ANNÉE SCOLAIRE : 2023-2024	DEVOIR SURVEILLÉ DU 1er SEMESTRE	CLASSE : TleD	
LYCÉE DE DZRÉKPO	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	DURÉE : 4 H	COEF : 3

NB : On attachera de l'importance à la rédaction et à la précision des réponses.

Exercice 1 (04,00 points)

Soit le polynôme P défini dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes par :
$P(z) = z^3 - (3+4\mathrm{i})\,z^2 + (-3+7\mathrm{i})\,z + 4$.

1. a) Démontrer qu'il existe un nombre imaginaire pur solution de l'équation $P(z) = 0$. **(0,75 pt)**

   b) Calculer $P(1+\mathrm{i})$. **(0,5 pt)**
2. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **(0,5 pt)**
3. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+\mathrm{i}$, et $2+2\mathrm{i}$.
   Soit $\mathcal{S}$ la similitude directe plane qui transforme A en B et B en C.

   a) Déterminer l'écriture complexe de $\mathcal{S}$. **(0,5 pt)**

   b) En déduire les éléments caractéristiques de $\mathcal{S}$. **(0,75 pt)**

   c) Écrire le nombre complexe $u = (1+\mathrm{i})\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)$ sous forme exponentielle. **(0,5 pt)**

   d) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. **(0,25 pt×2 = 0,5 pt)**

Exercice 2 (06,00 points)

Soit φ la fonction définie sur $I = \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $\varphi(x) = 1 - \sin x$.

1. a) Montrer que la fonction φ est dérivable sur I puis calculer sa dérivée. **(0,5 pt×2 = 1 pt)**

   b) Montrer que la fonction φ admet une bijection réciproque φ^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera. **(1 pt)**

   c) Déterminer le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}$ de φ^{-1}. **(0,5 pt)**
2. a) Calculer $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$. En déduire la valeur exacte de $\left(\varphi^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right)$. **(0,25 pt + 0,5 pt = 0,75 pt)**

   b) Montrer que : $\forall\, x \in \mathscr{D}$, $\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x(2-x)}}$. **(0,75 pt)**
3. Soit la fonction f définie sur I par $f(x) = \varphi(x) - x$.

   a) Montrer que f est dérivable sur I. **(0,5 pt)**

   b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans l'intervalle I. **(0,5 pt)**

   c) Justifier que $\varphi(\beta) = \beta$. **(0,25 pt)**
4. a) Montrer que : $\forall\, x \in I$, $|\varphi'(x)| \leq 1$. **(0,25 pt)**

   b) En déduire que : $\forall\, x \in I$, $|\varphi(x) - \beta| \leq |x - \beta|$. **(0,5 pt)**

Problème (10,00 points)

Partie A

Soit u la fonction définie par : $u(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Étudier les variations de u.
2. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que : $-\dfrac{4}{5} < \alpha < -\dfrac{2}{3}$.
3. En déduire le signe de $u(x)$ pour tout réel x.

Partie B

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x - 1}{x - 1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

On désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0 puis donner une interprétation graphique des résultats obtenus.
3. a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $u(x)$ pour tout réel $x < 0$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ et préciser le sens de variation de f sur $]-\infty; 0[$.
4. a) Montrer que : $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}$.
   b) En déduire le signe de $f'(x)$ et préciser le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.
5. a) Calculer les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$.
   b) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   c) Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C}_f)$.
6. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{2}\left(3\alpha + 1 - \dfrac{3}{\alpha - 1}\right)$ et que $\dfrac{2}{15} < f(\alpha) < \dfrac{2}{5}$.
7. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$. On prendra $2\,cm$ pour l'unité graphique ; $\alpha \approx -0,6$ et $f(\alpha) \approx 0,4$.

Partie C

Soit g la restriction de f sur $]0; +\infty[$.

1. Démontrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} de $]0; +\infty[$ vers un intervalle I à préciser.
2. Étudier la dérivabilité de g^{-1} sur son ensemble de définition I.
3. Tracer la courbe représentative $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ de g^{-1} dans le même repère que $(\mathscr{C}_f)$.
4. Expliciter $g^{-1}(x)$, $\forall\, x \in I$.