MATIÈRE: MATHÉMATIQUES

SERIE: C_4,E

PROPOSITION DE CORRIGÉ TYPE

ANNÉE SCOLAIRE: 2020 - 2021

SUJET

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE	BACCALAUREAT 2021	Durée : 4 H
	MATHEMATIQUES	Coef. : 4
OFFICE DU BACCALAUREAT	SERIES CE	

SESSION NORMALE

Exercice 1 (3 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). A tout point M d'affixe $z = x + iy$ ($(x, y) \in IR^2$), on associe le point P d'affixe $z - 1$ et le point Q d'affixe z^2.

1- Déterminer les nombres complexes z pour lesquels P et Q sont confondus. (0,5 pt)

2- Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que les trois points distincts M, P et Q soient alignés. (0,5 pt)

3- Prouver que l'ensemble (F) des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ soient orthogonaux est d'équation $x^2 - y^2 - x + 1 = 0$. (0,5 pt)

4- Après avoir donné les éléments caractéristiques de (F), représenter (F) dans le repère (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). (Unité graphique : 2 cm). (1,5 pts)

Exercice 2 (4 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{1-x} - \ln x$.

1-a/ Etudier le sens de variation de f. (0,5 pt)

b/ Calculer la limite de $xf(x)$ quand x tend vers 0. (0,25 pt)

c/ Pour $x \in]0; 1[$, calculer $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$ et montrer que : $\lim_{x \to 0} F(x) = e$. (0,75 pt)

2- Soit n un entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right).$$

a/ Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n - 1$,

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right).$$ (0,5 pt)

b/ En déduire que :

$$S_n - \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n} \text{ puis } F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right).$$ (0,5 pt)

3-a/ Déduire des questions précédentes que S_n admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et calculer cette limite. (0,25 pt)

b/ Etablir les égalités : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\left(1-\frac{k}{n}\right)} = \frac{e-1}{n\left(e^{\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)}$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$. (0,5 pt)

c/ Utiliser ces résultats pour démontrer que :

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$ et en déduire la limite de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ quand n tend vers $+\infty$. (0,75 pt)

Problème (13 points)

A- Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{\imath},\vec{\jmath}$). a et b sont deux nombres réels donnés, T est l'application affine de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x,y)$ associe le point $M'(x',y')$ avec $\begin{cases} x' = x \\ y' = ax + by + a \end{cases}$

1- Déterminer l'expression analytique de ToT. (0,25 pt)

2-a/ Donner la nature et les éléments caractéristiques de T dans les cas particuliers suivants : (0,5 pt)

i/ $(a\,;b) = (0\,;-1)$.

ii/ $b = 0$ et $a \neq 0$.

b/ Montrer que si $a = 0$ et $b \in IR \setminus \{-1\,;0\,;1\}$ alors T est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques. (0,5 pt)

3-a/ A quelle condition doivent satisfaire les réels a et b pour que T soit involutive? (0,5 pt)

b/ Déterminer l'ensemble (J) des points de $\mathcal{P}$ invariant par T. Déterminer la nature de (J) suivant les valeurs de a et b. (0,75 pt)

c/ Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T lorsque $b = -1$? (0,5 pt)

4- On suppose que les réels a et b sont tels que T est bijective et que l'ensemble (J) des points invariants est une droite. Soit M_0 un point de $\mathcal{P}$ n'appartenant pas à (J) et M un point de $\mathcal{P}$ distinct de M_0.

a/ Montrer que les droites (J), (M_0M) et $(M_0'M')$ sont concourantes ou parallèles (on distinguera les cas où (M_0M) et (J) se coupent ; (M_0M) et (J) sont parallèles, (M_0M) est parallèle à l'axe (Oy)). (1.pt)

b/ Pout tout point M du plan, en déduire une construction géométrique simple de M' connaissant (J), M_0 et M_0'.

(On supposera d'abord que la droite (M_0M) n'est pas parallèle à (Oy)). (0,5 pt)

5-a/ Déterminer l'expression analytique de T sachant que $M_0(3;\,-2)$, $M_0'(3;\,1)$ et (J) est la droite d'équation $y = x + 1$. (0,5 pt)

b/ Vérifier que dans ce cas T est bijective et construire géométriquement l'image M_1' du point $M_1(-1;2)$ puis l'antécédent de M_1 par T. (0,75 pt)

c/ M étant un point quelconque de $\mathcal{P}$, H son projeté sur (J) parallèlement à (Oy). Vérifier que $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{HM}$ puis donner la nature et les éléments caractéristiques de T. (0,5 pt)

B- On suppose les réels a et b donnés ; b étant différent de 0, et t la translation de vecteur $-\vec{\imath}$. f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, (C) est la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le repère (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

1- Montrer que si f est telle que $T(C) = t(C)$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = ax + bf(x) + a$.
En déduire que si f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée seconde f'' satisfait à la condition : $\forall n \in \mathbb{N}, f''(n) = b^n f''(0)$. (0,75 pt)

2- β désignant un réel positif non nul. Déterminer les fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = g''(0)e^{\beta x}$ puis $g(x+1)$. (0,5 pt)

3- Dans cette question, on suppose $b > 0$ et on se propose de déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable et satisfaisant à la condition :

(I) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = ax + bf(x) + a$ et $f''(x) = f''(0)e^{x\ln b}$.
En utilisant les résultats de la question B-2-, montrer que les fonctions f solutions sont telles que :

a/ si $b = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{2}x + f(0)$. (0,5 pt)

b/ si $b \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{f''(0)}{(\ln b)^2}b^x + \frac{a}{1-b}x - \frac{ab}{(1-b)^2}$ puis

$f(x) = \frac{a}{1-b}x - \frac{ab}{(1-b)^2}(1 - b^x) + f(0)b^x$. (0,75 pt)

4- Soit la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x - 1 + 2e^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$.

a/ Montrer que f_1 satisfait à la condition (I) et préciser les valeurs de a et b. (0, 5 pt)

b/ Etudier les variations de f_1 puis tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathcal{T}_1$ de f_1. (1,5 pts)

C- a, b étant deux réels donnés, on définit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par son premier terme U_0 et $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = an + bU_n + a$.

1- Dans cette question on suppose $b \neq 0$. Montrer que :

a/ si $b = 1$, $\forall n \in IN^*$, $U_n = U_0 + \frac{n(n+1)}{2}a$. (0,5 pt)

b/ si $b \neq 1$, $\forall n \in IN^*$, (0,5 pt)

$$U_n = b^n U_0 + a\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)b^k.$$

2- Existe-t-il des valeurs de a et b (que l'on précisera s'il en existe) pour que la suite (U_n) soit :

a/ constante ? (0,25 pt)

b/ une suite arithmétique non constante ? (0,25 pt)

c/ une suite géométrique non constante ? (0,25 pt)

3- Comment faut-il choisir a; b et U_0 pour que la suite (U_n) soit convergente ? Calculer alors sa limite. (0,5 pt)

PROPOSITION DE CORRIGE TYPE

Exercice 1

1. Déterminons les nombres complexes z pour lesquels P et Q sont confondus.

P et Q sont confondus si et seulement si $P = Q$.

$$P = Q \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$$

$$\Delta = -3 \text{ d'où } z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{P \text{ et } Q \text{ sont confondus si et seulement si } z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}}$$

2. Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan tels que les points distincts M, P et Q soient alignés.

M, P et Q étant distincts deux à deux, ils sont alignés si et seulement si $\frac{z_M - z_Q}{z_M - z_P} \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}\frac{z_M - z_Q}{z_M - z_P} \in \mathbb{R}^* &\Leftrightarrow Z - Z^2 \in \mathbb{R}^*.\\ &\Leftrightarrow Z - Z^2 = \bar{Z} - \bar{Z}^2\\ &\Leftrightarrow Z - \bar{Z} - (Z^2 - \bar{Z}^2) = 0\\ &\Leftrightarrow (Z - \bar{Z})(1 - Z - \bar{Z} = 0)\\ &\Leftrightarrow Z - \bar{Z} = 0 \text{ ou } 1 - Z - \bar{Z} = 0\\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } 1 - 2x = 0\\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{Donc } (E) \textit{ est la réunion des droites } (O;\ \vec{u}) \textit{ et } (\Delta): x = \frac{1}{2} \textit{ privée des points}; I(1);\\ O;\ A\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \textit{ et } B\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\end{array}}.$$

3. Prouvons que l'ensemble (F) des points M tels que $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ soient orthogonaux a pour équation : $x^2 - y^2 - x + 1 = 0$.

$$\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0.$$

$\overrightarrow{PM}\binom{1}{0}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} x^2 - y^2 - x + 1 \\ 2xy - y \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 - x + 1 = 0.$

On a alors

$$\boxed{(F): x^2 - y^2 - x + 1 = 0}$$

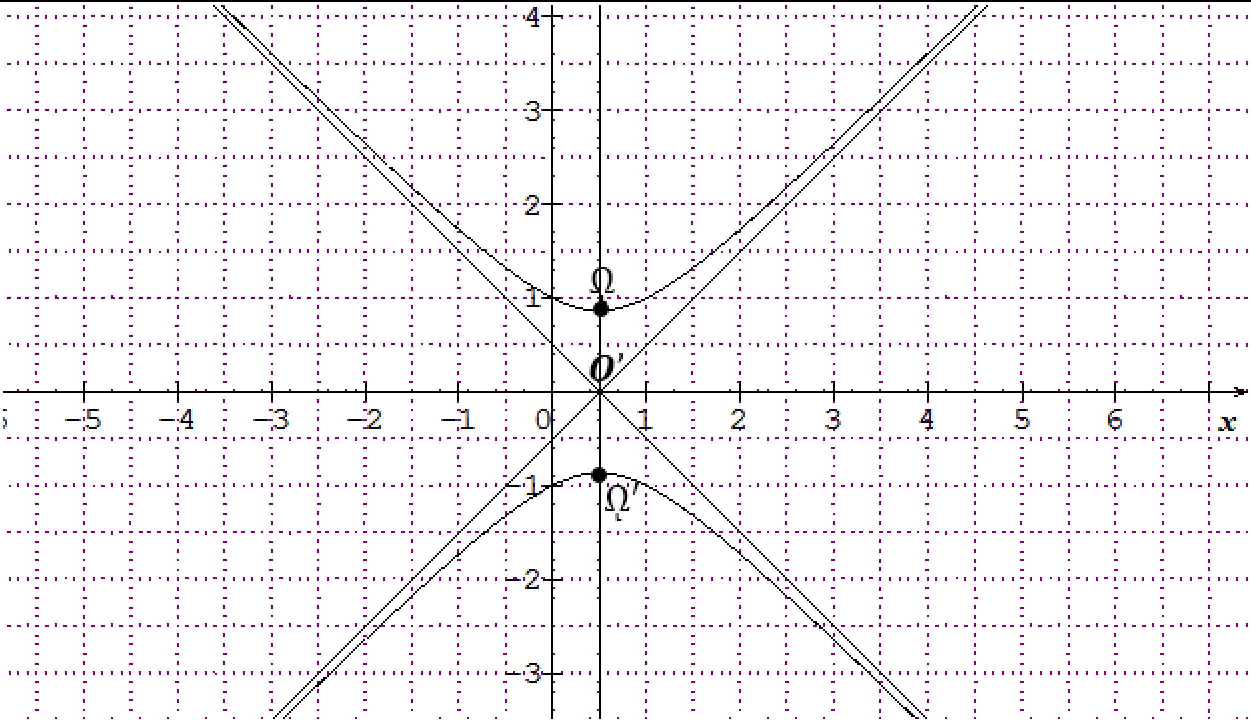
Autre méthode: $\frac{z_Q - z_P}{z_M - z_P} \in i\mathbb{R}^*$.

4. Éléments caractéristiques de (F).

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 - x + 1 = 0 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - y^2 + 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = -\frac{3}{4}\\ &\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}} + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1.\end{aligned}$$

Désignons par O' le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

(F) est alors l'hyperbole équilatère d'axe focal la droite $(O'; \vec{v})$, de centre O', de sommets $\Omega\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\Omega'\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d'asymptotes $(\Delta_1): y = x - \frac{1}{2}$ et $(\Delta_2): y = -x + \frac{1}{2}$, d'excentricité $e = \sqrt{2}$, de foyers $F\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ et $F'\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.



Exercice 2

$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = e^{1-x} - \ln x$

1. a. Sens de variation de f.

   f est dérivable sur $]0;+\infty[$.

$$\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f'(x) = -e^{1-x} - \frac{1}{x}}$$

$\forall x \in]0;+\infty[\,, f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

b. Limite en 0 de $xf(x)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} xf(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (xe^{x} - x\ln x)$

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} xe^{1-x} = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} xf(x) = 0}$.

c. $x \in]0;1[$, calculons $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$.

$F(x) = \int_x^1 (e^{1-t} - \ln t)dt = [-e^{1-t}]_x^1 - \int_x^1 \ln t dt$.

Posons $\begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = \ln t \end{cases}$ on a $\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$

$F(x) = [-e^{1-t}]_x^1 - [t\ln t]_x^1 - \int_x^1 dt = -1 + e^{1-x} + x\ln x + 1 - x$.

Donc

$$\boxed{F(x) = e^{1-x} + x\ln x - x}$$

- Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = e$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (e^{1-x} + x\ln x - x)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} xe^{1-x} = e$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x\ln x - x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} F(x) = e$.

2. $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)$.

   a. Montrons que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

f est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc sur $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$ car $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right] \subset]0; +\infty[$.

Donc on a: $\forall t \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$, $f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(t) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$.

En intégrant (ou d'après l'inégalité de la moyenne), on a:

$$\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Ainsi, $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

   b. Déduisons que $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n}$.

En utilisant 2.a. , on a : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \Leftrightarrow S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq S_n - \frac{1}{n} f(1)$$

$$\Leftrightarrow S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n} \text{ car } f(1) = 1.$$

- Déduisons que $F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a : $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq F\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n} \Leftrightarrow -F\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq -S_n \leq -\frac{1}{n} - F\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ainsi, $\frac{1}{n} + F\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. a. Limite de S_n.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} + F\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \left(F\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = e.$$

D'après le théorème des gendarmes, la limite de S_n existe et $\boxed{\lim_{x \to +\infty} S_n = e}$.

   b. Etablissons l'égalité $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{1-\frac{k}{n}} = \frac{e-1}{n\left(e^{\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)}$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{1-\frac{k}{n}} = \frac{e}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^k.$$

$\sum_{k=1}^{n} \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^k$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $e^{-\frac{1}{n}}$ et de premier terme $e^{-\frac{1}{n}}$. Donc on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^k = e^{-\frac{1}{n}} \left[\frac{1-\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{-\frac{1}{n}}}\right] = e^{-\frac{1}{n}} \frac{e-1}{e\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)} = \frac{e-1}{e\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}.$$

D'où $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{1-\frac{k}{n}} = \frac{e-1}{n\left(e^{\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)}$.

N B: On pourra remarquer aussi que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{1-\frac{k}{n}}$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $e^{-\frac{1}{n}}$ et de premier terme 1.

Autre méthode: La récurrence.

- Etablissons que : $\frac{1}{n}\sum_1^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{k}{n}\right)$

$= \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^n k}{n^n}\right)$ or $\prod_{k=1}^n k = n!$. Donc $\frac{1}{n}\sum_1^n \ln\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

c. Limite de $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$.

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = e^{1-\frac{k}{n}} - \ln\left(\frac{k}{n}\right).$$
$$S_n = \frac{e-1}{n\left(e^{\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)} - \frac{1}{n}\, ln\left(\frac{n!}{n^n}\right).$$

$$S_n = \frac{e-1}{n\left(e^{\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \frac{e-1}{n\left(e^{\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)} - S_n.$$

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e-1}{n\left(e^{\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e-1}{\frac{\left(e^{\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)}{\frac{1}{n}}} = e-1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = e$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\, ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$.

Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = -1$. Or $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)$. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}}$.

Problème

Partie A $T : \begin{cases} x' = x \\ y' = ax + by + a \end{cases}$.

1. Expression analytique de $T \circ T$.

$$T \circ T : \begin{cases} x' = x \\ y' = ax + b(ax + by + a) + a \end{cases}.$$

Donc $\boxed{T \circ T : \begin{cases} x' = x \\ y' = (a + ab)x + b^2 y + ab + a \end{cases}}$.

2. a. Nature et éléments caractéristiques.

i) $(a, b) = (0;\ -1)$.

$T : \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ d'où

$$\boxed{T\ est\ la\ symétrie\ orthogonale\ d'axe\ (O,\ \vec{\imath})\ \left(T = S_{(O,\vec{\imath})}\right)}.$$

ii) $b = 0$ et $a \neq 0$.

$T : \begin{cases} x' = x \\ y' = ax + a \end{cases}$ et $T \circ T : \begin{cases} x' = x \\ y' = ax + a \end{cases}$.

Comme $T \circ T = T$ alors T est la projection (affinité de rapport $k = 0$) sur (Δ_a): $y = ax + a$ et de direction celle de $\vec{\jmath}$.

b. Montrons que si $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}$-$\{-1; 0; 1\}$ alors T est une affinité.

$$T : \begin{cases} x' = x \\ y' = by \end{cases}.$$

$\boxed{T \text{ est l'affinité orthogonale d'axe } (O,\vec{\imath}) \text{ et de rapport } b}$.

3. a. Condition portant sur a et b pour que T soit involutive.

T est involutive $\Leftrightarrow T \circ T = Id_{\mathcal{P}}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a + ab = 0 \\ b^2 = 1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \ ou \ b = 1 \\ ab + a = 0 \end{cases}$.

Si $b = 1$ on a $a = 0$.
Si $b = -1$, $a \in \mathbb{R}$.

$\boxed{T \text{ est involutive si et seulement si } (a,b) = (0;\ 1) \text{ ou } a \in \mathbb{R} \text{ et } b = -1.}$

b. L'ensemble (J) des point de $\mathcal{P}$ invariants par T.
$M(x;y)$ est invariant par T $\Leftrightarrow T(M) = M$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = ax + by + a \end{cases}$.

Si $b = 1$ et $a = 0$ alors $(J) = \mathcal{P}$.
Si $b = 1$ et $a \neq 0$ alors $(J): x = -1$.
Si $b \neq 1$, $(J): y = \frac{a}{1-b}x + \frac{a}{1-b}$.

c. Nature et éléments caractéristiques lorsque $b = -1$.
$T : \begin{cases} x' = x \\ y' = ax - y + a \end{cases}$. $\qquad T \circ T : \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$.

$\boxed{T \text{ est la symétrie (axiale) d'axe } (J) : y = \frac{a}{2}x + \frac{a}{2} \text{ et de direction celle de } (Oy)}$.

Remarque: T est l'affinité de direction celle de (Oy), d'axe $(J) : y = \frac{a}{2}x + \frac{a}{2}$ et de rapport -1.

4. T est bijective et (J) une droite, $M_0 \in \mathcal{P}$-(J) $M \neq M_0$.

a. Montrons que (M_0M), (J) et $(M_0'M')$ sont soit concourantes, soit parallèles.

- Supposons que (M_0M) et (J) se coupent en un point Ω.
  $\Omega \in (J) \Leftrightarrow T(\Omega) = \Omega$.
  $\Omega \in (M_0M) \Rightarrow T(\Omega) = \Omega \in T(M_0M) = (M_0'M')$.
  Donc $(M_0M), (J)$ et $(M_0'M')$ sont concourantes.

- Supposons que $(M_0M)//(J)$.
  T tansforme (M_0M) et (J) en deux droites parallèles. Or $T(J) = J$. Donc $(M_0'M')//(J)$.
  On en déduit donc que $(M_0M), (J)$ et $(M_0'M')$ sont parallèles.

- $(M_0M)//(O,\vec{\jmath})$.

Dans ce cas (M_0M) est globalement invariante par T. $(M_0'M') = (M_0M)$.
Donc elles sont parallèles ($b = 1$) ou concourantes ($b \neq 1$).

b. Construction géométrique simple de M' connaissant $(J), M_0$ et M_0'.

- (M_0M) et (J) sont sécantes.
  - Comme $x' = x$ alors M' est sur la droite passant par M et parallèle à (Oy).
  - On trace la droite (M_0M) qui coupe (J) en Ω . Puis on trace $(\Omega\, M_0')$ qui coupe la parallèle en M à (Oy) en M'.

- $(M_0M)//(J)$.

On note H le projeté orthogonal de M sur (Ox). On trace la parallèle à (J) passant par M_0'. Cette parallèle coupe (MH) en M'.

5. a. Expression analytique de T.

$M_0(3;\ -2)$, $M_0'(3;1)$

$M_0' = T(M_0) \Rightarrow 1 = 3a - 2b + a.$

$\Rightarrow 4a - 2b = 1.$

$(J) : y = x + 1 \ \Rightarrow \frac{a}{1-b} = 1$

$\Rightarrow a = 1 - b$

Donc $\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a - 2b = 1 \end{cases}$ On a $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{T : \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}(x + y + 1) \end{cases}}$$

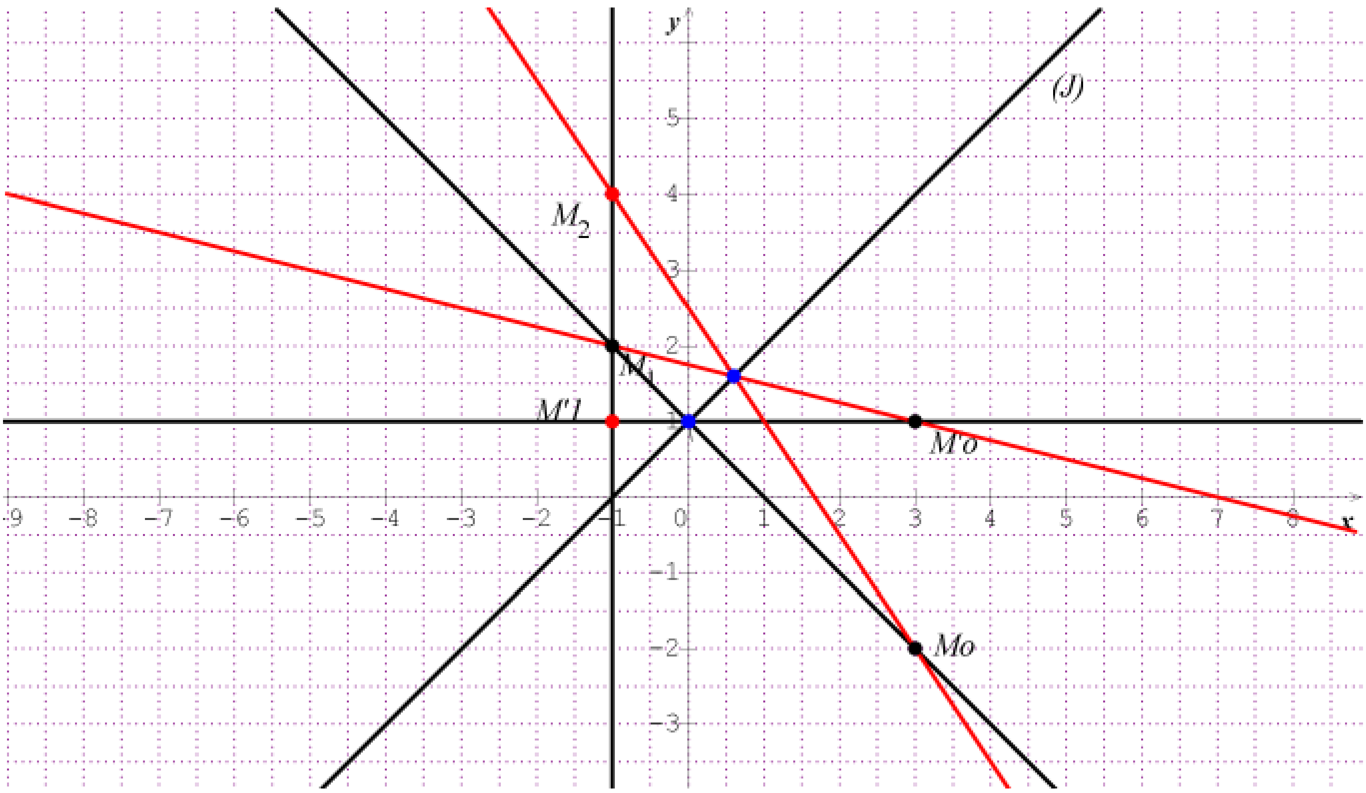
b. Vérifions que T est bijective.

$T : \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases}$. Soit ϕ l'application linéaire associée à T.

dét$(\phi(\vec{\imath}), \phi(\vec{\jmath})) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$.

dét$(\phi(\vec{\imath}), \phi(\vec{\jmath})) \neq 0$ donc T est bijective.

Construction de $M_1' = T(M_1)$ et M_2 avec $M_1(-1;2)$ et $M_1 = T(M_2)$.



c. Vérifions que $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$.

$T : \begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \end{cases}$, $(J) : y = x + 1.$

$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $H \in (J) \Rightarrow H\begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{HM'} = (x'-x)\vec{\imath} + (y'-x-1)\vec{\jmath} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - x - 1\right)\vec{\jmath} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right)\vec{\jmath}$.

$\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}(-x+y-1)\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{HM} = (y-x-1)\vec{\jmath}$. Donc $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{HM}$.

T est l'affinité de direction celle de (Oy), d'axe $(J) : y = x+1$ et de rapport $\frac{1}{2}$.

Partie B

$b \neq 0$ donc T est bijective ; $t = t_{-\vec{\imath}}$; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. (C) : y = f(x)$.

1. Montrons que si f est telle que $T(C) = t(C)$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = ax + bf(x) + a$.

$$t : \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x = x' + 1 \\ y = y' \end{cases}.$$

On a :

$$\boxed{t(C) : y = f(x+1)}.$$

$$T : \begin{cases} x' = x \\ y' = ax + by + a \end{cases}.$$

Soit $M(x; f(x)) \in (C)$. On a $T(M)\begin{pmatrix} x \\ ax+bf(x)+a \end{pmatrix}$.

Donc

$$\boxed{T(C) : y = ax + bf(x) + a}$$

Par suite, $T(C) = t(C) \Leftrightarrow f(x+1) = ax + bf(x) + a$.

- Déduisons que $\forall n \in \mathbb{N},\ f''(n) = b^n f''(0)$.

On a : $f(x+1) = ax + bf(x) + a$ donc $f''(x+1) = bf''(x)$.

Ainsi
$$f''(1) = bf''(0)$$
$$f''(2) = bf''(1)$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$f''(n) = bf''(n-1).$$

En multipliant membre à membre les égalités obtenues et en simplifiant on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f''(n) = b^n f''(0).$$

Autre méthode: Par récurrence.

2. $\beta > 0$, déduisons g telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = g''(0)e^{\beta x}$ puis $g(x+1)$.

$$g''(x) = g''(0)e^{\beta x} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{g''(0)}{\beta}e^{\beta x} + c_1$$
$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{g''(0)}{\beta^2}e^{\beta x} + c_1 x + c_2.$$
$$\Leftrightarrow g(x+1) = \frac{g''(0)}{\beta^2}e^{\beta x} + c_1(x+1) + c_2.$$

$$\boxed{g(x+1) = \frac{g''(0)}{\beta^2}e^{\beta}.e^{\beta x} + c_1 x + c_1 + c_2 \quad avec \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2}$$

3.

$(I) :\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = ax + bf(x) + a$ et $f''(x) = f''(0)e^{x\ln b}$, $b > 0$.

Montrons que les fonctions f sont telles que :

a. Si $b = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{2}x + f(0)$.

$$f''(x) = f''(0) \Rightarrow f'(x) = f''(0)x + c_1$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}f''(0)x^2 + c_1 x + c_2\ ,\ (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Or $f(x+1) = ax + f(x) + a$.

Donc $\frac{1}{2}f''(0)(x+1)^2 + c_1 x + c_1 + c_2 = ax + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + c_1 x + c_2 + a$.

Par identification, on a:

$$\begin{cases} f''(0) + c_1 = a + c_1 \\ \frac{1}{2}f''(0) + c_1 + c_2 = c_2 + a \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} f''(0) = a \\ c_1 = \frac{a}{2} \end{cases}.$$

Comme $f(0) = c_2$, alors $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{2}x + f(0)$.

b. Si $b \neq 1$.

On a d'après la **Partie** B. 2., $f(x) = \frac{f''(0)}{(lnb)^2}b^x + c_1x + c_2$ et $f(x+1) = \frac{f''(0)}{(lnb)^2}b^{x+1} + c_1x + c_1 + c_2$.

Or $f(x+1) = ax + bf(x) + a$. Donc $f(x+1) = ax + \frac{f''(0)}{(lnb)^2}b^{x+1} + bc_1x + bc_2 + a$.

Par identification, on a:

$$\begin{cases} c_1 = a + bc_1 \\ c_1 + c_2 = bc_2 + a \end{cases}. \text{ Donc } \begin{cases} c_1 = \frac{a}{1-b} \\ c_2 = \frac{-ab}{(1-b)^2} \end{cases} \text{ et donc } f(x) = \frac{f''(0)}{(lnb)^2}b^x + \frac{a}{1-b} - \frac{ab}{(1-b)^2}.$$

Par ailleurs, on a $f(0) = \frac{f''(0)}{(lnb)^2} - \frac{ab}{(1-b)^2}$. Donc $\frac{f''(0)}{(lnb)^2} = f(0) + \frac{ab}{(1-b)^2}$.

D'où $f(x) = \frac{a}{1-b}x - \frac{ab}{(1-b)^2}(1 - b^x) + f(0)b^x$.

4. $f_1(x) = x - 1 + 2e^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$.

a. Montrons que f_1 satisfait à la condition (I).

On a : $f_1(x+1) = x + e^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$.

$ax + bf_1(x) + a = ax + bx - b + 2be^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + a$.

Par identification, on a : $\begin{cases} a + b = 1 \\ 2b = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$. D'où $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$.

$f_1'(x) = 1 + 2ln\left(\frac{1}{2}\right)e^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \implies f_1''(x) = 2\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 e^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$. Or $f_1''(0) = 2\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2$.

Donc $f_1''(x) = f_1''(0)e^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$. D'où f_1 vérifie la condition (I) avec $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{2}$.

b. Etudions les variations de f_1.

$$f_1'(x) = 1 + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right)e^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{aligned} f_1'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow e^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{1}{2\ln 2} \\ &\Leftrightarrow x\ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq -\ln(\ln 4) \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{\ln(\ln 4)}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in \left]-\infty; \frac{\ln(\ln 4)}{\ln 2}\right]$, $f_1'(x) \leq 0$ d'où f_1 est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \frac{\ln(\ln 4)}{\ln 2}\right]$.

$\forall x \in \left[\frac{\ln(\ln 4)}{\ln 2} ; +\infty\right[$, $f_1'(x) \geq 0$ donc f_1 est strictement croissante sur $\left[\frac{\ln(\ln 4)}{\ln 2} ; +\infty\right[$.

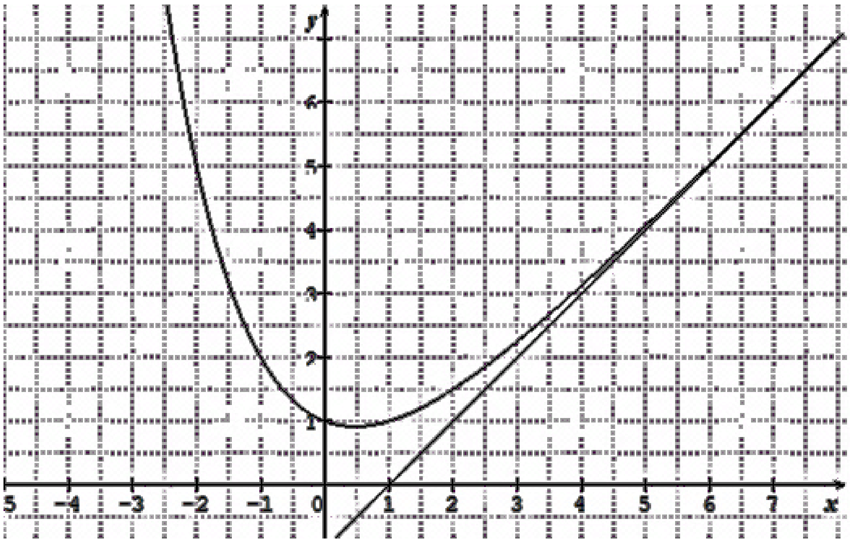
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = +\infty}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$		$\frac{ln(ln4)}{ln2}$		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f_1\left(\frac{ln(ln4)}{ln2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f_1\left(\frac{\ln(\ln 4)}{\ln 2}\right) = \frac{\ln(\ln 4)}{\ln 2} - 1 + \frac{2}{\ln 4} \approx 0{,}9; \qquad \frac{\ln(\ln 4)}{\ln 2} \approx 0{,}5.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (2e^{x\ln\left(\frac{1}{2}\right)}.) = 0.$ Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe de f_1.
$\lim\limits_{x\to-\infty} (\frac{f_1(x)}{x}) = -\infty$ donc la courbe $\mathcal{T}_1$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ en $-\infty$.



Partie C

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = an + U_n + a$.

1. $b \neq 0$.

   a. Montrons que si $b = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = U_0 + \frac{n(n+1)}{2}a$.

   On a $U_{n+1} = an + U_n + a$.

En faisant varier n, on a: $U_1 = U_0 + a$

$U_2 = a + U_1 + a$

$U_3 = 2a + U_2 + a$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$U_n = a(n+1) + U_{n-1} + a$.

La somme membre à membre donne après simplification, $U_n = U_0 + a + 2a + 3a + \cdots + na$
$= U_0 + a(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$.

Donc $U_n = U_0 + \frac{n(n+1)}{2}a$.

__Autre méthode__**:** Par récurrence.

   b. Montrons que $b \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = b^n U_0 + a\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\, b^k$.

   - Pour $n = 1$, on a : $U_1 = U_0 + a$.
     $U_1 = b^0 U_0 + a(1-0)b^0$.

Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

- Supposons que pour un entier naturel $p \geq 1$, $U_p = b^p U_0 + a\sum_{k=0}^{p-1}(p-k)\,b^k$.

  On a:

  $U_{p+1} = ap + U_p + a$

  $= ap + b^{p+1}U_0 + a\sum_{k=0}^{p-1}(p-k)\,b^{k+1} + a$

  $= b^{p+1}U_0 + a\sum_{k=1}^{p}(p+1-k)\,b^k + (p+1)a$.

  $U_{p+1} = b^{p+1}U_0 + a\sum_{k=0}^{p}(p+1-k)\,b^k$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = b^n U_0 + a\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,b^k$.

Autre méthode: On peut utiliser la définition et écrire successivement $U_n, U_{n-1}, U_{n-2}, \cdots, U_3, U_2, U_1$.

En multipliant U_{n-1} par b, U_{n-2} par b^2, $\cdots$, U_{n-p} par $b^p, \cdots$ et en additionnant membre à membre les différentes égalités on trouve le résultat.

2. Existence des valeurs de a et b pour que la suite (U_n) soit:

   a. Constante.

   (U_n) est constante si et seulement si $a = 0$ et $b = 1$ $(U_{n+1} = U_n = U_0)$ ou $a = 0$ et $b = 0$ si $U_0 \neq 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = 0$. (U_n) est constante à partir du rang 1.

   b. Une suite arithmétique non constante.

   (U_n) est arithmétique non constante si et seulement si $b = 0$ et $a \neq 0$.
   Dans ce cas, la suite est arithmétique à partir du rang 1 si $U_0 \neq 0$, mais si $U_0 = 1$, elle est arithmétique à partir du 1er rang (et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = an$, la raison de la suite est a).

   c. Une suite géométrique non constante.

   (U_n) est géométrique non constante si et seulement si $a = 0$ et $b \in \mathbb{R}$-$\{0;1\}$.
   La raison de la suite est b.

3. Choix de $a, b\ et\ U_0$ pour que la suite (U_n) converge.

- Si $a = 0$ et $b = 1$, la suite (U_n) est constante et elle converge vers U_0.
- Si $a = b = 0$ et $U_0 = 0$ alors (U_n) est constante et converge vers 0.
- Si $a = b = 0\ et\ U_0 \neq 0$, la suite est constante à partir de U_1 $(U_1 = 0)$, elle converge vers 0.
- Si $a = 0, b \neq 0$ et $|b| < 1$, (U_n) converge vers 0.