ANNÉE SCOLAIRE : 2021-2022	DEVOIR SURVEILLÉ DU 1er SEMESTRE	CLASSE : T$^{\text{le}}$C$_4$	
LYCÉE DE DZRÉKPO	ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES	DURÉE : 4 H	COEF : 5

Exercice 1 (7 points)

I/ 1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$. **(0,5 pt)**

2. En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2n}\right)$. **(0,5 pt)**

3. On pose : $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$. **(0,5 pt)**

II/ 1. a) Résoudre l'équation : $z \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R};\ z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$. **(0,5 pt)**

b) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation : $\begin{cases} z \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^* \\ z^{2n} - 2z^n\cos\theta + 1 = 0 \end{cases}$ **(0,5 pt)**

2. On pose : $P_\theta(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\theta + 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \theta \in \mathbb{R}$ et que $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} Z_k = Z_0 \times Z_1 \times Z_2 \times \ldots \times Z_{n-1}$.

a) Calculer $P_\theta(1)$. **(0,25 pt)**

b) Montrer que si z_0 est un zéro de $P_\theta(z)$ alors $\overline{z_0}$ l'est aussi. **(0,25 pt)**

c) Montrer que : $P_\theta(z) = \left(z^n - e^{i\theta}\right)\left(z^n - e^{-i\theta}\right)$. **(0,5 pt)**

En déduire que : $P_\theta(z) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left[z - e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right]\left[z - e^{-i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}\right]$. **(0,5 pt)**

d) En déduire que : $P_\theta(z) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right]$. **(0,5 pt)**

Puis montrer que : $P_\theta(1) = 2^{2n}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\theta}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)$. **(0,5 pt)**

e) En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\theta}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4^{n-1}}$. **(0,5 pt)**

3. On pose : $R_n(\theta) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\theta}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)$, où $\theta \in]0;\pi[$ et $n \geq 2$.

a) Montrer que : $R_n(\theta) = \dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2^{n-1}\sin\left(\frac{\theta}{2n}\right)}$. **(0,5 pt)**

b) Calculer $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} R_n(\theta)$. En déduire que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$. **(0,5 pt×2)**

Exercice 2 (3 points)

Dans l'espace affine euclidien orienté $\mathscr{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on donne les points $A\begin{pmatrix}1+a\\ b-1\\ c\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}a-1\\ b+1\\ c\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}a-2\\ b\\ 1+c\end{pmatrix}$ où a, b et c sont des réels. On désigne par Ω le milieu du segment $[OC]$.

1. a) Déterminer les coordonnées de Ω. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. **(0,25 pt + 0,5 pt)**

b) Déterminer l'ensemble $(\mathscr{P})$ des points M de $\mathscr{E}$ tels que : $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right) = 0$. **(0,5 pt)**

2. Déterminer l'ensemble $(\mathscr{S})$ des points M de $\mathscr{E}$ tels que : $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MC} = 0$. **(0,5 pt)**

3. Dans cette question, on pose $a = b = c$.

a) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $(\mathscr{S}) \cap (\mathscr{P}) \neq \emptyset$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer avec précision $(\mathscr{S}) \cap (\mathscr{P})$ lorsque $a = 1$. **(0,75 pt)**

Problème (10 points)

ABC est un triangle. B' est le point défini par $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$.
Pour tout couple de réels $(\alpha; \beta)$, on définit le point C' par $\overrightarrow{AC'} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.
On considère l'application affine f du plan telle que : $f(A) = A$, $f(B) = B'$ et $f(C) = C'$.

Partie A

1. Montrer que l'expression analytique de f dans le repère (A, B, C) est : $\begin{cases} x' = 2x + \alpha y \\ y' = \beta y \end{cases}$. **(0,5 pt)**
2. L'application affine f est-elle bijective ? **(0,5 pt)**
3. Déterminer suivant les valeurs de α et β, l'ensemble des points invariants par f. **(0,5 pt)**
4. Pour $\beta = 1$, démontrer que f est une affinité dont on précisera les éléments caractéristiques. **(0,75 pt)**

Partie B

On suppose que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A et que $\beta = \alpha$; $\alpha \neq 1$.

1. Écrire l'expression analytique de f dans le repère orthonormé (A, B, C). **(0,25 pt)**
2. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est bijective. **(0,25 pt)**
3. On choisit $\alpha = 0$. On désigne par p la projection orthogonale sur la droite (AB).
   Pour tout point M du plan, on pose $p(M) = M_1$.
   a) Donner l'expression analytique de p dans le repère orthonormé (A, B, C). **(0,25 pt)**
   b) Exprimer $\overrightarrow{Af(M)}$ en fonction de $\overrightarrow{AM_1}$. **(0,5 pt)**
   c) En déduire que f est la composée de p et d'une homothétie h dont on précisera les éléments caractéristiques. **(0,5 pt)**
4. On choisit $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Soit I le milieu du segment $[CC']$, $\mathscr{S}$ la symétrie orthogonale d'axe (AI).
   a) Démontrer que l'expression analytique de $\mathscr{S}$ dans le repère (A, B, C) est : $\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \end{cases}$. **(1,5 pt)**
   b) En déduire l'expression analytique de $g = \mathscr{S} \circ f$. **(0,5 pt)**
   c) Soit $\vec{u} = \left(1 + \sqrt{2}\right)\overrightarrow{AB} - \sqrt{2}\,\overrightarrow{AC}$.
   Démontrer que pour tout point M du plan, les vecteurs $\overrightarrow{Mg(M)}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. **(0,5 pt)**
   d) Soit φ l'application linéaire associée à g.
   Exprimer $\varphi\left(\overrightarrow{AC}\right)$ et $\varphi\left(\vec{u}\right)$ dans la base $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right)$. **(0,25 pt + 0,5 pt)**
   e) En déduire l'expression analytique de g dans le repère $\left(A; \vec{u}, \overrightarrow{AC}\right)$. **(0,25 pt)**
   f) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g. **(0,75 pt)**
5. Dans cette question, $\alpha \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$.
   On considère la suite de points $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $\begin{cases} A_0\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \text{ et } A_n\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} = f(A_n) \end{cases}$
   a) Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et de y_n. **(0,25 pt×2)**
   b) Déterminer y_n en fonction de n, α et y_0. **(0,5 pt)**
   c) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n = 2^n x_0 + y_0 \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k}\alpha^{k+1}$. **(0,75 pt)**