} +\infty & si\ \ k>0 \\ -\infty & si\ \ k<0 \end{cases}}$$

- Pour $k = 0$,

On a : $\forall\, x \in\ ]-2\,;\,+\infty[, f_k(x) = \ln(2+x)$ donc $\boxed{\lim_{\substack{x\to-2\\ >}} f_k(x) = -\infty}$.

b. Sens de variation de $f_k(x)$.

f_k est dérivable sur $]-2;+\infty[$ et on a $f_k'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{k}{(x+2)^2} = \frac{x+2-k}{(x+2)^2}$.

- $k > 0$

x	-2		$k-2$		$+\infty$
$f_k'(x)$	‖	-	0	+	

f_k est strictement décroissante sur $]-2, k-2]$ et strictement croissante sur $[k-2, +\infty[$.

Pour $k > 0$

x	-2		$k-2$		$+\infty$
$f'_k(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_k(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1+\ln k$	↗	$+\infty$

- Pour $k \le 0$, $f_k'(x) > 0\ \forall\, x \in]-2;+\infty[$

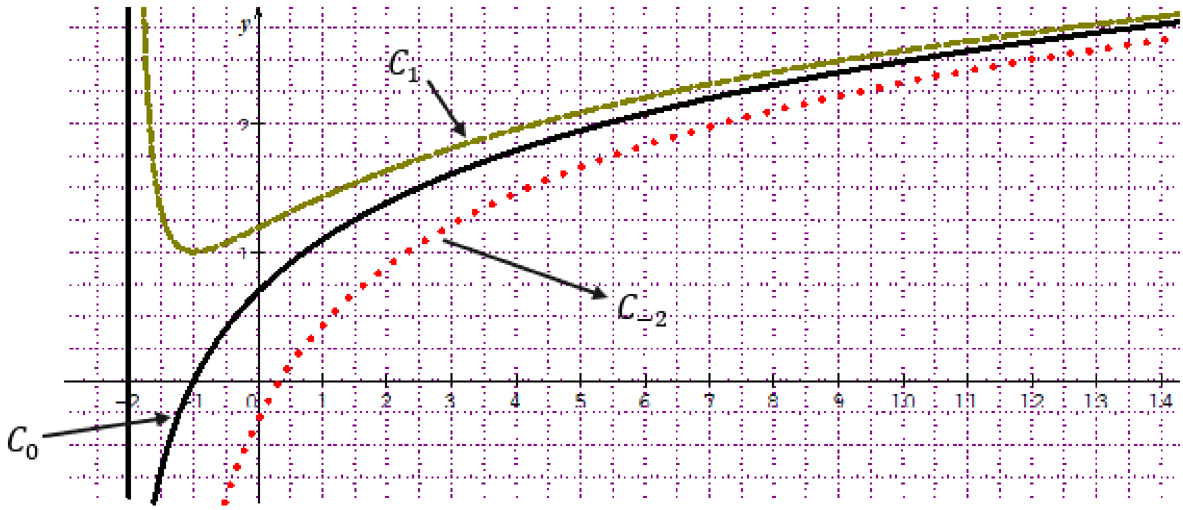
f_k est donc strictement croissante sur $]-2,\ +\infty\,[$.

Pour $k \le 0$

x	-2		$+\infty$
$f'_k(x)$	‖	$+$	
$f_k(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

c. Courbes C_{-2}, C_0 et C_1.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f_k(x)}{x} = 0\ \ \forall\, k \in \mathbb{R}\ \ \textit{donc toutes les courbes } (C_k) \textit{ admettent une branche parabolique de direction celle de } (O,\vec{\imath}) \textit{ en } +\infty.}$$



2.a. Démontrons que $Q_{n-2}(t)=\frac{1-(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}$ $\forall\neq -2$.

$$Q_{n-2}(t)=-t+(1+t)^2+\cdots+(-1)^{n-2}(1+t)^{n-2}$$
$$=1+(-1-t)+(1+t)^2+\cdots+(-1)^{n-2}(1+t)^{n-2}.$$

$Q_{n-2}(t)$ est la somme des $(n-1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison $-(1+t)$ et de premier terme 1, avec $t\neq -2$. Donc

$$Q_{n-2}(t)=\frac{1-(-1-t)^{n-1}}{2+t}.$$
$$=\frac{1-(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}$$

D'où

$$Q_{n-2}(t)=\frac{1-(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}\quad \forall\, t\neq -2.$$

- **Déduction**

$$-t+(1+t)^2+\cdots+(-1)^{n-2}(1+t)^{n-2}+\frac{(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}=Q_{n-2}(t)+\frac{(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}$$
$$=\frac{1-(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}+\frac{(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}$$
$$=\frac{1}{2+t}.$$

Par suite, $\frac{1}{2+t}=-t+(1+t)^2+\cdots+(-1)^{n-2}(1+t)^{n-2}+\frac{(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}$.

b. Démontrons que $f_0(x)=P_{n-1}(x)+(-1)^{n-1}\int_{-1}^{x}\frac{(1+t)^{n-1}}{2+t}dt$.

$$f_0(x)=\ln(2+x)$$

$$\frac{1}{2+t}=-t+(1+t)^2+\cdots+(-1)^{n-2}(1+t)^{n-2}+\frac{(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}$$
$$\Rightarrow \int_{-1}^{x}\frac{1}{2+t}dt=\int_{-1}^{x}\left(-t+(1+t)^2+\cdots+(-1)^{n-2}(1+t)^{n-2}+\frac{(-1)^{n-1}(1+t)^{n-1}}{2+t}\right)dt$$
$$\Leftrightarrow \ln(2+x)=\left[-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}(1+t)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}(1+t)^{n-1}\right]_{-1}^{x}+(-1)^{n-1}\int_{-1}^{x}\frac{(1+t)^{n-1}}{2+t}dt$$
$$\Leftrightarrow \ln(2+x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}(1+x)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}(1+x)^{n-1}+\frac{1}{2}+(-1)^{n-1}\int_{-1}^{x}\frac{(1+t)^{n-1}}{2+t}dt$$

d'où

$f_0(x)=P_{n-1}(x)+(-1)^{n-1}\int_{-1}^{x}\frac{(1+t)^{n-1}}{2+t}dt$ avec $\boxed{P_{n-1}(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}(1+x)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}(1+x)^{n-1}}$

Autre méthode: On pourra remarquer que
$-t+(1+t)^2+\cdots+(-1)^{n-2}(1+t)^{n-2} = 1-(1+t)+(1+t)^2+\cdots+(-1)^{n-2}(1+t)^{n-2}$.
Dans ce cas, on obtient

$$\boxed{P_{n-1}(x) = (x+1) - \frac{1}{2}(1+x)^2 + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{(1+x)^{n-1}}{n-1}}.$$

3. $\begin{cases} \varphi(x) = \frac{f_0(x)}{x+1} \; si \; x \in]-1,0] \\ \varphi(-1) = 1 \end{cases}$

a. Démontrons que $\forall x \in [-1,0]$, $\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t} dt \leq \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} -1 \leq t \leq 0 &\Leftrightarrow 1 \leq 2+t \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2+t} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t} \leq (1+t)^{n-1} \\ &\Rightarrow \int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t} dt \leq \left[\frac{(1+t)^n}{n}\right]_{-1}^{x} \\ &\Leftrightarrow \int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t} dt \leq \frac{(1+x)^n}{n}. \end{aligned}$$

Or $\forall x \in [-1,0]$, $1+x \leq 1$ donc $\frac{(1+x)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ d'où $\forall x \in [-1,0]$, $\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t} dt \leq \frac{1}{n}$.

b. Démontrons que $\forall x \in]-1,0]$, $\left|\varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| \leq \frac{1}{n(x+1)}$.

D'après 2.b., $\varphi(x) = \frac{f_0(x)}{x+1} = \frac{P_{n-1}(x)}{x+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{x+1}\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t} dt$

On a:

$\left|\varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{x+1}\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t} dt\right|$. Or $\left|\frac{(-1)^{n-1}}{x+1}\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t} dt\right| \leq \frac{1}{|x+1|}\int_{-1}^{x} \frac{|1+t|^{n-1}}{2+x} dt$

donc $\left|\varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| \leq \frac{1}{|x+1|}\int_{-1}^{x} \frac{|1+t|^{n-1}}{2+x} dt$

$\leq \frac{1}{x+1}\int_{-1}^{x} \frac{(1+t)^{n-1}}{2+t} dt \leq \frac{1}{n(x+1)}$. D'où $\forall x \in]-1,0]$, $\left|\varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| \leq \frac{1}{n(x+1)}$.

c. Démontrons que:

$$\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)\,dx + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right) \leq S_n(0) \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{1} \varphi(x)\,dx - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right)$$

avec

$$S_n(x) = x - \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(x+1)^3}{3^3} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{(x+1)^{n-1}}{(n-1)^2} \; n \geq 2.$$

On a : $\forall x \in]-1;0]$, $\left|\varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| \leq \frac{1}{n(x+1)}$.

$\left|\varphi(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x+1}\right| \leq \frac{1}{n(x+1)} \Leftrightarrow \frac{-1}{n(x+1)} \leq \varphi(x) - \left(1 - \frac{(x+1)}{2} + \cdots + (-1)^{n-2} \times \frac{(x+1)^{n-2}}{n-1}\right) \leq \frac{1}{n(x+1)}$.

En intégrant sur $\left[-1+\frac{1}{n};0\right]$, on obtient:

$-\frac{1}{n}\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \frac{1}{n(x+1)} dx \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)\,dx - \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0}\left(1 - \frac{(x+1)}{2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{(x+1)^{n-2}}{n-1}\right)dx \leq \frac{1}{n}\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \frac{1}{(x+1)} dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{n}[\ln(x+1)]_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)dx - \left[x - \frac{(x+1)^2}{2^2} + \frac{(x+1)^3}{3^2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{(x+1)^{n-1}}{(n-1)^2}\right]_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \leq \frac{1}{n}[\ln x + 1)]_{-1+\frac{1}{n}}^{0}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)dx - [S_n(x)]_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \leq -\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)dx - \left(S_n(0) - S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right)\right) \leq -\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)dx + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right) \leq S_n(0)$ et $S_n(0) \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)dx - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right)$.

On en déduit que:

$$\int_{-1+\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)\,dx + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right) \leq S_n(0) \leq \int_{-1+\frac{1}{n}}^{1} \varphi(x)\,dx - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(-1+\frac{1}{n}\right).$$

Partie C

1. Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-2, +\infty[, \; f_0'(x) = \Psi_n(x) + \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}$.

$\Psi_n(x) = \sum_{i=0}^{2n-1}(-1)^i(1+x)^i$

- $n = 1$

  $\Psi_1(x) = \sum_{i=0}^{1}(-1)^i(1+x)^i = 1 + (-1)(x+1) = -x$

  $f_0'(x) - \frac{(1+x)^2}{2+x} = \frac{1}{2+x} - \frac{x^2+2x+1}{2+x} = -x = \Psi_1(x)$ donc $f_0'(x) = \Psi_1(x) + \frac{(1+x)^2}{2+x}$

  d'où l'initialisation vraie

- Supposons pour un $k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-2, +\infty[, f_0'(x) = \Psi_k(x) + \frac{(1+x)^{2k}}{2+x}$ et vérifions l'hérédité.

On a $\Psi_{k+1}(x) = \sum_{i=0}^{2k+1}(-1)^i(1+x)^i$

$= \sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^i(1+x)^i + (-1)^{2k}(1+x)^{2k} + (-1)^{2k+1}(1+x)^{2k+1}$

$= \Psi_k(x) + (-1)^{2k}(1+x)^{2k} + (-1)^{2k+1}(1+x)^{2k+1}$

$= f_0'(x) - \frac{(1+x)^{2k}}{2+x} + (-1)^{2k}(1+x)^{2k} + (-1)^{2k+1}(1+x)^{2k+1}$

$\Leftrightarrow f_0'(x) = \Psi_{k+1}(x) + \frac{(1+x)^{2k}}{2+x} - (1+x)^{2k} + (1+x)^{2k+1}$

$= \Psi_{k+1}(x) + (1+x)^{2k}\left(\frac{1}{2+x} - 1 + 1 + x\right)$

$= \Psi_{k+1}(x) + (1+x)^{2k}\frac{x^2+2x+1}{2+x}$

$= \Psi_{k+1}(x) + (1+x)^{2k}\frac{(1+x)^2}{2+x} \quad \Leftrightarrow \; f_0'(x) = \Psi_{k+1}(x) + \frac{(1+x)^{2(k+1)}}{2+x}$.

Donc $f_0'(x) = \Psi_k(x) + \frac{(1+x)^{2k}}{2+x} \Rightarrow f_0'(x) = \Psi_{k+1}(x) + \frac{(1+x)^{2(k+1)}}{2+x}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-2, +\infty[$, $f_0'(x) = \Psi_n(x) + \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}$.

2. Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \le \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx \le \frac{1}{2n+1}$

$x \in [-1, 0] \Leftrightarrow -1 \le x \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{2+t} \le 1$ d'après partie B-3.a.

$\Leftrightarrow 0 \le \frac{(1+x)^{2n}}{2+t} \le (1+x)^{2n}$

$\Rightarrow 0 \le \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx \le \int_{-1}^{0}(1+x)^{2n}dx$

$\Leftrightarrow 0 \le \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx \le \frac{1}{2n+1}\left[(1+x)^{2n+1}\right]_{-1}^{0}$

$\Leftrightarrow 0 \le \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx \le \frac{1}{2n+1}$.

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \le \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx \le \frac{1}{2n+1}.$$

3. $U_n = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^i}{i}$.

a. Démontrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_0(0) = U_n + \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx$.

On a : $f_0'(x) = \Psi_n(x) + \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}$

$f_0'(x) = \Psi_n(x) + \frac{(1+x)^{2n}}{2+x} \Rightarrow \int_{-1}^{0} f_0'(x)dx = \int_{-1}^{0} \Psi_n(x)dx + \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx$

$\Leftrightarrow f_0(0) - f_0(-1) = \sum_{i=0}^{2n-1}\left[\frac{(-1)^i}{1+i}(1+x)^{i+1}\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx$

$\Leftrightarrow f_0(0) = \sum_{i=0}^{2n-1} \frac{(-1)^i}{1+i} + \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx$

$\Leftrightarrow f_0(0) = \sum_{i=1}^{2n} \frac{(-1)^{i+1}}{i} + \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx$.

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_0(0) = U_n + \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx.$$

b. Déduction de la limite

D'après la partie C\2., $\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{0} \frac{(1+x)^{2n}}{2+x}dx = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = f_0(0) = ln2$. $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = \ln 2}$