| ANNÉE SCOLAIRE : 2020-2021 | DEVOIR SURVEILLÉ DU 2ème SEMESTRE | CLASSE : $T^{le}C_4$ | |
|---|---|---|---|
| LYCÉE DE DZRÉKPO | **MATHÉMATIQUES** | DURÉE : 4 H | COEF : 5 |

**Exercice 1 (04 points)**

***Les parties I et II sont indépendantes.***

I/ Soit $n$ un entier naturel.

1. Montrer que si un entier naturel $d$ divise $12n+7$ et $3n+1$ alors il divise 3. **(0,5 pt)**
2. En déduire que la fraction $\dfrac{12n+7}{3n+1}$ est irréductible. **(0,5 pt)**

II/ Dans un système de numération en base $b$, on considère les nombres : $A = \overline{211}^{b}$ ; $B = \overline{312}^{b}$ et $C = \overline{133032}^{b}$.

1. Justifier que $b > 3$. **(0,25 pt)**
2. a) Sachant que $A \times B = C$, montrer que : $b^3 - 3b^2 - 2b - 8 = 0$. **(1 pt)**
   b) En déduire que $b$ divise 8. **(0,25 pt)**
   c) Déterminer alors $b$. **(0,5 pt)**
3. L'écriture d'un nombre dans le système décimal est 214. Écrire ce nombre dans la base 4. **(0,25 pt)**
4. On suppose que $b = 4$. Écrire $A$, $B$ et $C$ dans le système décimal. **(0,75 pt)**

**Exercice 2 (03,5 points)**

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ et $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}\right)$.
   a) Démontrer que $(O;\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthogonormé du plan. **(0,5 pt)**
   b) Démontrer que, si un point $M$ de $\mathscr{P}$ a pour coordonnées $(x;y)$ dans $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et $(X;Y)$ dans $(O;\vec{u},\vec{v})$ , alors : $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ et $Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$. **(0,5 pt)**
2. Soit $(\Gamma)$ l'ensemble des points des points $M$ du plan dont les coordonnées vérifient, dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ , l'équation (1) : $13x^2 + 13y^2 - 10xy - 72 = 0$.
   a) Démontrer que l'équation (1) est équivalente à l'équation : $4(x+y)^2 + 9(x-y)^2 - 72 = 0$. **(0,5 pt)**
   b) Démontrer qu'une équation de $(\Gamma)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est : $\dfrac{\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2}{3^2} + \dfrac{\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{2^2} = 1$. **(0,5 pt)**
   c) En déduire une équation de $(\Gamma)$ dans le repère $(O;\vec{u},\vec{v})$ . **(0,25 pt)**
   d) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\Gamma)$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ . **(1,25 pt)**

**Problème (12,5 points)**

**Partie A**

Soit $f$ la fonction de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^{2x}+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \dfrac{-\ln(1-x)}{2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Soit $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

1. Étudier la continuité de $f$ en 0. **(0,25 pt)**
2. Calculer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$. **(0,5 pt)**
3. Justifier que $f$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $[0;+\infty[$. Donner la valeur de la dérivée à droite de 0. **(0,5 pt)**
4. Soit $\mu$ un réel strictement négatif. On considère la fonction $u$ définie sur $]-\infty;0[$ par :

$$u(x) = \left(\frac{\ln(1-\mu)+\mu}{\mu^2}\right)x^2 - \ln(1-x) - x.$$

***Proposition*** *: Si $\varphi$ est une fonction continue et non constante sur un intervalle $[a;b]$, alors il existe un réel $c$ appartenant à $]a;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.*

a) En utilisant la proposition précédente, montrer qu'il existe un réel $c \in ]\mu; 0[$ tel que :
$$\frac{\ln(1-\mu)+\mu}{\mu^2} = \frac{1}{2(c-1)}. \textbf{ (0,5 pt)}$$
b) Prouver que : $\lim\limits_{\mu \to 0} \dfrac{\ln(1-\mu)+\mu}{\mu^2} = -\dfrac{1}{2}$. **(0,25 pt)**

c) Prouver que $f$ est dérivable à gauche en 0 et donner la valeur de la dérivée à gauche en 0. **(0,25 pt)**

d) La fonction $f$ est-elle dérivable en 0 ? **(0,25 pt)**

5. a) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$. En déduire le sens de variation de $f$ sur $[0; +\infty[$. **(0,5 pt)**

b) Pour $x \leq 0$, on pose $v(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.
Établir le tableau de variation de la fonction $v$. En déduire le signe de $v(x)$ pour $x \leq 0$. **(0,5 pt)**

c) Pour $x < 0$, calculer $f'(x)$ puis déterminer son signe. **(0,25 pt)**

d) Dresser le tableau de variation de $f$. **(0,25 pt)**

6. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$. **(0,5 pt)**

**Partie B**

1. Justifier que $f$ possède des primitives sur $[0; +\infty[$. **(0,25 pt)**

2. Soit la fonction $G$ définie sur $I = \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = \displaystyle\int_0^{\ln(\tan x)} f(t)dt$.

a) Calculer $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $G'(x)$ pour tout $x$ de $I$. **(0,5 pt)**

b) Prouver que : $\forall\, x \in I$, $G(x) = x - \dfrac{\pi}{4}$. **(0,25 pt)**

c) Soit $\beta$ un réel positif. On suppose qu'il existe d'un unique réel $\alpha$ de $I$ tel que : $\beta = \ln(\tan \alpha)$.
Calculer, en $cm^2$, l'aire $\mathcal{A}(\beta)$ de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathscr{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \beta$ puis calculer $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \mathcal{A}(\beta)$, sachant que si $\beta \to +\infty$ alors $\alpha \to \dfrac{\pi}{2}$. **(0,5 pt)**

**Partie C**

Soit $g$ la restriction de $f$ sur $[0; +\infty[$.

1. a) Montrer que $g$ réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle $J$ que l'on déterminera. **(0,5 pt)**

b) Tracer, dans le repère précédent, la courbe $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ représentative de $g^{-1}$. **(0,25 pt)**

c) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x$ de $J$. **(0,25 pt)**

2. Pour tout entier naturel non nul $n$, on considère les fonctions $h_n$ et $k_n$ définies sur $]-\infty; 0[$ par :
$$h_n(x) = \int_1^{f(x)} t\,(\ln t)^n\,dt \quad \text{et} \quad k_n(x) = \int_1^{f(x)} t^n\,(\ln t)\,dt.$$
a) Calculer $h_1(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h_1(x)$. **(0,5 pt)**

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 1$ :
$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\Big[f(x)\Big]^2 \Big[\ln\Big(f(x)\Big)\Big]^{n+1} - \frac{n+1}{2} h_n(x) \textbf{ (0,5 pt)}$$
$$k_n(x) = \frac{1}{n+1}\Big[f(x)\Big]^{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\Big[\Big(f(x)\Big)^{n+1} - 1\Big]. \textbf{ (0,5 pt)}$$
c) Montrer par récurrence sur $n \geq 1$, que la fonction $h_n$ admet en $-\infty$ une limite finie non nulle $\delta_n$. **(0,25 pt)**
Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\delta_n = (-1)^n \dfrac{n!}{2^{n+1}}$. **(0,5 pt)**

d) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} k_n(x) = \dfrac{1}{(n+1)^2}$. **(0,25 pt)**

**Partie D**

*Dans cette partie, on se propose de calculer la limite de la suite $(S_n)$ définie ci-dessous.*

Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ et $S_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} u_k = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

On définit la fonction $\Phi$, dérivable sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et dont la fonction dérivée est continue sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :
$$\begin{cases} \Phi(t) = \dfrac{\frac{t^2}{\pi} - t}{\sin t} & \text{si } t \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \Phi(0) = -1 \end{cases}$$

1. Sans calculer $\Phi'(t)$, justifier l'existence d'un réel $M$ tel que : $|\Phi'(t)| \leq M$, $\forall t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. **(0,25 pt)**

2. Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(t) \sin\Big((2n+1)t\Big)\, dt$.

   a) En intégrant par parties, montrer que : $I_n = -\dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(t) \cos\Big((2n+1)t\Big)\, dt$. **(0,5 pt)**

   b) Montrer alors que : $|I_n| \leq \dfrac{1}{2n+1}\left(1 + \dfrac{\pi}{2}M\right)$ et en déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I_n = 0$. **(0,5 pt)**

3. Soit $x$ un réel de $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et soit $n$ un entier non nul.

   a) Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{2ikx}$ en fonction de $n$ et $x$ (où $i$ est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$). **(0,5 pt)**

   b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \dfrac{\sin\left((2n+1)t\right)}{2\sin t} - \dfrac{1}{2}$. **(0,25 pt)**

4. a) A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t^2}{\pi} - t\right) \cos(2kt)\, dt = \frac{1}{4}k^2$. **(0,5 pt)**

   b) Établir que : $S_n = 2I_n + \dfrac{\pi^2}{6}$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} S_n$. **(0,5 pt)**