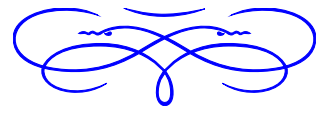


Table des matières

ENONCES DES SUJETS	2
Session de 1983	3
Session de 1984	5
Session de 1985	7
Session de 1986	9
Session de 1987	11
Session de 1988	13
Session de 1989	15
 CORRIGES DES SUJETS	 17
Session de 1983	18
Session de 1984	26
Session de 1985	36
Session de 1986	48
Session de 1987	58
Session de 1988	67
Session de 1989	78



ENONCES DES SUJETS



Sujet 1

Session de 1983

Exercice 1

Soit F la transformation du plan $\mathcal{P}$ associée à l'application f définie de la manière suivante :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

- 1 Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F
- 2 On considère une suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du plan tels que $M_n = F(M_{n-1})$.
 - a Donner une construction géométrique du point $M_2 = F(M_1)$ tel que $M_1 \left(\frac{1}{2} \right)$. Prendre pour unité 2 cm
 - b Calculer les coordonnées du point M_0 .
 - c Donner la nature de la transformation $F^4 = F \circ F \circ F \circ F$ et en déduire les coordonnées du point M_4 .

Exercice 2

Au Niger, une conférence réunit 12 commerçants. Tous parlent haoussa, 5 parlent foulfouldé, 6 parlent zarma 3 foulfouldé et zarma.

On choisit au hasard et simultanément 3 personnes.

Chaque groupe de 3 personnes a la même probabilité d'être choisi.

- 1
 - a Quelle est la probabilité pour que ces 3 personnes parlent au moins une autre langue que le haoussa ?
 - b Quelle est la probabilité pour que ces 3 personnes ne parlent que le haoussa ?
- 2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque groupe de 3 personnes associe le nombre de personnes parlant foulfouldé et zarma.
- 3
 - a Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b Calculer la probabilité pour qu'il ait au moins 2 personnes parlant foulfouldé et zarma.

NB : les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles .

Problème

I. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$$

$$f(0) = 0$$

$$\forall x < 0, \quad f(x) = -x \text{Log}|x|$$

- 1 La fonction f est-elle continue, dérivable au point $x_0 = 0$?
La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
- 2 Étudier les variations de la fonction f
- 3 Soit (C) le graphe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

Démontrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) quand x tend vers $+\infty$.

Que se passe-t-il quand x tend vers $-\infty$?

Donner les équations de demi-tangentes à la courbe (C) au point O d'abscisse $x_0 = 0$.

Soit A le point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe $x'ox$, différent du point O .

Donner l'équation de la tangente en A à (C) .

Construire le graphe (C) de f .

II. Soit E le domaine défini par :
$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$$

Nous nous proposons de calculer l'aire $A(E)$ de ce domaine.

1 Pour cela, calculer auparavant l'aire du domaine E_λ définie par :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq \lambda \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } -1 \leq \lambda \leq 0.$$

2 En déduire l'aire $A(E)$.

III. Soit un point matériel M en mouvement dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont la position à l'instant t est définie par :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{\text{Log}(t)} \\ y = -\frac{t}{\text{Log}(t)} \end{cases} \quad t \in]0, 1[.$$

1 Que fait le point M lorsque t tend vers 0 ?

Au point $t = 0$, on suppose donc que le point M est en $O(0,0)$.

2 Démontrer que pour tout $t \in]0, 1[$, la trajectoire (Γ) du point M est une partie du graphe (C) que l'on précisera.

3 Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ à l'instant t et construire le vecteur $\vec{V}_1(t)$ au point $t_1 = \frac{1}{e}$.

4 Donner l'équation de la tangente D en M_1 à (Γ) à la date t_1 .

Sujet 2

Session de 1984

Exercice 1

Dans un sac, on met un jeton portant le numéro 1, deux jetons portant le numéro 2, trois jetons portant le numéro 3, ..., n jetons portant le numéro n .

- 1 Déterminer que la somme de nn premiers entiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

En déduire le nombre de jetons que l'on a mis dans le sac.

- 2 On suppose que les jetons sont indiscernables au toucher et on tire au hasard un jeton du sac.

Soit k un entier naturel non nul inférieur ou égal à n .

Quelle est, en fonction de n et de k , la probabilité de tirer un jeton dont le numéro soit inférieur ou égal à k ?

- 3 On suppose que $n = 5$. X est la variable aléatoire qui à un tirage fait correspondre le numéro du jeton tiré.

Définir et représenter graphiquement la fonction de répartition de X .

Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 2

- 1 À l'aide d'une intégration par parties, calculer : $I_n = \int_0^{2n} x e^x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que $I_n = 1 - (2n+1)e^{-2n}$.

- 2 On pose $v_n = \frac{1}{2n+1} (1 - I_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

Étudier le sens de variation de la suite (v_n) . La suite (v_n) est-elle convergente?

- 3 On pose $u_n = \text{Log}(v_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Problème

I. Soit F la fonction définie de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ par $F(z) = \frac{z^2}{i(1-z)}$.

- 1 On pose $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que la partie réelle de $F(z)$ est égale à $\frac{y(-x^2-y^2+2x)}{(1-x)^2+y^2}$.

Déterminer la partie imaginaire de $F(z)$.

- 2 Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que $F(z)$ soit imaginaire pur.

Représenter cet ensemble.

II. Soit la fonction définie par $f(x) = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

- 1 Déterminer l'ensemble de définition de f .

- 2 Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = 0$ et en 1.

- 3 Montrer que pour $x \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, $f'(x) = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{(1-x-x^2)}{x(1-x^2)}$.

- 4 a Étudier les variations de f .

- b Déterminer les équations des demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1, et de l'asymptote à la courbe (C) représentant la fonction de f .

- c Construire (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

5 Déterminer l'ensemble H des points M d'affixe z tels que $F(z)$ soit réel.

Déduire la représentation de H de la courbe (C) .

III . Soit M un point mobile en mouvement dans le plan précédent dont les coordonnées à l'instant t sont telles

$$\text{que : } \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y = \sin(t) - t g\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}, t \in [0, \pi[.$$

1 Déterminer la trajectoire de M . Représenter cette trajectoire.

Préciser le sens de parcours de M sur cette trajectoire.

2 Construire les représentants des vecteurs vitesse et accélération du point mobile M aux instants $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

3 Étudier la nature du mouvement.

Sujet 3

Session de 1985

Exercice 1

Soit f le polynôme tel que, pour tout z complexe : $f(z) = z^3 - (7 - 9i)z^2 - (14 - 39i)z + 50$.

- 1 Résoudre l'équation $f(z) = 0$.
- 2 Soient A, B et C les points du plan euclidien, d'affixes respectives $2i; 3 - 4i$ et $4 - 3i$.
Déterminer le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients $1; -1$ et 1 .
Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.

Exercice 2

- 1 Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = x^6(1 - x)^{94}$.
Pour quelle valeur de f admet-elle un maximum ?
- 2 On se propose d'estimer le nombre d'autruches N , inconnu mais bien définie et supérieur à 30, d'une réserve d'animaux. L'objet de l'exercice est de déterminer la plus probable de N en se basant sur les expériences suivantes : Dans un premier temps on captive au hasard et en différents endroits de la réserve, 30 autruches que l'on marque toutes et que l'on relâche.
À supposer qu'ensuite on attrape une autruche, exprimer en fonction de 100 la probabilité p que cette autruche soit marquée.
En fait, quelques jours plus tard, on attrape successivement 100 autruches que l'on relâche chaque fois.
Soit X la variable aléatoire comptant le nombre d'autruches marquées sur les 100 capturées.
En admettant que l'évènement " $X = 6$ ", qui est réalisé à l'expérience, est le plus probable des évènements " $X = k$ ", déterminer la valeur de N pour laquelle $P(X = 6)$ est maximale.

Problème

I. Soit u la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $u(x) = x^2 + \text{Log}|1 - x|$.

- 1 Donner l'ensemble de définition de u et étudier ses variations.
- 2 Construire la représentation graphique (U) de u dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.
- 3 Dédire de la question précédente que l'équation $u(x) = 0$ possède exactement deux solutions, l'une $x_0 = 0$ et l'autre x_1 strictement comprise entre 1 et 2.

On indique pour la suite du problème que $x_1 \approx 1,22$.

- 4 Soit v la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $v(x) = -(x - 1)^2 + \text{Log}|1 - x|$.
Étudier le sens de variation de v et établir que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $v(x) \leq -\frac{1}{2}(1 + \text{Log}(2))$.

N.B : on ne demande pas d'étudier les limites de v aux bornes de son ensemble de définition.

II. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^2 + \text{Log}|1 - x|}{1 - x}$ et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

- 1 À l'aide des résultats de la partie I, étudier les variations de f
- 2 Montrer que la droite $(D) : y = -x - 1$ est asymptote à (C) .
- 3 Donner une équation de l'autre asymptote à (C) .

- 4 Montrer que le Point $I(1, -2)$ est centre de symétrie de la courbe.
- 5 Déterminer une équation de la tangente (T_0) à (C) au point d'abscisse 0, puis une équation de la tangente (T_2) au point d'abscisse 2.
- 6 Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'asymptote (D) .
- 7 Tracer la représentation graphique (C) de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On donne $\frac{1}{e} \approx 0,37$.

III. Soit m un réel supérieur à $1 + \frac{1}{e}$.

- 1 Calculer l'intégrale : $\int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{\text{Log}(x-1)}{x-1} dx$
- 2 Dédire de la question précédente l'aire $A(m)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 1 + \frac{1}{e}$ et $x = m$.

Calculer $A(e+1)$ et la limite de $A(m)$ lorsque m tend vers plus l'infini.

Sujet 4

Session de 1986

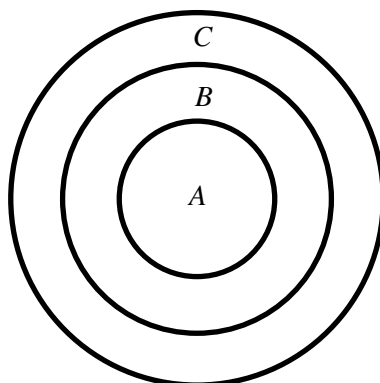
Exercice 1

- 1 Déterminer deux nombres complexes a et b tels que : $a - b = 5 - 4i$, $ab = 3(1 - 3i)$ et $|a| > |b|$.
Mettre a sous forme trigonométrique
- 2 On considère dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives $a, \frac{a^2}{18}, b$ et b^2 .
Déterminer les coordonnées du barycentre G des points A, B, C, D affectés des coefficients respectifs $1; -1; 1; 1$.
Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = k, k \in \mathbb{R}$.
- 3 Soit S la transformation géométrique qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S .

Exercice 2

La cible d'un jeu de fléchette est constituée par trois cercles concentriques de rayons respectifs $R, 2R$ et $3R$.

On note A la partie centrale de la cible et B, C les anneaux entourant A .



- 1 Calculer, en fonction de R , les aires des parties A, B, C .
- 2 Un joueur lance une fléchette vers la cible précédente. On admettra que la probabilité d'atteindre une des parties de la cible est proportionnelle à l'aire de cette partie.
Soit p la probabilité d'atteindre la partie A de la cible.
 - a Calculer, en fonction de p , les probabilités respectives d'atteindre les parties B et C .
 - b On suppose que la probabilité d'atteindre une des parties de la cible est 0.75 . En déduire la valeur de p .
- 3 On suppose que les parties A, B, C sont affectées respectivement des points suivants : 100, 50, 25 points, un joueur n'atteignant pas la cible marquant 0 point.
Soit X la variable aléatoire qui exprime le nombre de points obtenus par un joueur lançant deux fléchettes.
 - a Quelle est la loi de probabilité de X ?
 - b Calculer l'espérance mathématique de X .

Problème

NB : Dans tout le problème, la notation $\ln$ désigne le logarithme népérien de x . On rappelle que $\ln 2 \cong 0,69$.

A. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par : $f(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

- 1 Étudier les variations de f et tracer la courbe représentative de cette fonction dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 2 cm).
- 2 Dédire de cette représentation que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) > 0$.

B. Soit g la fonction numérique à variable réelle x définie par :
$$\begin{cases} g(x) = 2x + \frac{\ln|x|}{x} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\\ g(0) = 0 \end{cases}$$

- 1 Quel est le domaine de définition de g ?
La fonction est-elle continue en $x_0 = 0$? Est-elle dérivable en ce point ?
- 2 Montrer que la fonction g est impaire et en déduire une propriété de la courbe (C) représentant ses variations.
- 3 Calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et déduire de la partie A le sens de variation de g .
Étudier la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et démontrer l'existence d'une asymptote oblique.
Préciser la position de (C) par rapport à cette asymptote.
- 4 Faire le tableau des variations de g et tracer la courbe (C) dans un nouveau repère (Unité : 1 cm).
On précisera en particulier l'intersection de (C) avec son asymptote oblique.
- 5 Soit $a > 1$. Calculer, en fonction de a , l'aire $A(a)$ de la surface comprise entre (C) , l'asymptote oblique et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.
Quelle est la limite de $A(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

C. Soit M un point mobile du plan dont les coordonnées, à l'instant t , sont :
$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{-t}(2 - te^{2t}) \end{cases}, t \in \mathbb{R}^+.$$

- 1 Calculer les coordonnées des vecteurs vitesses $\vec{V}_M$ et accélération $\vec{\Gamma}_M$ du point M à l'instant t .
- 2 Montrer que la trajectoire du point M est une partie de C que l'on précisera.
- 3 Préciser dans les cas $t = 0$ et $t = \ln 2$ la position du point M , les coordonnées de $\vec{V}_M$ et $\vec{\Gamma}_M$ et la nature de son mouvement (accéléré ou retardé).

Sujet 5

Session de 1987

Exercice 1

- a) Soient deux personnes prises au hasard, quelle est la probabilité pour qu'elles soient nées un même jour de la semaine ?
- b) Dans un groupe de 4 personnes, quelle est la probabilité pour que toutes soient nées des jours différents de la semaine ?

Est-ce alors faire un pari gagnant que d'affirmer que deux d'entre elles au moins sont nées le même jour de la semaine ?

- c) Quelle est la probabilité pour que parmi n personnes l'une au moins soit née un lundi ?

Combien doit-il y avoir de personnes dans un groupe pour que l'affirmation « au moins l'un d'entre vous est né un lundi » soit un pari gagnant ?

On donne les approximations suivantes : $\ln 2 \approx 0.693$, $\ln 6 \approx 1,945$.

NB : « faire un pari gagnant » signifie que l'événement choisi a une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$.

$\ln$ désigne le logarithme népérien.

Exercice 2

Soit l'expression $P(z)$ définie pour tout nombre complexe z par $P(z) = z^3 - z^2 + z(-1 + i) - 2 - 2i$.

- a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle x et une solution imaginaire pure y que l'on calculera.
- b) Déterminer la 3^{ème} solution z à l'aide d'une factorisation.

On donnera les formes trigonométriques des trois solutions.

- c) On appelle respectivement A, B et C les images dans le plan complexe des nombres x, y, z .

Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

Quel est l'abscisse du milieu I de $[AC]$?

Déterminer l'image D de A par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Quelle est enfin la nature du quadrilatère $ABCD$?

Problème

Dans tout ce qui suit $\ln$ désignera le logarithme népérien. On donne les approximations suivantes $e \approx 2,7$; $\sqrt{2} \approx 1,4$.

On choisira un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm .

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x \ln(-x), & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 - x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

A.

- 1 a) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Sur quels intervalles de $\mathbb{R}$ f est-elle dérivable ?

- b) Montrer l'existence d'une branche parabolique quand $x \rightarrow -\infty$, pour la courbe représentative de f . Quelle direction a-t-elle ?

- 2 a Montrer que la droite d'équation $y - 2x - \frac{1}{2}$ est une asymptote pour la courbe (C) .
 Quelle est la position de (C) par rapport à cette droite, quand $x \rightarrow +\infty$?
- b Montrer que, pour $x \geq 0$, (C) ne coupe pas l'asymptote.
- 3 a Étudier les variations de f .
 Montrer l'existence de deux extrémums A et B dont calculera les coordonnées.
- b Calculer $f(-e)$, $f(-1)$, $f(-\frac{1}{e})$, $f(0)$, $f(1)$.
 Établir un tableau de variation de f .
- c Dessiner la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 Reporter les demi-tangentes, puis la tangente à la courbe de direction Ox (axe des abscisses).
 Déterminer l'équation de la tangente à (C) en $x_0 = 1$.

B.

- 1 Démontrer que la restriction de f à $[1, +\infty[$ admet une bijection réciproque f^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image.
 Ne pas chercher à expliciter $f^{-1}(x)$, mais dessiner sa courbe représentative $(C)^{-1}$ dans le même repère que celui de (C) .
- 2 Calculer, en cm^2 , l'aire géométrique du domaine (A) limitée par les frontières $x = -1$; $x = -\frac{1}{e}$, l'axe Ox et la courbe (C) .
 On effectuera une intégration par parties.
 Ne pas chercher à simplifier les résultats obtenus à la fin du calcul.

C. Un point $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est animé d'un mouvement plan, curviligne, et sa position en fonction du temps t est donnée

$$\text{par : } \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 + \sqrt{t^2 + 3t + 2} \end{cases}, \text{ avec } t \geq 0$$

- 1 Montrer que la trajectoire de M est une partie de (C) que l'on précisera. Quel est le sens de parcours de M ?
- 2 Déterminer et représenter le vecteur vitesse $\vec{V}$ et le vecteur accélérateur $\vec{\Gamma}$ à $t = 1$.
 Le mouvement est-il accéléré ou retardé à cet instant?
- 3 Montrer que le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire du point M .

Sujet 6

Session de 1988

Exercice 1

Dans tout ce qui suit $\ln$ désignera le logarithme népérien de base e . $\mathbb{N}^*$ désignant l'ensemble des entiers naturels prive de zéro, on donne la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a termes positifs, de premier terme $u_1 = 1$ et telle que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on ait $(u_{n+1})^2 = e u_n$.

- 1 Calculer u_2, u_3, u_4 (on donnera les résultats sous formes e^r , r étant rationnel).
- 2 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln u_n - a$ ou a est un réel strictement positif.
 - a Déterminer a pour que (v_n) soit une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - b Calculer dans ce cas la limite de v_n , puis celle de u_n quand n tend vers $+\infty$.
- 3 Soit $a = 1$; on désigne par A_k la somme des k premiers termes de la suite géométrique (v_n) et par B_k le produit des k premiers termes de la suite (u_n) .

Calculer A_k et B_k en fonction de k .

Déterminer les limites de A_k et B_k quand k tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Soit dans le plan complexe, l'application associant au point a d'affixe z , le point A d'affixe Z d'affixe :

$$Z = z + 1 + \frac{2}{z+1}, (z \neq -1).$$

- 1 Calculer (X, Y) coordonnées de A , en fonction de (x, y) coordonnées de a .
- 2
 - a Déterminer l'ensemble E des points a tels que Z soit réel.
 - b Déterminer l'ensemble F des points a tels que Z soit imaginaire pur.
- 3 On suppose que $|z+1| = 1$, déterminer z tel que l'on ait $|Z| = 1$. En déduire Z .

Problème

On donne les approximations suivantes : $e \cong 2,7; e^2 \cong 7,4$ **A.** On considère les fonctions numériques de la variable réelle x , dépendant du paramètre réel m , non nul, définies par : $f_m(x) = \frac{e^{2x}+m}{2e^x}$.

- 1 Étudier les variations de f_m suivant les valeurs de m (on distinguera les cas où $m < 0$ et $m > 0$).
- 2 Déterminer les valeurs de m pour lesquelles, on a la relation : pour tout réel x : $|(f'_m(x))^2 - (f_m(x))^2| = 1$ où f'_m est la fonction dérivée de f_m .

B. On considère les fonctions numériques définies par :

$$x \mapsto f_1(x) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x} \text{ (si } m = 1 \text{) et } f_2(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} \text{ (si } m = -1 \text{) de courbes } C_1 \text{ et } C_{-1}.$$

- 1
 - a Montrer que $f_1(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $f_2(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
 - b Vérifier que f_1 et f_{-1} sont respectivement paire et impaire, et montrer que C_{-1} admet un point d'inflexion.
- 2 Quelle est la position relative de C_1 par rapport à C_{-1} ? Construire C_1 et C_{-1} dans un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités $2cm$.

On précisera les branches infinies et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) - f_{-1}(x))$.

Tracer la tangente à C_{-1} au point d'inflexion.

- 3 Calculer en cm^2 l'aire $A(\lambda)$ du domaine défini par :
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ f_{-1}(x) \leq y \leq f_1(x) \end{cases} \quad \text{où } \lambda \text{ décrit }]0, +\infty[.$$

Calculer la limite de $A(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

Soit la fonction numérique $x \mapsto h(x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right|$.

- a Déterminer D_h , l'ensemble de définition de h .

Montrer que h est impaire, (on pourra montrer que pour tout $x \in D_h$, $h(x) + h(-x) = 0$).

- b Montrer que $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1]$.

En déduire l'expression de $h(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

- 4 a Montrer que la restriction de f_1 à $[0, +\infty[$ admet une bijection réciproque g ,

définie de : $[1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ par $g(x) = h(x)$.

- b Déterminer l'équation de la demi-tangente T à la courbe de g au point A , de coordonnées $(1, 0)$.

Tracer la demi-tangente T , et la courbe de g dans le même repère que C_1 .

En déduire le tracé de la courbe de h .

Soit M un point mobile du plan dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, à l'instant t , sont :

$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{t^2 + 1}{2t} \end{cases}, t \in \mathbb{R}^+$$

- 1 Déterminer la trajectoire de M quand t décrit $]0, +\infty[$.

- 2 Déterminer à chaque instant t le vecteur vitesse $\vec{V}_M$ et accélération $\vec{\Gamma}_M$ du point M .

- 3 Montrer que l'application $t \mapsto \left\| \vec{V} \right\|$ est décroissante.

En déduire la nature de son mouvement de M .

Exercice 1

- 1
 - a Vérifier que $-2i = (1-i)^2$.
 - b Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 - 2(1+i) + 4i)(z^2 + 4z + 8) = 0$.
Les images des racines dans le plan complexe sont notées A, B, C et D telles que A et B ont même abscisse et A et C ont même ordonnée
- 2 Définir la similitude directe S du plan complexe tel que $S(A) = C$ et $S(B) = D$.
En donner l'angle, le rapport et le centre Ω ?
- 3 Soit M_0 le point d'affixe $2 - 3i$. On pose pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = S(M_n)$ puis $U_n = \left\| \overrightarrow{\Omega M_n} \right\|$.
 - a Que dire de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
 - b Exprimer U_n en fonction de n et étudier U_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 2

Un couple souhaite avoir n enfants ($n \in \mathbb{N}^*$). On considère qu'à chaque naissance il ne vient qu'un enfant (garçon noté G , ou fille notée F).

La probabilité d'avoir une fille est double de celle d'avoir un garçon.

Les naissances sont indépendantes les unes des autres.

Soit X_j la variable aléatoire associée à la j -ème naissance et prenant la valeur 0 pour G et 1 pour F et

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

- 1 Dans cette partie $n = 4$.
 - a Donner la loi de probabilité de X .
 - b Construire la fonction de répartition de X .
 - c Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.
- 2 Déterminer n pour que la probabilité de ne pas avoir de garçon soit strictement inférieure à $\frac{1}{100}$.

Problème

I. On considère la fonction u définie par : $u(x) = \ln(1-x^2) + 2 + \frac{2}{x^2-1}$.

Étudier la variation de U .

En déduire le signe de $u(x)$ pour tout x appartenant au domaine de définition D_u de u .

II. On considère la fonction f définie par : $f(x) = x \ln(1-x^2)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 Montrer que f est impaire.
- 2 Étudier la variation de f .
- 3 Étudier la position de la courbe C de f par rapport à la tangente au point d'abscisse 0.
- 4 Tracer la courbe C et la tangente T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité = 2 cm).
- 5 Montrer que f admet une bijection réciproque dont on dressera le tableau de variation.

En déduire sa courbe représentative C^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

III. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{2} |x| \sqrt{1-x^2}$.

- 1 Montrer que h est paire et étudier sa dérivabilité.
- 2 Étudier la variation de h .
- 3 Tracer la courbe C' de h dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et en déduire le tracé de la courbe de Γ d'équation $y^2 = \frac{x^2-x^4}{4}$.
- 4 Calculer l'intégrale $\int_0^1 h(x)dx$. En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe Γ , en cm^2 .
- 5 Soit , α un réel tel que $0 \leq \alpha < 1$.

Calculer l'aire $A(\alpha)$ du domaine E des points de coordonnées (x, y) tels que $0 \leq x \leq \alpha$ et $f(x) \leq y \leq h(x)$.

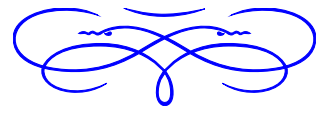
(On pourra dériver d'abord : $-\frac{1}{2} [(1-x^2) \ln(1-x^2) + x^2]$).

Calculer $\lim_{\alpha \rightarrow 1} A(\alpha)$.

N.B : $\ln$ désigne le logarithme népérien.



CORRIGES DES SUJETS



Sujet 1

Session de 1983

Exercice 1

Soit F la transformation du plan $\mathcal{P}$ associée à l'application f définie de la manière suivante :

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{1}{2}(1-i)z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

- 1) Donnons la nature et les éléments caractéristiques de la transformation F .

L'application complexe f associée à F est de la forme $f(z) = az + b$ avec $a = \frac{1}{2}(1-i)$ et $b = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

Comme $a = \frac{1}{2}(1-i) \in \mathbb{C}^*$, alors F est une similitude plane directe.

$$k = |a| = \left| \frac{1}{2}(1-i) \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Soit } \theta = \arg(a), \text{ alors } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

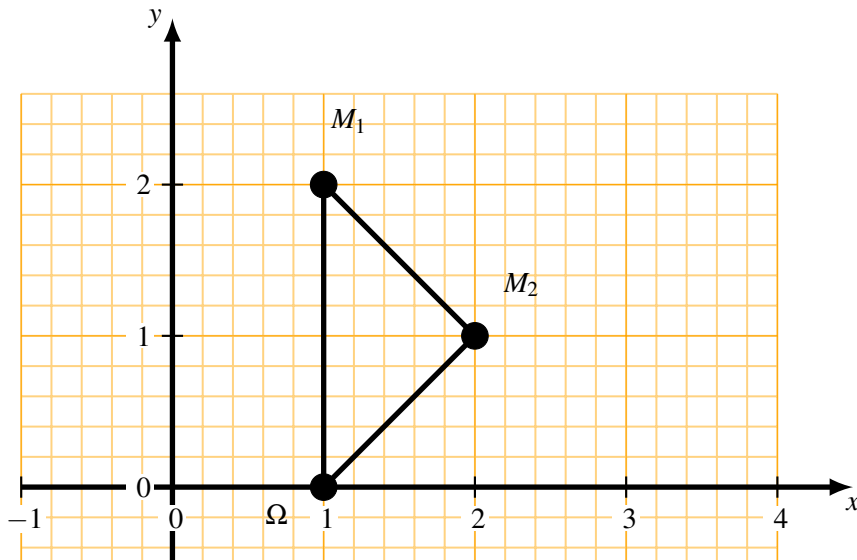
$$\text{Soit } \Omega \text{ tel que } z_{\Omega} = \frac{b}{1-a}. \quad z_{\Omega} = \frac{b}{1-a} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{i}{2}}{1 - \frac{1}{2}(1-i)} = \frac{\frac{1+i}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{i}{2}} = 1 \Rightarrow \Omega(1; 0).$$

Donc les éléments caractéristiques de F sont le rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, l'angle $\theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ et le centre $\Omega(1; 0)$.

- 2) On considère une suite de points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du plan tels que $M_n = F(M_{n-1})$.

- a) Donnons une construction géométrique du point $M_2 = F(M_1)$ tel que $M_1(1, 2)$ en prenant pour unité 2cm .

Le triangle $\Omega M_1 M_2$ est un triangle rectangle et isocèle en M_2 .



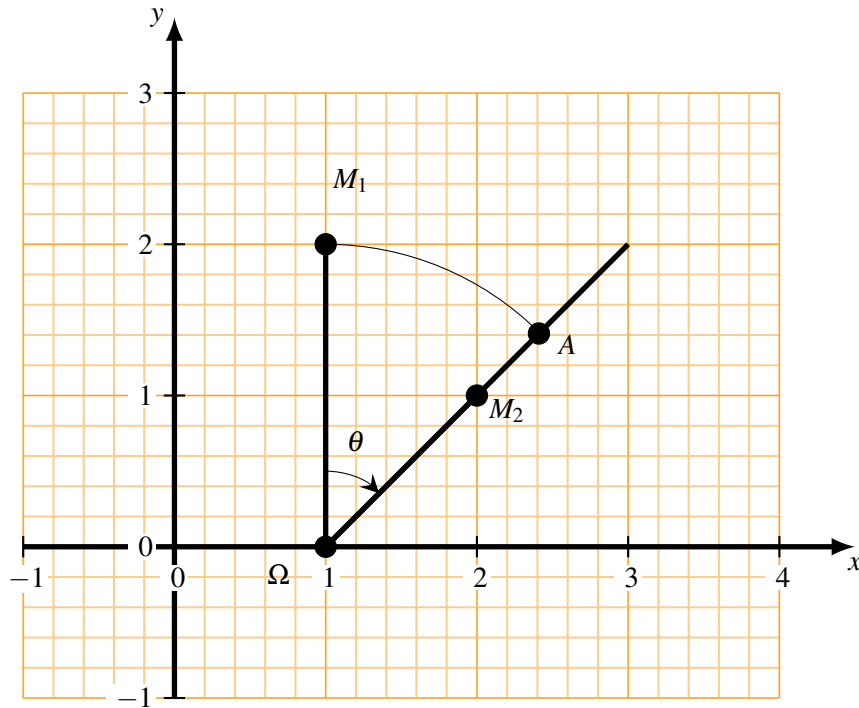
Autre construction géométrique : utilisation de la décomposition de F .

On sait que F est une similitude plane directe de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'angle $\theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$ et de centre $\Omega(1; 0)$.

Donc est la composée de l'homothétie de centre Ω et de rapport k et de la rotation de centre Ω et de d'angle θ .

Soit A et A' deux points :

$$F = HoR : M_1 \xrightarrow{R} A \xrightarrow{H} M_2$$



b Calculons les coordonnées du point M_0 .

$$\begin{aligned} M_1 = F(M_0) &\Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}(1-i)z_0 + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \Rightarrow (1-i)z_0 + 1 + i = 2z_1 = 2(1+2i) = 2 + 4i \\ &\Rightarrow (1-i)z_0 = 2 + 4i - 1 - i = 1 + 3i \Rightarrow z_0 = \frac{1+3i}{1-i} = \frac{(1+3i)(1+i)}{1^2+1^2} = \frac{1+i+3i-3}{2} = \frac{-2+4i}{2} = -1 + 2i. \end{aligned}$$

Donc $M_0(1, -2)$.

c * Donnons la nature de la transformation $F^4 = FoFoFoF$.

L'application complexe associée à F^4 est f^4 . f^4 est définie par : $\forall z \in \mathbb{C}, f^4(z) = f^2(f^2(z))$.

$$\begin{aligned} f^2(z) &= f(f(z)) = f\left(\frac{1}{2}(1-i)z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-i)\left(\frac{1}{2}(1-i)z + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ &\Rightarrow f^4(z) = \frac{1}{4}(1-2i-1)z + \frac{2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = -\frac{1}{2}iz + 1 + \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f^4(z) = f^2\left(-\frac{1}{2}iz + 1 + \frac{i}{2}\right) = -\frac{1}{2}i\left(-\frac{1}{2}iz + 1 + \frac{i}{2}\right) + 1 + \frac{i}{2} = -\frac{1}{4}z - \frac{1}{2}i + \frac{1}{4} + 1 + \frac{i}{2} = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{4}.$$

Ainsi $\forall z \in \mathbb{C}, f^4(z) = -\frac{1}{4}z + \frac{5}{4}$.

Comme $a = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, alors F^4 est une homothétie de centre $\Omega(1; 0)$ et de rapport $k = -\frac{1}{4}$.

* Dédudons-en les coordonnées du point M_4 .

$$M_4 = F(M_3) = F(F(M_2)) = F^2(F(M_1)) = F^3(F(M_0)) \Rightarrow M_4 = F^4(M_0).$$

$$\text{Donc } z_4 = -\frac{1}{4}z_0 + \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}(-1 + 2i) + \frac{5}{4} = \frac{1}{4} - \frac{2}{4}i + \frac{5}{4} = \frac{6}{4} - \frac{1}{2}i = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$\text{Ainsi } z_4 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$\text{D'où } M_4\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Exercice 2

Soit Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire.

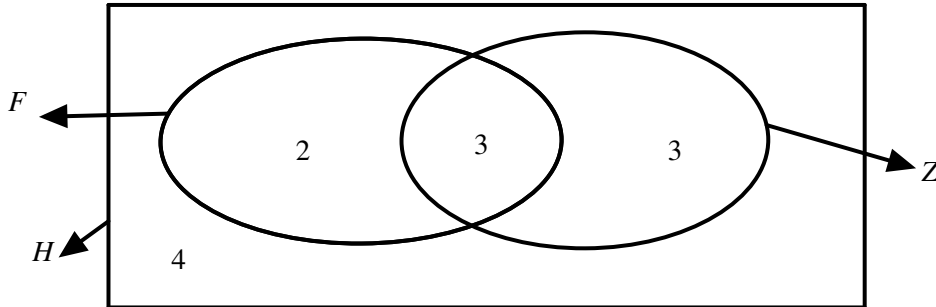
Comme on a choisit au hasard et simultanément 3 personnes, alors Ω est l'ensemble des parties de 3 personnes

parmi 12. Donc $\text{Card}\Omega = C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \times 9!} = 220$.

Aussi, comme chaque groupe de 3 personnes a la même probabilité d'être choisi on est dans le cas de l'équiprobabilité.

Soit F l'ensemble des personnes qui parlent le foulfouldé ; H l'ensemble des personnes qui parlent le haoussa et Z l'ensemble des personnes qui parlent zarma.

On a le diagramme de Venn suivant.



- 1 a Déterminons la probabilité pour que ces 3 personnes parlent au moins une autre langue que le haoussa.

Soit A l'événement : « les 3 personnes parlent au moins une autre langue que le haoussa ».

D'après le diagramme de Venn, les personnes qui parlent au moins une autre langue que le haoussa sont au nombre de 8, donc $CardA = C_8^3 = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$.

$$\text{Ainsi } P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$

- b Déterminons la probabilité pour que ces 3 personnes ne parlent que le haoussa.

Soit B l'événement : « les 3 personnes ne parlent que le haoussa ».

D'après le diagramme de Venn, les personnes qui ne parlent que le haoussa sont au nombre de 4,

$$\text{donc } CardB = C_4^3 = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4. \text{ D'où } P(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} = \frac{4}{220} = \frac{1}{55} \text{ soit } P(B) = \frac{1}{55}.$$

- 2 Soit X la variable aléatoire qui à chaque groupe de 3 personnes associe le nombre de personnes parlant foulfouldé et zarma.

- 3 a Déterminons la loi de probabilité de X .

Le nombre de personnes qui parlent à la fois le foulfouldé et le zarma sont nombres de 3,

donc l'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$. D'où :

$$P(X = 0) = \frac{C_3^0 \times C_9^3}{Card\Omega} = \frac{1 \times 84}{220} = \frac{21}{55}.$$

$$P(X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_9^2}{Card\Omega} = \frac{3 \times 36}{220} = \frac{27}{55}.$$

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_9^1}{Card\Omega} = \frac{3 \times 9}{220} = \frac{27}{220}.$$

$$P(X = 3) = \frac{C_3^3 \times C_9^0}{Card\Omega} = \frac{1 \times 1}{220} = \frac{1}{220}.$$

On résume cette loi de probabilité de X dans le tableau ci-après

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{21}{55}$	$\frac{27}{55}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

- b Calculons la probabilité pour qu'il ait au moins 2 personnes parlant foulfouldé et zarma.

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{27}{220} + \frac{1}{220} = \frac{28}{220} = \frac{7}{55}.$$

Donc la probabilité pour qu'il ait au moins 2 personnes parlant foulfouldé et zarma est égale à $\frac{7}{55}$.

❧ Problème ❧

I. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$$

$$f(0) = 0$$

$$\forall x < 0, \quad f(x) = -x \text{Log}|x|$$

$$D_f =]0; +\infty[\cup]-\infty; 0[\cup \{0\} = \mathbb{R}.$$

❶ * Vérifions si la fonction f est continue au point $x_0 = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-\frac{1}{x}}$. Posons $X = -\frac{1}{x}$. Alors $x = -\frac{1}{X}$ et quand x tend vers 0^+ , X tend vers $-\infty$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{X} \times e^X = 0 \times 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x \text{Log}|x|) = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0.$$

D'où f est continue au point $x_0 = 0$.

* Vérifions si la fonction f est dérivable au point $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{xe^{-\frac{1}{x}}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^{-\frac{1}{x}} \right) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty.$$

Donc la fonction f est dérivable à droite en $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-x \text{Log}|x| - 0}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-\text{Log}|x|) = -(-\infty) = +\infty, \text{ donc la fonction } f \text{ n'est pas dérivable à gauche en } x_0 = 0.$$

Comme la fonction f est dérivable à droite mais n'est pas dérivable à gauche au point $x_0 = 0$, alors la fonction f n'est pas dérivable au point $x_0 = 0$.

* Vérifions si la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Pour } x \in]0; +\infty[, f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}.$$

Sur cet intervalle f est continue car elle est le produit et composée des fonctions qui sont continues sur $]0; +\infty[$.

De même, sur $] -\infty; 0[, f(x) = -x \text{Log}|x|$ est une fonction qui y est continue car elle est le produit et composée de fonctions qui le y sont. De plus f est continue en $x_0 = 0$.

D'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

❷ Étudions les variations de la fonction f .

$$\text{* Pour } x \in]0; +\infty[, f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}.$$

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = 1 \times e^{-\frac{1}{x}} + x \times \left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} + x \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{x+1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

$$\text{Ainsi } f'(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} > 0 \text{ car } x \in]0; +\infty[.$$

Donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\text{* Si } x \in]-\infty; 0[, f(x) = -x \text{Log}|x|.$$

La fonction f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et pour tout $x \in] -\infty; 0[$, on a :

$$f'(x) = -\text{Log}|x| + (-x) \times \frac{1}{x} = -\text{Log}|x| - 1.$$

Ainsi $f'(x) = -\text{Log}|x| - 1$. Si $f'(x) \leq 0$. Alors $-\text{Log}|x| \leq 1 \Rightarrow \text{Log}|x| \geq -1 \Rightarrow |x| \geq e^{-1} \Rightarrow -x \geq \frac{1}{e}$ car $x < 0$, donc $x \leq -\frac{1}{e}$. D'où f est décroissante sur $] -\infty; -\frac{1}{e}]$.

Si $f'(x) \geq 0$. Alors $-\text{Log}|x| \leq 1 \Rightarrow \text{Log}|x| \leq -1 \Rightarrow |x| \leq e^{-1} \Rightarrow -x \leq \frac{1}{e}$ car $x < 0$, donc $x \geq -\frac{1}{e}$.

D'où f est croissante sur $] -\frac{1}{e}; 0[$.

Par suite f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, décroissante sur $] -\infty; -\frac{1}{e}]$ et croissante sur $] -\frac{1}{e}; 0[$.

Nous déduisons-en le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
f	0	$-\frac{1}{e}$	0	$+\infty$

3 * Démontrons que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) quand x tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-\frac{1}{x}} - x + 1).$$

Posons $X = -\frac{1}{x}$. Alors $x = -\frac{1}{X}$ et quand x tend vers $+\infty$, X tend vers 0 .

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{X} \times e^X - \frac{1}{X} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-1 \times \frac{e^X - 1}{X} + 1 \right) = -1 \times 1 + 1 = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0.$$

D'où la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C) quand x tend vers $+\infty$.

* Déterminons ce qui se passe quand x tend vers $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \text{Log}(-x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x \text{Log}|x|}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\text{Log}|x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\text{Log}(-x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty.$$

Donc la courbe C de f admet une branche parabolique de direction (oy) .

* Donnons les équations de demi-tangentes à la courbe (C) au point O d'abscisse $x_0 = 0$.

➔ Nous avons vu, d'après I. 1) que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 0$, donc l'équation de la demi-tangente de f à droite au point O d'abscisse $x_0 = 0$ est $y = 0(x - 0) + 0$ et $x > 0$ c'est-à-dire $y = 0$ et $x > 0$.

➔ Nous avons également vu, d'après I. 1) que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = +\infty$, donc la demi-tangente à gauche de f au point O d'abscisse $x_0 = 0$ a pour équation $x = 0$.

Soit A le point d'intersection de la courbe (C) et de l'axe $x'ox$, différent du point O .

* Donnons l'équation de la tangente en A à (C) .

Considérons $f(x) = -x \text{Log}|x|$, $x \in] -\infty; 0[$.

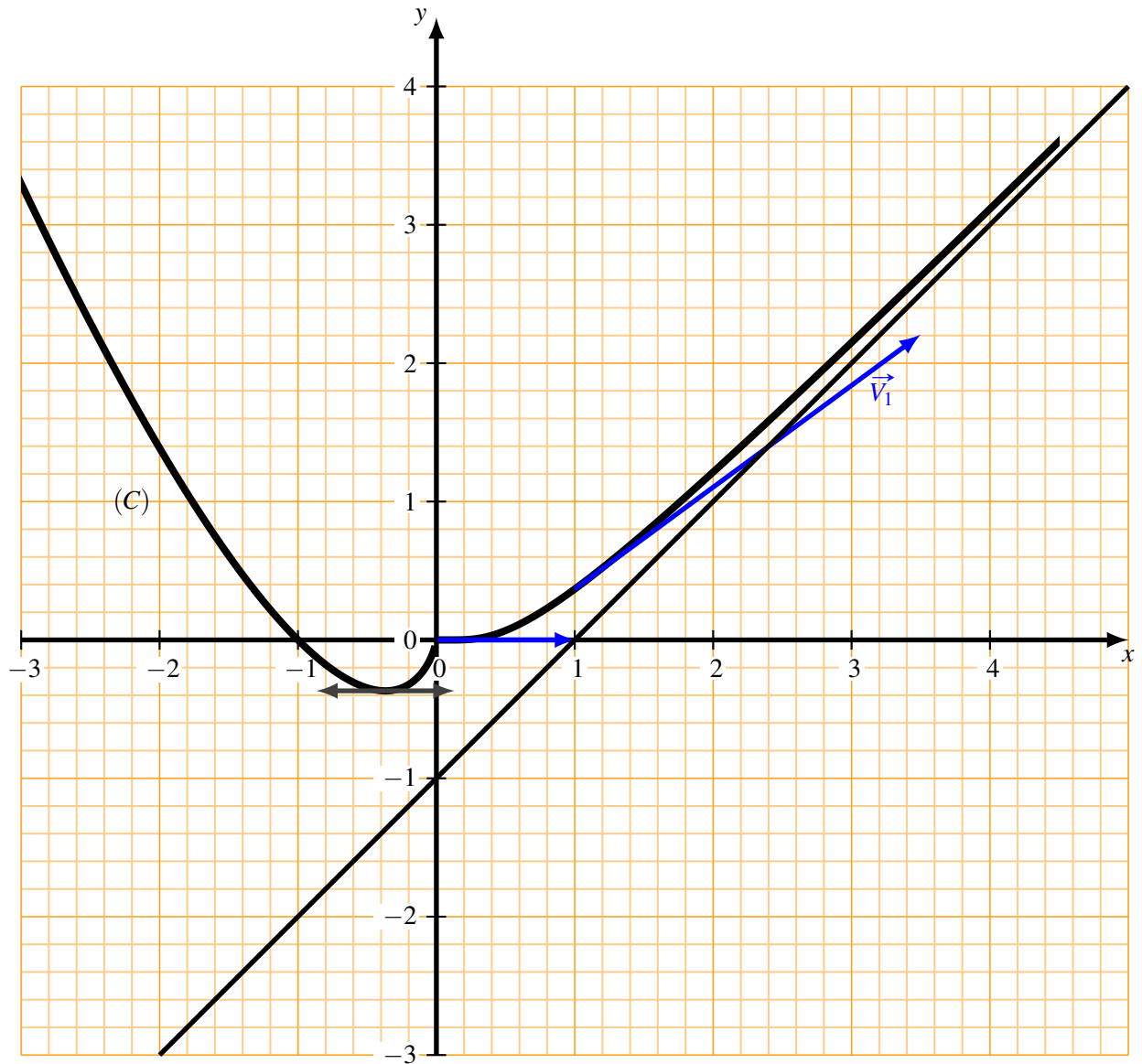
Soit $f(x) = 0$. Alors $-x \text{Log}|x| = 0 \Rightarrow -x = 0$ ou $\text{Log}|x| = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $|x| = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = 1$.

Or $x < 0$, donc $x = -1$, donc $A(-1; 0)$.

$$f'(-1) = -1 - \text{Log}|-1| = -1 - 0 = -1.$$

Donc l'équation de la tangente en A à (C) est $T_A : y = -1(x - (-1)) + 0$ c'est-à-dire $T_A : y = -x - 1$.

* Construisons le graphe (C) de f .



1 Calculons l'aire du domaine E_λ définie par :

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq \lambda \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } -1 \leq \lambda \leq 0.$$

$$A(E_\lambda) = - \int_{-1}^{\lambda} f(x) dx = - \int_{-1}^{\lambda} (-x \text{Log}(-x)) dx \times u.a. \quad u.a = 2cm \times 2cm = 4cm^2.$$

Procéderons par intégration par parties pour ce calcul intégral.

Posons $u(x) = \text{Log}(-x)$ et $v'(x) = -x$. Alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

$$- \int_{-1}^{\lambda} (-x \text{Log}(-x)) dx = - \left[-\frac{1}{2}x^2 \text{Log}(-x) \right]_{-1}^{\lambda} + \int_{-1}^{\lambda} \left(-\frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\Rightarrow - \int_{-1}^{\lambda} (-x \text{Log}(-x)) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \text{Log}(-x) \right]_{-1}^{\lambda} + \int_{-1}^{\lambda} \left(-\frac{1}{2} x \right) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \text{Log}(-x) \right]_{-1}^{\lambda} + \left[-\frac{1}{4} x^2 \right]_{-1}^{\lambda}$$

$$\Rightarrow - \int_{-1}^{\lambda} (-x \text{Log}(-x)) dx = \frac{1}{2} \lambda^2 \text{Log}(-\lambda) - \frac{1}{2} \times 1 \times \text{Log}(1) - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \lambda^2 \text{Log}(-\lambda) - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4}.$$

$$\text{Donc } A(E_{\lambda}) = \left(\frac{1}{2} \lambda^2 \text{Log}(-\lambda) - \frac{1}{4} \lambda^2 + \frac{1}{4} \right) \times 4 \text{cm}^2 = (2\lambda^2 \text{Log}(-\lambda) + \lambda^2 + 1) \text{cm}^2.$$

$$\text{D'où } A(E_{\lambda}) = (2\lambda^2 \text{Log}(-\lambda) + \lambda^2 + 1) \text{cm}^2.$$

2 Dédudisons-en l'aire $A(E)$.

$$A(E) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} A(E_{\lambda}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (2\lambda^2 \text{Log}(-\lambda) + \lambda^2 + 1) = 0 + 0 + 1 = 1.$$

$$\text{Donc } A(E) = 1 \text{cm}^2.$$

III. Soit un point matériel M en mouvement dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont la position à l'instant

$$t \text{ est définie par : } \begin{cases} x = -\frac{1}{\text{Log}(t)} \\ y = -\frac{t}{\text{Log}(t)} \end{cases} \quad t \in]0, 1[.$$

1 Déterminons ce que fait le point M lorsque t tend vers 0.

$$\lim_{t \rightarrow 0} x = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t}{\text{Log}(t)} \right) = 0 \text{ car } \lim_{t \rightarrow 0} \text{Log}(t) = -\infty.$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} y = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\text{Log}(t)} \right) = 0 \text{ car } \lim_{t \rightarrow 0} \text{Log}(t) = -\infty.$$

Donc le point M se rapproche du point $O(0; 0)$ origine du repère.

2 Démontrons que pour tout $t \in]0, 1[$, la trajectoire (Γ) du point M est une partie du graphe (C) que nous préciserons.

$$\text{Nous avons d'une part : } x = -\frac{1}{\text{Log}(t)} \Rightarrow \frac{1}{\text{Log}(t)} = -x \Rightarrow \text{Log}(t) = -\frac{1}{x} \Rightarrow t = e^{-\frac{1}{x}}.$$

$$\text{D'autre part } t \in]0, 1[\text{ implique } \text{Log}(t) < 0, \text{ donc } x = -\frac{1}{\text{Log}(t)} > 0 \text{ c'est-à-dire } x \in]0, +\infty[.$$

$$\text{De plus } y = -\frac{t}{\text{Log}(t)} = t \times \left(\frac{-1}{\text{Log}(t)} \right) = e^{-\frac{1}{x}} \times x = x e^{-\frac{1}{x}}. \text{ Ainsi } y = f(x) \text{ avec } x > 0.$$

D'où pour tout $t \in]0, 1[$, la trajectoire (Γ) du point M est une partie du graphe (C)

3 Déterminons le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ à l'instant t et construisons le vecteur $\vec{V}_1(t)$ au point $t_1 = \frac{1}{e}$.

* Déterminons le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ à l'instant t .

$$\text{Le vecteur vitesse } \vec{V}(t) \text{ est défini par } \vec{V}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt} \cdot x' = \frac{(\text{Log}(t))'}{(\text{Log}(t))^2} = \frac{\frac{1}{t}}{(\text{Log}(t))^2} = \frac{1}{t (\text{Log}(t))^2},$$

$$\text{donc } x' = \frac{1}{t (\text{Log}(t))^2}; \quad y' = \frac{-1 \times \text{Log}(t) + t \times \frac{1}{t}}{(\text{Log}(t))^2} = \frac{-\text{Log}(t) + 1}{(\text{Log}(t))^2} = \frac{1 - \text{Log}(t)}{(\text{Log}(t))^2}.$$

$$\text{D'où le vecteur vitesse } \vec{V}(t) \text{ à l'instant } t \text{ est défini par } \vec{V}(t) : \begin{cases} x' = \frac{1}{t (\text{Log}(t))^2} \\ y' = \frac{1 - \text{Log}(t)}{(\text{Log}(t))^2} \end{cases}$$

* Construction du vecteur $\vec{V}_1(t)$ au point $t_1 = \frac{1}{e}$.

À la date $t_1 = \frac{1}{e}$, le mobile est en $M_1(1; \frac{1}{e})$ et a pour vecteur vitesse $V_1(e; 2)$.

Voir la figure où est le tracé du vecteur $\vec{V}_1$ est en bleu.

4 Donnons l'équation de la tangente D en M_1 à (Γ) à la date t_1 .

Soit $G(X; Y)$ un point quelconque de (Γ) .

$G \in (\Gamma)$ si et seulement si $\overrightarrow{M_1G}$ et $\vec{V}_1$ sont colinéaires.

$$\text{Donc } \begin{vmatrix} X-1 & e \\ Y-\frac{1}{e} & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2(X-1) - e\left(Y - \frac{1}{e}\right) = 0 \iff 2X - 2 - eY + 1 = 0 \iff 2X - eY - 1 = 0.$$

Donc la tangente D en M_1 à (Γ) à la date t_1 a pour equation $2X - eY - 1 = 0$.

Sujet 2

Session de 1984

Exercice 1

Soit dans un sac, un jeton portant le numéro 1, deux jetons portant le numéro 2, trois jetons portant le numéro 3, ..., n portant le numéro n .

- 1 * Déterminons que la somme de n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

La somme de n premiers entiers naturels non nuls est $S_n = 1 + 2 + 3 \cdots + n$.

Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = n$. On a $u_{n+1} = n + 1 = u_n + 1 \Rightarrow u_{n+1} = u_n + 1$.

Donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_1 = 1$.

On a $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$, ainsi u_n est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $r = 1$ et de premier terme $u_1 = 1$, donc $S_n = n \times \left(\frac{u_1 + u_n}{2}\right) = \frac{n(n+1)}{2}$.

D'où la somme de n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

* Déduisons-en le nombre de jetons que l'on a mis dans le sac.

Comme le sac contient un jeton portant le numéro 1, deux jetons portant le numéro 2, trois jetons portant le numéro 3, ..., n portant le numéro n , alors il y a au total $1 + 2 + 3 \cdots + n$ jetons dans le sac.

Or $1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

D'où le sac contient $\frac{n(n+1)}{2}$

- 2 Soit Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire.

Comme on a tiré un jeton au hasard, alors $\text{Card}\Omega = \frac{n(n+1)}{2}$.

Soit A l'évènement « le jeton tiré porte le numéro k ».

Comme k jetons porte le numéro k , alors $\text{Card}A = k$,

ainsi $P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}} = k \times \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2k}{n(n+1)}$.

Donc $P(A) = \frac{2k}{n(n+1)}$.

Soit B l'évènement « le jeton tiré porte un numéro inférieur ou égal à k ». Alors $B = \{1; 2; 3; \dots; k\}$.

Donc $\text{Card}B = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Ainsi $P(A_k) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{2}{n(n+1)} = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$.

D'où $P(B) = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$.

- 3 On suppose que $n = 5$.

X est la variable aléatoire qui à un tirage fait correspondre le numéro du jeton tiré.

* Définissons la fonction de répartition de X .

Les valeurs prises par X sont 1; 2; 3; 4; 5, donc $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

D'après 1) la probabilité qu'un jeton porte le numéro k est $P(A) = \frac{2k}{n(n+1)}$.

Donc $P(X = k) = \frac{2k}{5(5+1)} = \frac{2k}{30} = \frac{k}{15}$.

D'où la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$

Fonction de répartition de X .

La fonction de répartition de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : Si $x < 1$; $F(x) = 0$

Si $1 \leq x < 2$, $F(x) = P(X = 1) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Si $2 \leq x < 3$, $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{30} + \frac{4}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

Si $3 \leq x < 4$, $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{2}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

Si $4 \leq x < 5$, $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{2}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} + \frac{8}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

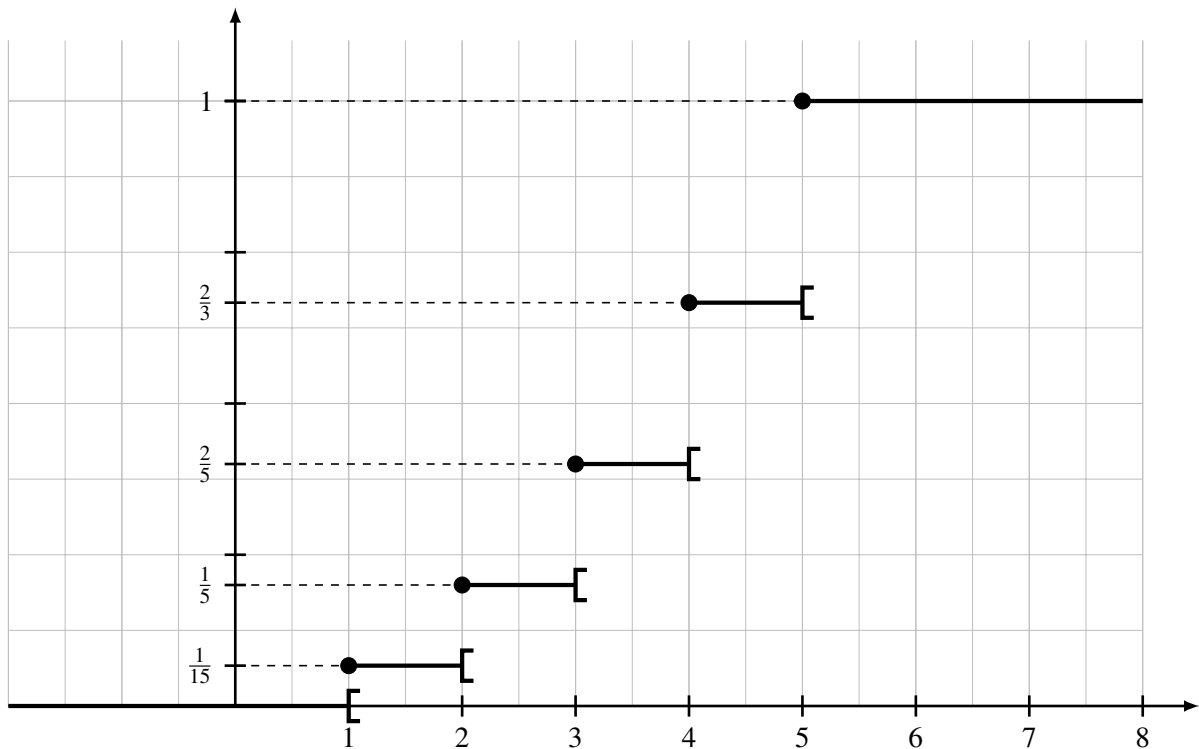
Si $5 \leq x$, $F(x) = 1$.

C'est-à-dire que F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{15} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{5} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{2}{5} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

* Représentons graphiquement la fonction de répartition de X .

De la définition de F , on en déduit sa représentation graphique .



* Calculons l'espérance mathématique de X .

$$E(X) = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3) + 4 \times P(X = 4) + 5 \times P(X = 5)$$

$$\Rightarrow E(X) = 1 \times \frac{2}{30} + 2 \times \frac{4}{30} + 3 \times \frac{6}{30} + 4 \times \frac{8}{30} + 5 \times \frac{10}{30} = \frac{2+8+18+32+50}{30} = \frac{100}{30} = \frac{10}{3}.$$

$$\text{Donc } E(X) = \frac{10}{3} \approx 3,33$$

🌀 Exercice 2 🌀

- 1 À l'aide d'une intégration par parties, calculons : $I_n = \int_0^{2n} x e^{-x} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Posons $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$. Alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = -e^{-x}$.

$$\text{Donc } I_n = [u(x)v'(x)]_0^{2n} - \int_0^{2n} u'(x)v(x)dx = [-xe^{-x}]_0^{2n} = -2ne^{-2n} - 0 \times e^0 - (e^{-2n} - e^0)$$

$$\Rightarrow I_n = -2ne^{-2n} - e^{-2n} + 1, \text{ ainsi } I_n = -2ne^{2n} - e^{-2n} + 1.$$

* Montrons que $I_n = 1 - (2n+1)e^{-2n}$.

$$\text{On a : } I_n = -2ne^{2n} - e^{-2n} + 1 = 1 - (2n+1)e^{-2n}.$$

D'où $I_n = 1 - (2n+1)e^{-2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 2 On pose $v_n = \frac{1}{2n+1} (1 - I_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

* Démontrons que la suite (v_n) est une suite géométrique en précisant le premier terme et la raison.

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ On a } v_n = \frac{1}{2n+1} (1 - I_n).$$

$$\text{Or } I_n = 1 - (2n+1)e^{-2n} \text{ donc } v_n = \frac{1}{2n+1} (1 - 1 + (2n+1)e^{-2n}) = \frac{1}{2n+1} \times (2n+1)e^{-2n} = e^{-2n}.$$

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_n = e^{-2n}.$$

$$\text{Alors } v_{n+1} = e^{-2(n+1)} = e^{-2n-2} = e^{-n} \times e^{-2} = v_n \times e^{-2}, \text{ ainsi } v_{n+1} = e^{-2} v_n.$$

D'où (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_1 = e^{-2 \times 1} = e^{-2}$ et de raison $q = e^{-2}$.

* Étudions le sens de variation de la suite (v_n) .

$$v_{n+1} - v_n = e^{-2(n+1)} - e^{-2n} = e^{-2} (e^{-2} - 1). \text{ Or } e^{-2} < 1, \text{ donc } e^{-2} - 1 < 0,$$

$$\text{ainsi } v_{n+1} - v_n = e^{-2} (e^{-2} - 1) < 0 \Rightarrow v_{n+1} - v_n < 0 \Rightarrow v_{n+1} < v_n.$$

D'où (v_n) est une suite décroissante.

* Vérifions si la suite (v_n) est convergente

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = e^{-2n} > 0$, alors (v_n) est minorée par 0, de plus, elle est décroissante.

D'où la suite (v_n) est convergente.

Autre méthode de montrer que la suite (v_n) est convergente :

Nous savons que la raison de la suite (v_n) est $q = e^{-2}$.

Comme $0 < q < 1$, alors la suite (v_n) est convergente et converge vers 0.

- 3 On pose $u_n = \text{Log}(v_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminons la nature de la suite (u_n) .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_n = e^{-2n}, \text{ alors } u_n = \text{Log}(e^{-2n}) = -2n, \text{ donc } u_{n+1} = -2((n+1)) = -2n - 2 = u_n - 2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n - 2.$$

Comme $u_{n+1} = u_n - 2$, alors (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$ et de premier terme $u_1 = -2$.

🌀 Problème 🌀

I. Soit F la fonction définie de $\mathbb{C} - \{1\}$ dans $\mathbb{C}$ par $F(z) = \frac{z^2}{i(1-z)}$.

1 Soit $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$.

* Montrons que la partie réelle de $F(z)$ est égale à $\frac{y(-x^2-y^2+2x)}{(1-x)^2+y^2}$.

$$F(z) = \frac{z^2}{i(1-z)} = \frac{(x+iy)^2}{i(1-x-iy)} = \frac{x^2+2ixy-y^2}{i(1-x)+y} = \frac{(x^2-y^2+2ixy)(-i(1-x)+y)}{(1-x)^2+y^2} = \frac{-i(1-x)(x^2-y^2)+y(x^2-y^2)+2xy(1-x)+2ixy^2}{(1-x)^2+y^2}, \text{ donc}$$

la partie réelle de $F(z)$ est $\frac{y(x^2-y^2+2xy(1-x))}{(1-x)^2+y^2} = \frac{yx^2-y^3+2xy-2x^2y}{(1-x)^2+y^2} = \frac{-x^2y-y^3+2xy}{(1-x)^2+y^2} = \frac{y(-x^2-y^2+2x)}{(1-x)^2+y^2}$.

D'où la partie réelle de $F(z)$ est égale à $\frac{y(-x^2-y^2+2x)}{(1-x)^2+y^2}$.

* Déterminons la partie imaginaire de $F(z)$.

D'après ce qui précède, $F(z) = \frac{-i(1-x)(x^2-y^2)+y(x^2-y^2)+2xy(1-x)+2ixy^2}{(1-x)^2+y^2}$, donc la partie imaginaire de $F(z)$ est

$$\frac{-(1-x)(x^2-y^2)+2xy^2}{(1-x)^2+y^2} = \frac{-x^2+y^2+x^3-xy^2+2xy^2}{(1-x)^2+y^2} = \frac{-x^2+y^2+x^3+xy^2}{(1-x)^2+y^2} = \frac{x^3-x^2+xy^2+y^2}{(1-x)^2+y^2}.$$

D'où la partie imaginaire de $F(z)$ est $\frac{x^3-x^2+xy^2+y^2}{(1-x)^2+y^2}$.

2 * Déterminons l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que $F(z)$ soit imaginaire pur.

$F(z)$ est imaginaire pur si sa partie réelle est égale à 0, donc si $\frac{y(-x^2-y^2+2x)}{(1-x)^2+y^2} = 0$.

Or $\frac{y(-x^2-y^2+2x)}{(1-x)^2+y^2} = 0 \iff y(-x^2-y^2+2x) = 0$ et $(1-x)^2+y^2 \neq 0$ c'est-à-dire $y = 0$ ou $-x^2-y^2+2x = 0$ avec $(x, y) \neq (1, 0)$.

Notons D la droite d'équation $y = 0$.

Considérons $-x^2-y^2+2x = 0$.

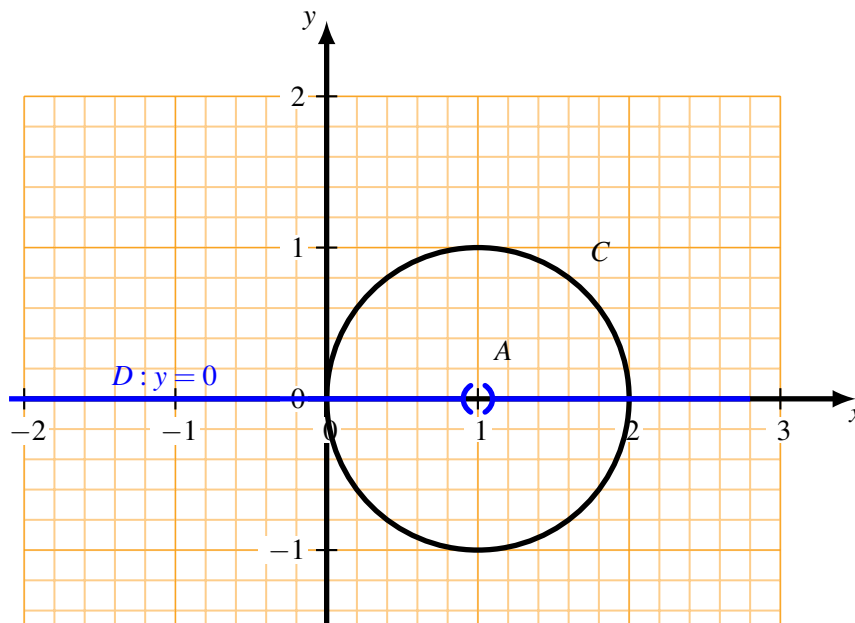
En multipliant cette équation par -1 , on obtient $x^2+y^2-2x = 0 \Rightarrow x^2-2x+y^2 = 0$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - (-1)^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Il s'agit de l'équation du cercle C de centre $A(1, 0)$ et de rayon $r = 1$.

Donc des points M du plan complexe d'affixe z tels que $F(z)$ soit imaginaire pur est la réunion de la droite D privée de A et du cercle C .

* Représentons cet ensemble



II. Soit la fonction définie par $f(x) = |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

1 Déterminons l'ensemble de définition de f .

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1-x}{1+x} > 0 \text{ et } 1+x \neq 0 \right\}.$$

Posons $1-x=0$; $1+x=0$. Alors $x=1$; $x=-1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{1-x}{1+x}$	$-$	$+$	0	$-$

Comme $1+x \neq 0$, donc $x \neq -1$, alors $D_f =]-1; 1]$

2 Étudions la continuité et la dérivabilité de f en $x=0$ et en $x=1$.

* Étudions la continuité de f en $x=0$.

$$f(0) = |0| \sqrt{\frac{1-0}{1+0}} = 0 \times 1 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(|x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = |0| \sqrt{\frac{1-0}{1+0}} = 0 \times 1 = 0, \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0,$$

donc f est continue en $x=0$.

* Étudions la continuité de f en $x=1$.

$$f(1) = |1| \sqrt{\frac{1-1}{1+1}} = 1 \times 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(|x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = |1| \sqrt{\frac{1-1}{1+1}} = 1 \times 0 = 0, \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0,$$

donc f est continue en $x=1$.

* Étudions la dérivabilité de f en $x=0$.

Comme il y a la présence de la valeur absolue de x qui peut varier selon que x est positif ou négatif nous allons étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{|x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{-x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = -\sqrt{\frac{1-0}{1+0}} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{|x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = \sqrt{\frac{1-0}{1+0}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$, alors f n'est pas dérivable en $x=0$.

* Étudions la dérivabilité de f en $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{|x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{|x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{|x| \sqrt{1-x}}{(x-1)\sqrt{1+x}} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-|x|}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sqrt{1-x}\sqrt{1+x} \right) = 0^+ \text{ et } -|x| < 0.$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = -\infty.$

Donc f n'est pas dérivable en $x = 1$.

3 Montrons que pour $x \in]-1, 0[\cup]0; 1[$, $f'(x) = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{(1-x-x^2)}{x(1-x^2)}.$

Soit $x \in]-1, 0[\cup]0; 1[$. $f(x) = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$

On sait que pour tout nombre réel x , $|x| = \sqrt{x^2}$, donc $f(x) = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \sqrt{\frac{x^2(1-x)}{1+x}} = \sqrt{\frac{x^2-x^3}{1+x}}.$

Posons $u(x) = \frac{x^2-x^3}{1+x}$. Alors $f(x) = \sqrt{u(x)}$, donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$

$$\text{On a } u'(x) = \left(\frac{x^2-x^3}{1+x} \right)' = \frac{(2x-3x^2)(1+x) - (x^2-x^3)}{(1+x)^2} = \frac{2x-3x^2+2x^2-3x^3-x^2+x^3}{(1+x)^2} = \frac{-2x^3-2x^2+2x}{(1+x)^2} = \frac{2x(1-x-x^2)}{(1+x)^2}$$

$$\Rightarrow u'(x) = \frac{2x(1-x-x^2)}{(1+x)^2}$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{2} \times u'(x) \frac{1}{\sqrt{u(x)}} = \frac{1}{2} \times u'(x) \frac{\sqrt{u(x)}}{u(x)} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} \times f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{2x(1-x-x^2)}{(1+x)^2}}{\frac{x^2-x^3}{1+x}} \times f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x(1-x-x^2)}{(1+x)^2} \times \frac{1+x}{x^2(1-x)} \times |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{(1-x-x^2)}{(1+x)} \times \frac{1}{x(1-x)} \times f(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = f(x) \times \frac{(1-x-x^2)}{x(1-x^2)} = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{(1-x-x^2)}{x(1-x^2)}.$$

D'où pour $x \in]-1, 0[\cup]0; 1[$, $f'(x) = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{(1-x-x^2)}{x(1-x^2)}.$

4 a Étudions les variations de f .

On a pour $x \in]-1, 0[\cup]0; 1[$, $f'(x) = |x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \times \frac{(1-x-x^2)}{x(1-x^2)} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$ a le même signe que $\frac{1-x}{1+x}$

et d'après II. 1) il est positif, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x(1-x-x^2)$.

Soit $x(1-x-x^2) = 0$. Alors $x = 0$ ou $1-x-x^2 = 0$.

$$\Delta = ((-1)^2 - 4(-1)(1)) = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}, \text{ donc } x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

$x_1 \in]-1; 1]$ et $x_2 \notin]-1; 1]$, donc $x(1-x-x^2) = 0$ si $x = 0$ ou $x = x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

On a le tableau de signe suivant en tenant compte de $x_2 < x_1$:

x	-1	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	1
x		-	0	+
$1-x-x^2$		+	+	0
$x(1-x-x^2)$		-	0	+

Donc si $x \in]-1; 0[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $] -1; 0[$.

Si $x \in \left] 0; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $\left] 0; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$.

Si $x \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1 \right]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1 \right]$.

- b** Déterminons les équations des demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1, et de l'asymptote à la courbe (C) représentant la fonction de f .

L'équation de la demi-tangente à gauche en 0 est $y = f'_g(x-0) + f(0) = -1 \times x + 0$ donc $y = -x$

L'équation de la demi-tangente à droite en 0 est $y = f'_d(x-0) + f(0) = 1 \times x + 0$ donc $y = x$.

Comme f n'est pas dérivable en 1, alors l'équation de la demi-tangente verticale est $x = 1$ et $y \leq f(1)$ c'est-à-dire $x = 1$ et $y \leq 0$.

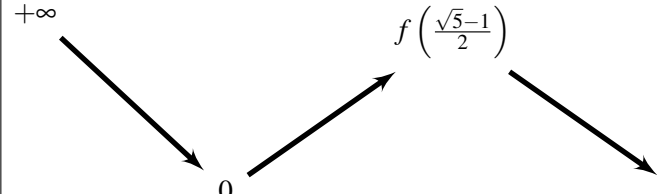
$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(|x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$. On a $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = +\infty$ car lorsque x tend vers -1^+ , $1-x = 2$

et $1+x$ tend vers 0^+ . Ainsi $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(|x| \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = +\infty$.

Donc l'équation de l'asymptote à la courbe (C) représentant la fonction de f est $x = -1$.

- c** Construisons (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

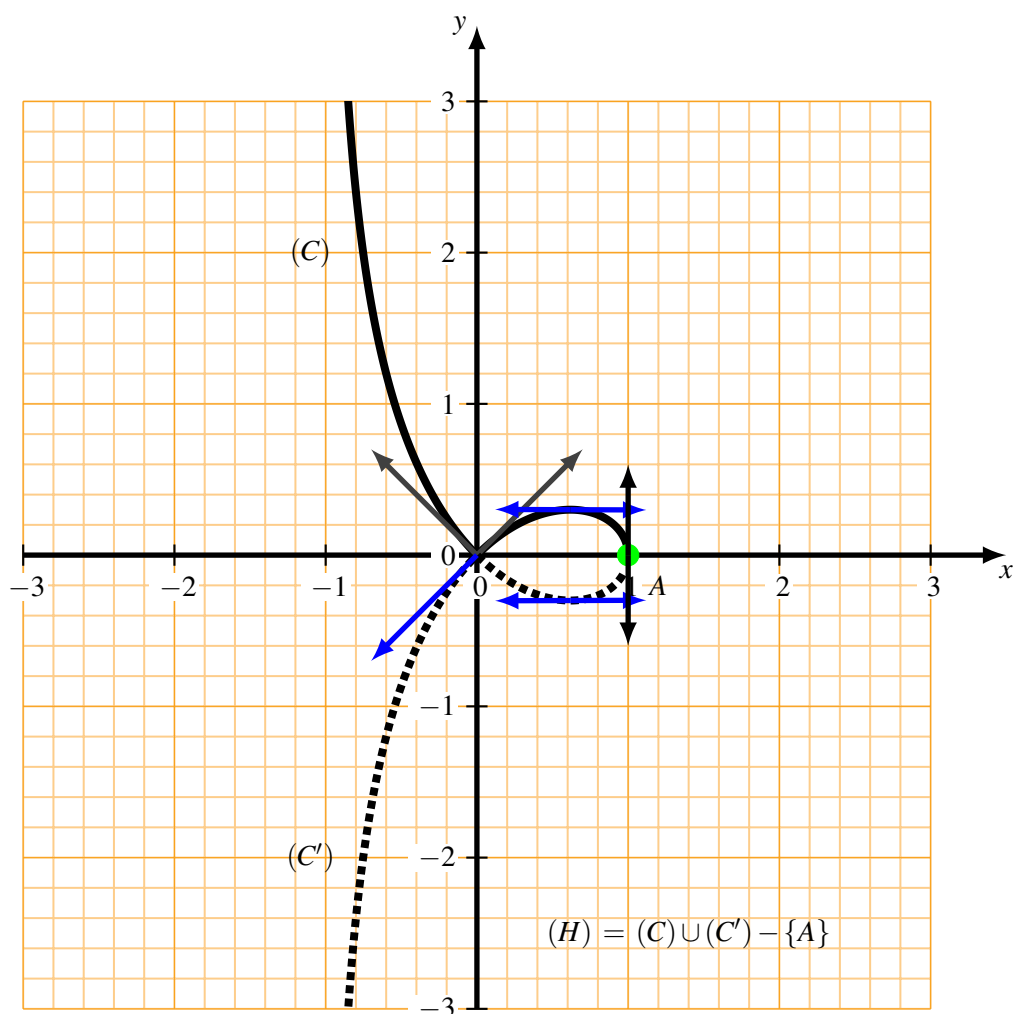
On a le tableau de variation de la fonction f suivant :

x	-1	0		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	1			
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	-1	$+1$	$+$	0	$-$	$\vdots$
f	$+\infty$			$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$		0		

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,62.$$

$$f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \left| \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| \times \sqrt{\frac{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \times \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}}$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \times \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{2(5\sqrt{5}-11)}}{2} \approx 0,3.$$



5 * Déterminons l'ensemble H des points M d'affixe z tels que $F(z)$ soit réel.

$F(z)$ est réel si la partie imaginaire de $F(z)$ est égale à 0, donc si $\frac{x^3 - x^2 + xy^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2} = 0$.

Or $\frac{x^3 - x^2 + xy^2 + y^2}{(1-x)^2 + y^2} = 0 \iff x^3 - x^2 + xy^2 + y^2 = 0$ et $(1-x)^2 + y^2 \neq 0$

$\iff y^2(1+x) = x^2(1-x)$ et $(x, y) \neq (1, 0) \iff y^2 = \frac{x^2(1-x)}{1+x}$ et $(x, y) \neq (1, 0)$.

Comme $x \in]-1; 1]$, alors $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$, donc $y^2 = \frac{x^2(1-x)}{1+x}$.

Ainsi $y = \sqrt{\frac{x^2(1-x)}{1+x}}$ ou $y = -\sqrt{\frac{x^2(1-x)}{1+x}} \iff y = |x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ou $y = -|x|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ car $\sqrt{x^2} = |x|$, donc $y = f(x)$ ou $y = -f(x)$.

▮ Si $y \geq 0$, alors $y = f(x)$ avec $(x, y) \neq (1, 0)$, donc l'ensemble (H) est confondue avec la courbe (C) de f privée du point de $A(1; 0)$.

▮ Si $y \leq 0$, alors $y = -f(x)$ avec $(x, y) \neq (1, 0)$, donc l'ensemble (H) est le symétrique de la courbe (C) de f par rapport à l'axe des abscisses privée du point de $A(1; 0)$.

D'où l'ensemble (H) est la réunion de la courbe (C) de f et de la courbe (C') symétrique de la courbe (C) de f par rapport à l'axe des abscisses privée du point de $A(1; 0)$, c'est-à-dire $(H) = (C) \cup (C') - \{A\}$.

* Déduisons la représentation de H de la courbe (C) .

Voir le repère précédent, à la question 4) pour le tracé de H .

III. Soit M un point mobile en mouvement dans le plan précédent dont les coordonnées à l'instant t sont telles que :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y = \sin(t) - tg\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases} \quad t \in [0, \pi[.$$

1 Déterminons la trajectoire de M .

Comme $t \in [0, \pi[$, alors $x = \cos t \in]-1; 1]$ On sait que $\cos(t) = \frac{1-tg^2(\frac{t}{2})}{1+tg^2(\frac{t}{2})}$ et $\sin(t) = \frac{2tg(\frac{t}{2})}{1+tg^2(\frac{t}{2})}$.

$$\text{Donc } x(t) = \cos(t) = \frac{1-tg^2(\frac{t}{2})}{1+tg^2(\frac{t}{2})} \Rightarrow x = \frac{1-tg^2(\frac{t}{2})}{1+tg^2(\frac{t}{2})}.$$

$$y = \sin(t) - tg\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2tg(\frac{t}{2})}{1+tg^2(\frac{t}{2})} - tg\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2tg(\frac{t}{2}) - tg(\frac{t}{2}) - tg^3(\frac{t}{2})}{1+tg^2(\frac{t}{2})} = \frac{tg(\frac{t}{2}) - tg^3(\frac{t}{2})}{1+tg^2(\frac{t}{2})} = \frac{1-tg^2(\frac{t}{2})}{1+tg^2(\frac{t}{2})} \times tg\left(\frac{t}{2}\right) = x \times tg\left(\frac{t}{2}\right).$$

$$\text{Puisque } x = \frac{1-tg^2(\frac{t}{2})}{1+tg^2(\frac{t}{2})}, \text{ alors } (1+tg^2(\frac{t}{2}))x = 1-tg^2(\frac{t}{2}) \Rightarrow xt^2g^2(\frac{t}{2}) + tg^2(\frac{t}{2}) = 1-x$$

$$\Rightarrow tg^2(\frac{t}{2})(1+x) = 1-x \Rightarrow tg^2(\frac{t}{2}) = \frac{1-x}{1+x}, \text{ donc } tg(\frac{t}{2}) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ ou } tg(\frac{t}{2}) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ car pour } x \in]-1; 1], \frac{1-x}{1+x} > 0.$$

$$\text{Comme } t \in [0, \pi[, \text{ alors } \frac{t}{2} \in [0; \frac{\pi}{2}[, \text{ donc } tg(\frac{t}{2}) > 0, \text{ par conséquent } tg(\frac{t}{2}) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$\text{Ainsi } y = x \times \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$\text{Si } x \in]-1; 0], \text{ alors } |x| = -x \Rightarrow x = -|x|, \text{ donc } y = -|x| \times \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = -f(x).$$

D'où la trajectoire de M est la courbe (C') dans $] -1; 0]$.

$$\text{Si } x \in [0; 1], \text{ alors } |x| = x \Rightarrow x = |x|, \text{ donc } y = |x| \times \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = f(x).$$

D'où la trajectoire de M est la courbe (C) dans $[0; 1]$.

On conclut que la trajectoire du mobile M est la réunion de la courbe (C) de f dans $[0; 1]$ et de la courbe (C') symétrique de la courbe (C) de f par rapport à l'axe des abscisses dans $] -1; 0]$.

* Représentons cette trajectoire.

Voir figure :

Elle est confondue avec la courbe (C) de f dans $[0; 1]$ et la courbe (C') symétrique de la courbe (C) de f par rapport à l'axe des abscisses dans $] -1; 0]$.

* Précisons le sens de parcours de M sur cette trajectoire.

À l'instant $t = 0$, $x = \cos 0 = 1$ et $y = \sin 0 - tg(0) = 0$, donc le point M est au point $A(1; 0)$.

Si t croît de 0 à π le point M va de A à plus l'infini car $\lim_{t \rightarrow \pi^-} \left(\sin(t) - tg\left(\frac{t}{2}\right) \right) = 0 - (-\infty) = +\infty$.

2 Construisons les représentants des vecteurs vitesse et accélération du point mobile M aux instants $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Le vecteur vitesse } \vec{V}(t) \text{ est défini par } \vec{V}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt} \text{ c'est-à-dire } \vec{V}(t) : \begin{cases} x' = -\sin(t) \\ y' = \cos(t) - \frac{1}{2}(1+tg^2(\frac{t}{2})) \end{cases}$$

$$\text{Le vecteur accélération } \vec{\Gamma}(t) \text{ est défini par } \vec{\Gamma}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} \text{ c'est-à-dire } \vec{\Gamma}(t) : \begin{cases} x'' = -\cos(t) \\ y'' = -\sin(t) - \frac{1}{2}tg(\frac{t}{2})(1+tg^2(\frac{t}{2})) \end{cases}$$

À l'instant $t = 0$, $x = \cos 0 = 1$ et $y \sin 0 - tg(0) = 0$, donc le point M est au point $A(1; 0)$ de vecteur vitesse $\vec{V}_0(0; -\frac{1}{2})$ et un vecteur accélération $\vec{\Gamma}_0(-1; 0)$.

A l'instant $t = \frac{\pi}{2}$, $x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $y = \sin \frac{\pi}{2} - tg \frac{\pi}{4} = 1 - 1 = 0$, donc le point M est au point $O(0; 0)$ de vecteur vitesse $\vec{V}_1(-1; -1)$ et un vecteur accélération $\vec{\Gamma}_0(0; -2)$.

Voir figure pour la représentation de ces représentants en bleus sur le graphique précédent.

3 Étudions la nature du mouvement.

Soit $t \in [0, \pi[$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}\vec{V} \bullet \vec{\Gamma} &= -\sin(t) \times (-\cos t) + \left(\cos t - \frac{1}{2} \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right) \left(-\sin t - \frac{1}{2} tg \left(\frac{t}{2} \right) \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right) \\ \vec{V} \bullet \vec{\Gamma} &= -\sin(t) \times (-\cos t) + \left(\cos t - \frac{1}{2} \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right) \left(-\sin t - \frac{1}{2} tg \left(\frac{t}{2} \right) \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \cos t tg \left(\frac{t}{2} \right) \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \sin t \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \frac{1}{4} tg \left(\frac{t}{2} \right) \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2\end{aligned}$$

Comme $\cos(t) = \frac{1 - tg^2(\frac{t}{2})}{1 + tg^2(\frac{t}{2})}$ et $\sin(t) = \frac{2tg(\frac{t}{2})}{1 + tg^2(\frac{t}{2})}$, alors

$$\begin{aligned}\vec{V} \bullet \vec{\Gamma} &= -\frac{1}{2} \cos t tg \left(\frac{t}{2} \right) \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \frac{1}{2} \sin t \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) + \frac{1}{4} tg \left(\frac{t}{2} \right) \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} tg \left(\frac{t}{2} \right) \left(1 - tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) + tg \left(\frac{t}{2} \right) + \frac{1}{4} tg \left(\frac{t}{2} \right) \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} tg \left(\frac{t}{2} \right) \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) + tg \left(\frac{t}{2} \right) + \frac{1}{4} tg \left(\frac{t}{2} \right) \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} tg \left(\frac{t}{2} \right) \left(1 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right) \left(3 + tg^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right)\end{aligned}$$

Comme pour tout $t \in [0; \pi[$, $tg \left(\frac{t}{2} \right) > 0$, alors $\vec{V} \bullet \vec{\Gamma} > 0$.

D'où le mouvement du mobile M est accéléré.

Sujet 3

Session de 1985

Exercice 1

Soit f le polynôme tel que, pour tout z complexe : $f(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 - (14 - 39i)z + 50$.

- 1** Montrons que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution imaginaire pur que nous déterminerons.

Posons $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors } (ib)^3 - (7 - 9i)(ib)^2 + (14 - 39i)(ib) + 50 = 0 \Rightarrow -ib^3 + 7b^2 - 9ib^2 - 14ib - 39b + 50 = 0$$

$$\Rightarrow i(-b^3 + 9b^2 - 14b) + 7b^2 - 39b + 50 \Rightarrow \begin{cases} -b^3 + 9b^2 - 14b = 0 & \textcircled{1} \\ 7b^2 - 39b + 50 = 0 & \textcircled{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b^3 - 9b^2 - 14b = 0 & \textcircled{1} \\ 7b^2 + 39b + 50 = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Considérons $\textcircled{2}$: $7b^2 - 39b + 50 = 0$.

$$\Delta = (-39)^2 - 4(7)(50) = 1521 - 1400 = 121 \Rightarrow \Delta = 121 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{121} = 11 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 11.$$

$$b_1 = \frac{39-11}{2 \times 7} = \frac{28}{14} = 2; b_2 = \frac{39+11}{2 \times 7} = \frac{50}{14} = \frac{25}{7}.$$

Vérifions si $b = \frac{25}{7}$ ou $b = 2$ est solution de $\textcircled{1}$:

$$\text{Pour } b = \frac{25}{7}, \text{ alors } -\left(\frac{25}{7}\right)^3 + 9\left(\frac{25}{7}\right)^2 - 14\left(\frac{25}{7}\right) = -\frac{15625}{343} + \frac{5625}{49} + \frac{350}{7} = \frac{-15625 + 39375 - 17150}{343} = \frac{6600}{343} \neq 0,$$

donc $b = \frac{25}{7}$ ne convient pas.

$$\text{Pour } b = 2, \text{ alors } -(2)^3 + 9 \times (2)^2 + 14 = -8 + 36 - 28 = -44 + 44 = 0, \text{ donc } b = 2 \text{ convient.}$$

D'où l'équation (E) admet une solution une solution imaginaire pur $z = 2i$

- 2** Résolvons l'équation $f(z) = 0$.

D'après ce qui précède, $f(2i) = 0$ ce qui implique que $2i$ est solution de l'équation $f(z) = 0$, donc on peut factoriser $P(z)$ par $z - 2i$. Ainsi il existe $Q(z) = az^2 + bz + c$ avec a, b, c appartenant à $\mathbb{C}$ tel que $P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$.

Développons $(z - 2i)(az^2 + bz + c)$.

$$\text{On a } (z - 2i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2iaz^2 - 2ibz - 2ic = az^3 + (b - 2ia)z^2 + (c - 2ib)z - 2ic.$$

Comme $f(z) = z^3 - (7 + 9i)z^2 - (14 - 39i)z + 50$, alors par identification on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ia = -7 - 9i \\ c - 2ib = -14 + 39i \\ -2ic = 50 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 - 9i + 2ia = -7 - 9i + 2i \\ c = 14 + 39i + 2ib \\ c = \frac{50}{-2i} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -7 - 7i \\ c = -14 + 39i - 14i + 14 = 25i \\ c = 25i \end{cases}$$

Donc, $P(z) = (z - 2i)(z^2 - (7 + 7i)z + 25i)$ ce qui implique que $P(z) = 0$ si et seulement si $z - 2i = 0$

ou $z^2 - (7 + 7i)z + 25i = 0$, si et seulement si $z = 2i$ ou $z^2 - (7 + 7i)z + 25i = 0$.

Considérons l'équation : $z^2 - (7 + 7i)z + 25i = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-(7 + 7i))^2 - 4(1)(25i) = 49 + 98i - 49 - 100i = -2i.$$

Déterminons les racines carrées de Δ . Soit $d = x + iy$ tel que $d^2 = \Delta$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|\Delta^2| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

$$\text{Donc } d^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & \textcircled{1} \\ x^2 - y^2 = 0 & \textcircled{2} \\ 2xy = -2 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 2 + 0 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow x^2 + y^2 - x^2 + y^2 = 2 - 0 \Rightarrow 2y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = \frac{2}{2} \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = -1$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow xy = \frac{-2}{2} \Rightarrow xy = -2 < 0, \text{ donc } x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires. Ainsi } d = 1 - i \text{ ou } d = -1 + i.$$

$$\text{On a : } z = \frac{-b-d}{2a} = \frac{7+7i-1+i}{2} = \frac{6+8i}{2} = 3+4i \text{ ou } z = \frac{-b+d}{2a} = \frac{7+7i+1-i}{2} = \frac{8+6i}{2} = 4+3i,$$

$$\text{d'où les solutions de l'équation : } z^2 - (7+7i)z + 25i = 0 \text{ sont : } z = 3+4i; 4+3i.$$

Par suite les solutions de l'équation $f(z) = 0$ sont $2i; 3+4i; 4+3i$.

3 * Déterminons le barycentre G des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 1; -1 et 1.

L'affixe du barycentre G des points A, B, C, D affectés des coefficients respectifs 1; -1 et 1 est :

$$\frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = \frac{2i - (3+4i) + 4+3i}{1 - 1 + 1} = \frac{1+i}{1} = 1+i.$$

Donc $G(1; 1)$.

* Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.

On sait que G est barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1; -1 et 1. Donc

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 + MC^2 &= (\vec{MG} + \vec{GA})^2 - (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 \\ &= \|\vec{MG}\|^2 - 2\vec{MG}\vec{GA} + \|\vec{GA}\|^2 - \|\vec{MG}\|^2 + 2\vec{MG}\vec{GB} - \|\vec{GB}\|^2 + \|\vec{MG}\|^2 - 2\vec{MG}\vec{GC} + \|\vec{GC}\|^2 \\ &= \|\vec{MG}\|^2 + 2\vec{MG}(\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC}) + \|\vec{GA}\|^2 - \|\vec{GB}\|^2 + \|\vec{GC}\|^2 \end{aligned}$$

Or $\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ car G est barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 1; -1 et 1.

$$\text{Donc } MA^2 - MB^2 + MC^2 = \|\vec{MG}\|^2 + \|\vec{GA}\|^2 - \|\vec{GB}\|^2 + \|\vec{GC}\|^2 = MG^2 + GA^2 - GB^2 + GC^2.$$

$$\text{Par conséquent } MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4 \Rightarrow MG^2 + GA^2 - GB^2 + GC^2 = 4 \Rightarrow MG^2 = 4 - GA^2 + GB^2 - GC^2.$$

$$GA^2 = \left(\sqrt{(0-1)^2 + (2-1)^2} \right)^2 = 1 + 1 = 2;$$

$$GB^2 = \left(\sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} \right)^2 = 4 + 9 = 13;$$

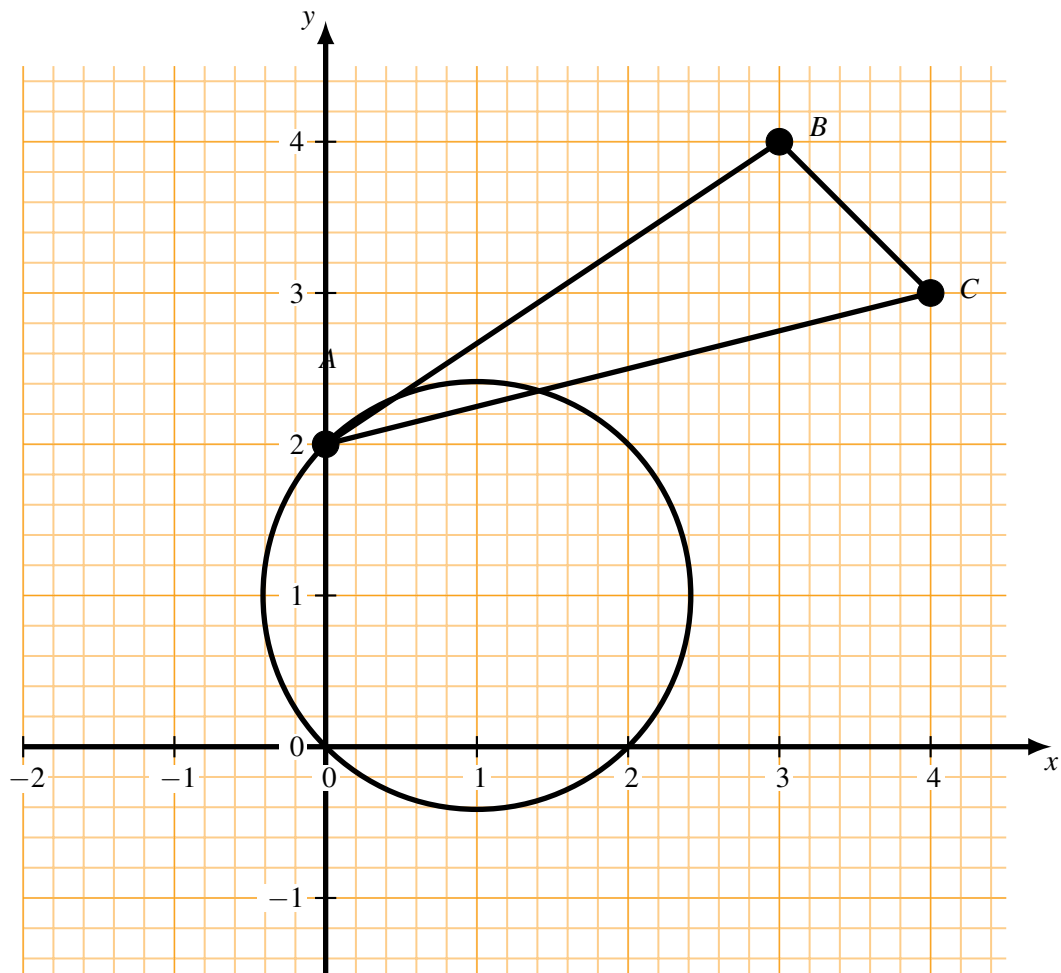
$$GC^2 = \left(\sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} \right)^2 = 9 + 4 = 13;$$

$$\text{Ainsi } MG^2 = 4 - 2 + 13 - 13 = 2 \Rightarrow MG^2 = 2 \Rightarrow MG = \sqrt{2}. \text{ Donc } MG = \sqrt{2}.$$

D'où l'ensemble des points M du plan cherché est le cercle de centre G est de rayon $r = \sqrt{2}$.

* Construisons l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 4$.

On sait que l'ensemble des points M du plan cherché est le cercle de centre G est de rayon $r = \sqrt{2}$. D'où :



❧ ❧ **Exercice 2** ❧ ❧

- 1 Dressons le tableau de variation de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par : $f(x) = x^6(1-x)^{94}$.

$$D_f = [0; 1].$$

La fonction f est continue et dérivable sur D_f et pour tout $x \in D_f$, on a :

$$f'(x) = 6x^5(1-x)^{94} - 94x^6(1-x)^{93} = 2x^5(1-x)^{93} [3(1-x) - 47x] = 2x^5(1-x)^{93} (3 - 50x).$$

Pour tout $x \in D_f$, $2x^5(1-x)^{93} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - 50x$.

Soit $3 - 50x = 0$. Alors $-50x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{-50} = \frac{3}{50}$.

x	0	$\frac{3}{50}$	1
$3 - 94x$	⋮	+	⋮
	⋮	0	⋮
	⋮	-	⋮

Donc si $x \in [0, \frac{3}{50}]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0, \frac{3}{50}]$ et si $x \in [\frac{3}{50}, 1]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $[\frac{3}{50}, 1]$.

D'où le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

Donc, si $x \in]-\infty; 1[$, alors $u'(x) < 0$ donc u est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$.

Si $x \in]1; +\infty[$, alors $u'(x) > 0$, donc u est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

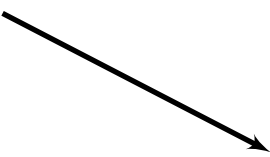
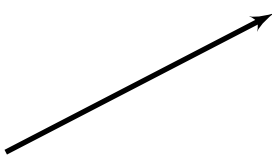
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + \text{Log}|1-x|) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} |1-x| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Log}|1-x| = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \text{Log}|1-x|) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} |1-x| = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log}|1-x| = +\infty.$$

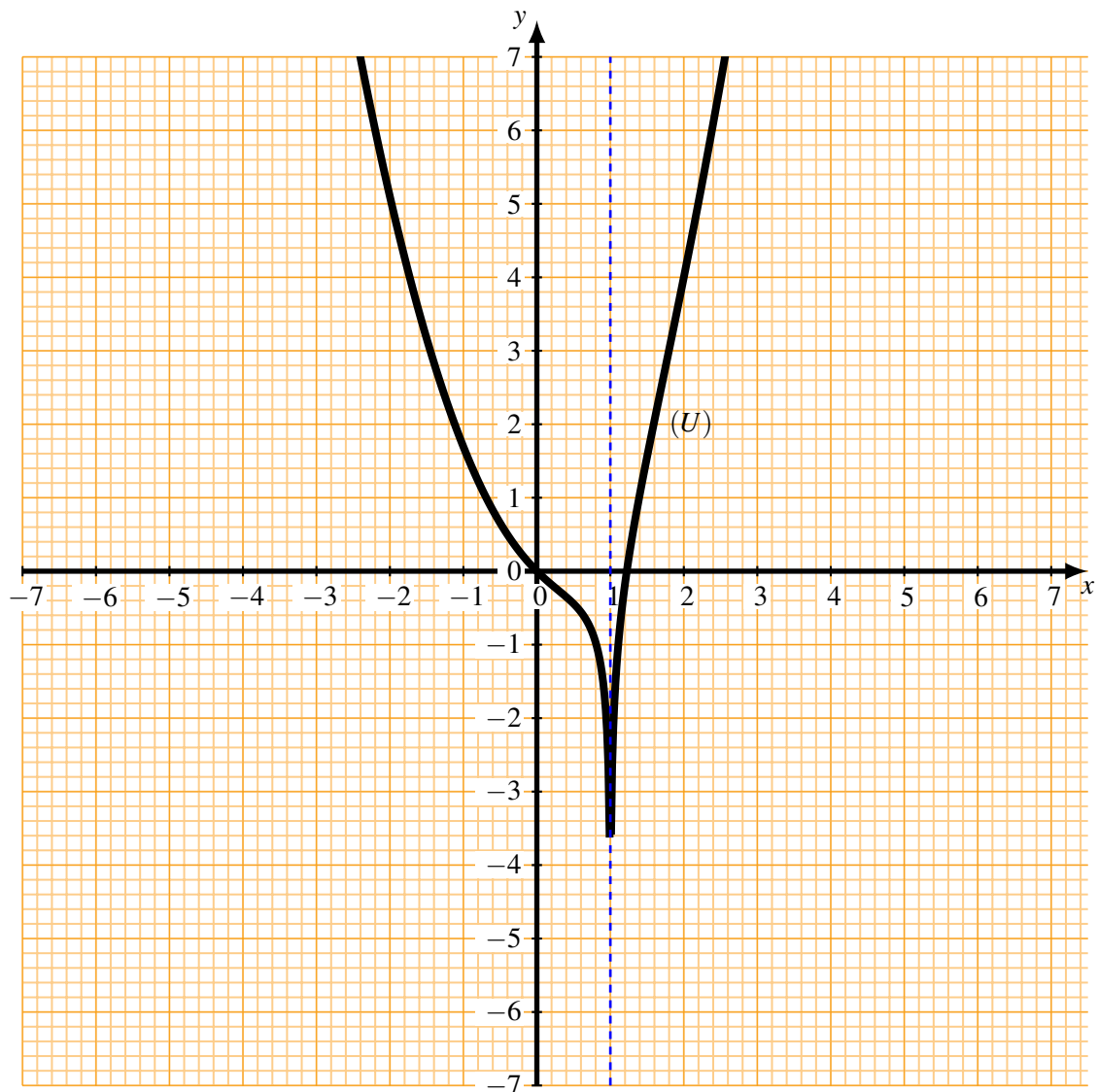
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} u(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + \text{Log}|1-x|) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^+} |1-x| = 0^+.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \text{Log}|1-x|) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^+} |1-x| = 0^+.$$

D'où le tableau de variation de u suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u'(x)$	$-$		$+$
u	$+\infty$ 	$-\infty$	$+\infty$ 

- 2 Construisons la représentation graphique (U) de u dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.



- 3 Dédudons de la question précédente que l'équation $u(x) = 0$ possède exactement deux solutions, l'une $x_0 = 0$ et l'autre x_1 strictement comprise entre 1 et 2.

On remarque que $u(0) = 0^2 + \text{Log}|1-0| = \text{Log}(1) = 0$, donc $x = 0$ est une solution de l'équation $u(x) = 0$.

Aussi, la fonction u est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$ d'après la question précédente,

de plus $\lim_{x \rightarrow 1^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + \text{Log}|1-x|) = 1 - \infty = -\infty < 0$ et $u(2) = 2^2 + \text{Log}|2-1| = 4 + 0 = 4 > 0$

implique $\lim_{x \rightarrow 1^+} u(x) \times u(2) < 0$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution x_1 comprise entre 1 et 2.

D'où l'équation $u(x) = 0$ possède exactement deux solutions, l'une $x_0 = 0$ et l'autre x_1 strictement comprise entre 1 et 2.

- 4 Soit v la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $v(x) = -(x-1)^2 + \text{Log}|1-x|$.

$$D_v = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[.$$

Étudions le sens de variation de v et établissons que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $v(x) \leq -\frac{1}{2}(1 + \text{Log}(2))$.

La fonction v est dérivable sur D_v et pour tout $x \in D_v$, on a :

$$v'(x) = -2(x-1) + \frac{(1-x)'}{1-x} = -2x+2 - \frac{1}{1-x} = \frac{-2x+2+2x^2-2x-1}{1-x} = \frac{-2x^2+4x-1}{x-1} \text{ donc } v'(x) = \frac{-2x^2+4x-1}{x-1}.$$

Soit $x-1 = 0$; $-2x^2+4x-1 = 0$. Alors $x = 1$ et pour $-2x^2+4x-1 = 0$ on a : $\Delta = b^2 - 4ac$

c'est-à-dire $\Delta = 4^2 - 4(-2)(-1) = 16 - 8 = 8 > 0$, donc $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2\sqrt{2}}{-4} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2\sqrt{2}}{-4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

x	$-\infty$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$-2x^2+4x-1$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\frac{-2x^2+4x-1}{x-1}$	$+$	0	$-$	$+$	$-$

Ainsi, si $x \in]-\infty; \frac{2-\sqrt{2}}{2}] \cup]1; \frac{2+\sqrt{2}}{2}]$, alors $v'(x) \geq 0$ donc v est croissante sur $]-\infty; \frac{2-\sqrt{2}}{2}] \cup]1; \frac{2+\sqrt{2}}{2}]$.

Si $x \in [\frac{2-\sqrt{2}}{2}; 1[\cup [\frac{2+\sqrt{2}}{2}; +\infty[$, alors $v'(x) \leq 0$, donc v est décroissante sur $[\frac{2-\sqrt{2}}{2}; 1[$ et $[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; +\infty[$.

Comme v est croissante sur $]-\infty; \frac{2-\sqrt{2}}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{2-\sqrt{2}}{2}; 1[$ alors v admet un maximum sur $]-\infty; 1[$ au point $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Ainsi $\forall x \in]-\infty; 1[$, $v(x) \leq v(\frac{2-\sqrt{2}}{2})$.

$$\begin{aligned} \text{Or } v\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) &= -\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \text{Log}\left|1 + \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right| = -\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \text{Log}\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = -\frac{1}{2} + \text{Log}(\sqrt{2}) - \text{Log}(2) \\ \Rightarrow v\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{Log}(2) - \text{Log}(2) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{Log}(2) = -\frac{1}{2}(1 + \text{Log}(2)). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in]-\infty; 1[, v(x) \leq -\frac{1}{2}(1 + \text{Log}(2)) \quad (\star).$$

De même, puisque v est croissante sur $]1; \frac{2+\sqrt{2}}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{2+\sqrt{2}}{2}; +\infty[$ alors v admet un maximum sur $]1; +\infty[$ au point $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Ainsi $\forall x \in]1; +\infty[$, $v(x) \leq v(\frac{2+\sqrt{2}}{2})$.

$$\begin{aligned} \text{Or } v\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) &= -\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 + \text{Log}\left|1 + \frac{-2+\sqrt{2}}{2}\right| = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \text{Log}\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = -\frac{1}{2} + \text{Log}(\sqrt{2}) - \text{Log}(2) \\ \Rightarrow v\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{Log}(2) - \text{Log}(2) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{Log}(2) = -\frac{1}{2}(1 + \text{Log}(2)). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall x \in]1; +\infty[, v(x) \leq -\frac{1}{2}(1 + \text{Log}(2)) \quad (\star\star).$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, on conclut que : pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $v(x) \leq -\frac{1}{2}(1 + \text{Log}(2))$

II. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^2 + \text{Log}|1-x|}{1-x}$ et (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

1 À l'aide des résultats de la partie I, étudions les variations de f .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1-x \neq 0\}. \text{ Soit } 1-x=0. \text{ Alors } x=1, \text{ donc } D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[.$$

La fonction f est dérivable sur D_f et pour tout $x \in D_f$, on a :

$$f'(x) = \frac{(2x + \frac{-1}{1-x}) \times (1-x) + 1 \times (x^2 + \text{Log}|1-x|)}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 - 1 + x^2 + \text{Log}|1-x|}{(1-x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 1 + \text{Log}|1-x|}{(1-x)^2} = \frac{v(x)}{(1-x)^2}.$$

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{v(x)}{(1-x)^2}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $(1-x)^2 > 0$, alors le signe de $f'(x)$ est celui de $v(x)$.

Or, d'après I 4), pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $v(x) \leq -\frac{1}{2}(1 + \text{Log}(2)) < 0$, donc $v(x) < 0$.

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f'(x) < 0$.

D'où f est strictement décroissante sur $D_f =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + \text{Log}|1-x|}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + \frac{\text{Log}|1-x|}{1-x} \right).$$

Posons $X = 1 - x$. Alors $x = 1 - X$; $x^2 = 1 - 2X + X^2$ et quand x tend vers $-\infty$, X tend vers $+\infty$,

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{X} - 2 + X + \frac{\text{Log}|X|}{X} \right) = 0 - 2 + \infty + 0 = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \text{Log}|1-x|}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{1-x} + \frac{\text{Log}|1-x|}{1-x} \right).$$

Posons $X = 1 - x$. Alors $x = 1 - X$; $x^2 = 1 - 2X + X^2$ et quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $-\infty$, donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{X} - 2 + X + \frac{\text{Log}|X|}{X} \right) = 0 - 2 - \infty + 0 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2 + \text{Log}|1-x|}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2}{1-x} \times (1 + \text{Log}|1-x|) \right).$$

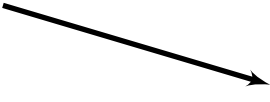
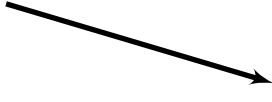
$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{1-x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \text{Log}|1-x| = -\infty.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^2}{1-x} \times (1 + \text{Log}|1-x|) \right) = +\infty(-\infty) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2 + \text{Log}|1-x|}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2}{1-x} \times (1 + \text{Log}|1-x|) \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{1-x} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \text{Log}|1-x| = -\infty.$$

D'où le tableau de variation de f suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
f	$+\infty$ 		$+\infty$ 
		$-\infty$	$-\infty$

- 2 Montrons que la droite $(D) : y = -x - 1$ est asymptote à (C) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \text{Log}|1-x|}{1-x} + x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + \text{Log}|1-x| + 1 - x^2}{1-x} \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\text{Log}|1-x| + 1}{1-x} \right).$$

Posons $X = 1 - x$. Quand x tend vers $+\infty$, X tend vers $-\infty$,

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x - 1)) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{\text{Log}|X| + 1}{X} \right) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(\frac{\text{Log}|X|}{X} + \frac{1}{X} \right) = 0 + 0 = 0.$$

D'où la droite $(D) : y = -x - 1$ est asymptote à (C)

- 3 Donnons une équation de l'autre asymptote à (C) .

Nous avons vu que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, donc la droite $(D') : x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe (C) de f .

- 4 Montrons que le point $I(1, -2)$ est centre de symétrie de la courbe.

Un point de coordonnées (a, b) est centre de symétrie de la courbe (C) de f définie sur D_f si et seulement si : pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et pour tout $x \in D_f$, $f(a - x) + f(a + x) = 2b$.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, 2 - x \in \mathbb{R} - \{1\}.$$

$$\begin{aligned} f(a - x) + f(a + x) &= f(1 - x) + f(1 + x) = \frac{(1-x)^2 + \text{Log}|1-(1-x)|}{1-(1-x)} + \frac{(1+x)^2 + \text{Log}|1-(1+x)|}{1-(1+x)} \\ \Rightarrow f(a - x) + f(a + x) &= \frac{1-2x+x^2+\text{Log}|x|}{x} + \frac{1+2x+x^2+\text{Log}|-x|}{-x} = \frac{1-2x+x^2+\text{Log}|x|}{x} + \frac{-1-2x-x^2-\text{Log}|x|}{x} \\ \Rightarrow f(a - x) + f(a + x) &= \frac{1-2x+x^2+\text{Log}|x|-1-2x-x^2-\text{Log}|x|}{x} = \frac{-4x}{x} = -4 = 2 \times (-2) = 2b. \end{aligned}$$

Ainsi $f(a - x) + f(a + x) = 2b$.

D'où le point $I(1, -2)$ est centre de symétrie de la courbe (C) .

5 * Déterminons une équation de la tangente (T_0) à (C) au point d'abscisse 0.

L'équation de tangente (T_0) à (C) au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

$$f'(0) = \frac{-0^2 + 2 \times 0 - 1 + \text{Log}|1-0|}{(1-0)^2} = \frac{-1}{1} = -1, f(0) = \frac{0^2 + \text{Log}|1-0|}{1-0} = \frac{0}{2} = 0. \text{ Donc } y = -1(x - 0) + 0 = -x$$

D'où $(T_0) : y = -x$.

* Déterminons une équation de la tangente (T_2) au point d'abscisse 2.

L'équation de tangente (T_2) à (C) au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$.

$$f'(2) = \frac{-2^2 + 2 \times 2 - 1 + \text{Log}|1-2|}{(1-2)^2} = \frac{-4+4-1+0}{1} = \frac{-1}{1} = -1; f(2) = \frac{2^2 + \text{Log}|1-2|}{1-2} = \frac{4}{-1} = -4.$$

Donc $y = -1(x - 2) - 4 = -x + 2 - 4 = -x - 2$.

D'où $(T_2) : y = -x - 2$.

6 Déterminons les coordonnées des points d'intersection de (C) et de l'asymptote (D) .

L'abscisse du point d'intersection de (C) et de l'asymptote (D) vérifie $f(x) = -x - 1$,

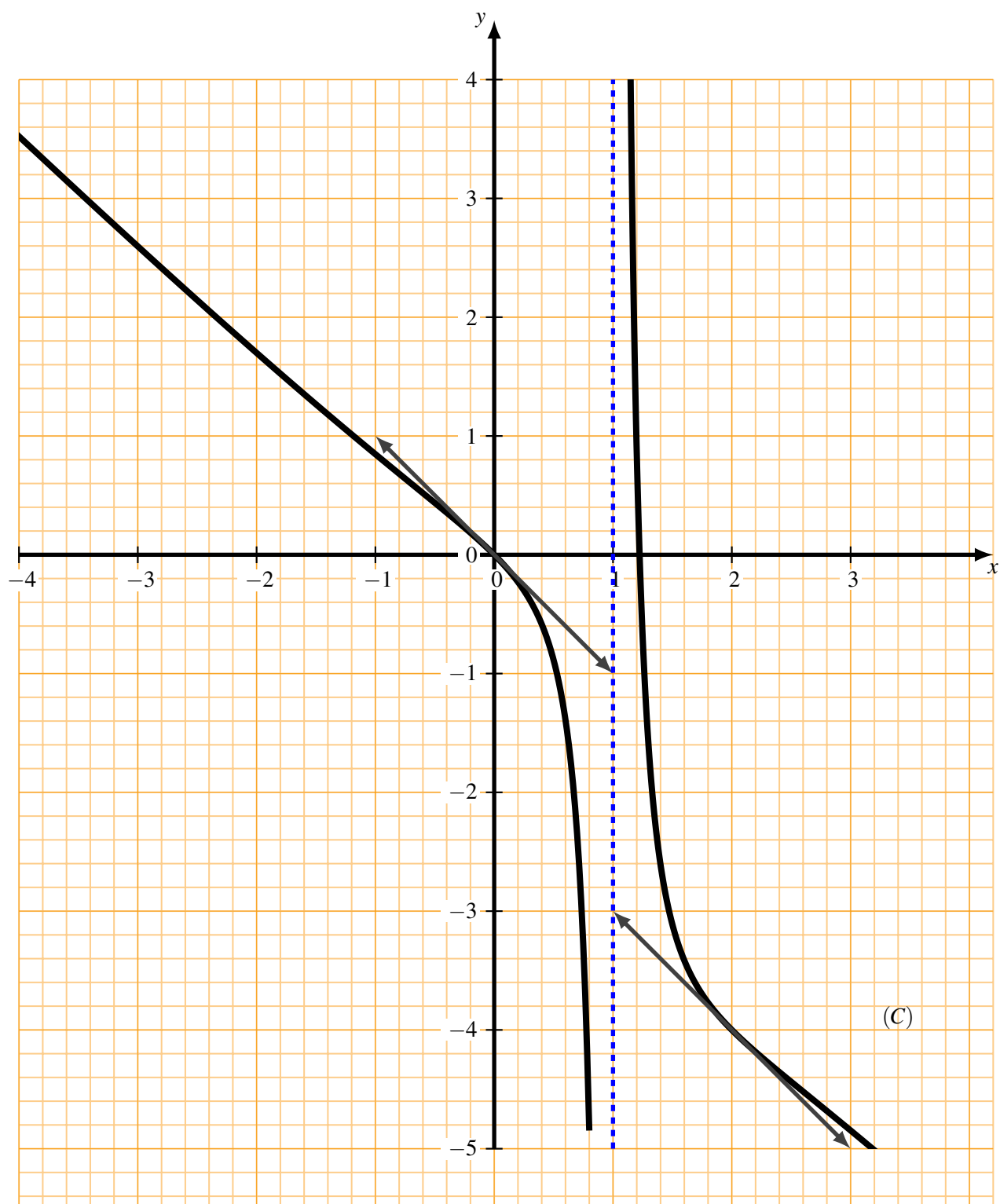
$$\text{donc } \frac{x^2 + \text{Log}|1-x|}{1-x} = -x - 1 \Rightarrow x^2 + \text{Log}|1-x| = -1 + x^2 \Rightarrow \text{Log}|1-x| = -1 \Rightarrow |1-x| = e^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 - x = -e^{-1} \text{ ou } 1 - x = e^{-1} \Rightarrow x = e^{-1} + 1 \text{ ou } -e^{-1} + 1. \text{ Donc } x = \frac{e+1}{e} \text{ ou } x = \frac{e-1}{e}.$$

$$\text{Si } x = e^{-1} + 1, \text{ alors } y = -e^{-1} - 1 - 1 = \frac{-2e-1}{e}. \text{ Si } x = -e^{-1} + 1, y = e^{-1} - 1 - 1 = \frac{-2e+1}{e}.$$

D'où les points d'intersection de (C) et de l'asymptote (D) sont $A\left(\frac{e+1}{e}; \frac{-2e-1}{e}\right)$ et $B\left(\frac{e-1}{e}; \frac{-2e+1}{e}\right)$

7 Traçons la représentation graphique (C) de f dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\frac{1}{e} \approx 0,37$.



III. Soit m un réel supérieur à $1 + \frac{1}{e}$.

1 Calculons l'intégrale : $\int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{\text{Log}(x-1)}{x-1} dx$.

$$\int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{\text{Log}(x-1)}{x-1} dx = \left[\left(\text{Log}(x-1) \right)^2 \right]_{1+\frac{1}{e}}^m = \left(\text{Log}(m-1) \right)^2 - \left(\text{Log}\left(1 + \frac{1}{e} - 1\right) \right)^2$$

$$\Rightarrow \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{\text{Log}(x-1)}{x-1} dx = \left(\text{Log}(m-1) \right)^2 - \text{Log}\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\text{Log}(m-1) \right)^2 - 1.$$

$$\text{Donc } \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{\text{Log}(x-1)}{x-1} dx = \left(\text{Log}(m-1) \right)^2 - 1.$$

- 2 ● Dédudons de la question précédente l'aire $A(m)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 1 + \frac{1}{e}$ et $x = m$.

$$\text{Sur } \left[1 + \frac{1}{e}; +\infty[, f(x) < 0 \text{ car } 1 - x < 0 \text{ et } f(x) = \frac{x^2 + \text{Log}(x-1)}{x-1},$$

$$\text{donc } A(m) = - \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{x^2 + \text{Log}(x-1)}{1-x} dx \times u.a = \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{x^2 + \text{Log}(x-1)}{x-1} dx \times u.a.$$

$$\text{Ainsi } A(m) = \left(\int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{x^2}{x-1} dx + \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{\text{Log}(x-1)}{x-1} dx \right) \times u.a.$$

$$\text{Calculons } \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{x^2}{x-1} dx.$$

$$\int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{x^2}{x-1} dx = \int_{1+\frac{1}{e}}^m \left(\frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} \right) dx = \int_{1+\frac{1}{e}}^m \left(\frac{(x-1)(x+1) + 1}{x-1} \right) dx = \int_{1+\frac{1}{e}}^m \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$\Rightarrow \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{x^2}{x-1} dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x + \text{Log}(x-1) \right]_{1+\frac{1}{e}}^m$$

$$\Rightarrow \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{x^2}{x-1} dx = \frac{1}{2}m^2 + m + \text{Log}(m-1) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{e} \right)^2 - 1 - \frac{1}{e} - \text{Log} \left(1 + \frac{1}{e} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{x^2}{x-1} dx = \frac{1}{2}m^2 + m + \text{Log}(m-1) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2} \right) - 1 - \frac{1}{e} - \text{Log} \left(\frac{1}{e} \right)$$

$$\Rightarrow \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{x^2}{x-1} dx = \frac{1}{2}m^2 + m + \text{Log}(m-1) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{e} + \frac{1}{e^2} \right) - 1 - \frac{1}{e} + 1$$

$$\Rightarrow \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{x^2}{x-1} dx = \frac{1}{2}m^2 + m + \text{Log}(m-1) - \frac{1}{2} - \frac{2}{e} - \frac{1}{2e^2}.$$

$$\text{Donc } \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{x^2}{x-1} dx = \frac{1}{2}m^2 + m + \text{Log}(m-1) - \frac{1}{2} - \frac{2}{e} - \frac{1}{2e^2}.$$

$$\text{Or d'après III. 1), } \int_{1+\frac{1}{e}}^m \frac{\text{Log}(x-1)}{x-1} dx = \frac{1}{2} \left(\text{Log}(m-1) \right)^2 - \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } A(m) = \left(\frac{1}{2}m^2 + m + \text{Log}(m-1) - \frac{1}{2} - \frac{2}{e} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} \left(\text{Log}(m-1) \right)^2 - \frac{1}{2} \right) \times 4cm^2$$

$$\Rightarrow A(m) = \left(2 \left(\text{Log}(m-1) \right)^2 + 4\text{Log}(m-1) + 2m^2 + 4m - 4 - \frac{8}{e} - \frac{2}{e^2} + \right) cm^2.$$

$$\text{D'où } A(m) = \left(2 \left(\text{Log}(m-1) \right)^2 + 4\text{Log}(m-1) + 2m^2 + 4m - 4 - \frac{8}{e} - \frac{2}{e^2} + \right) cm^2.$$

● Calculons $A(e+1)$ et la limite de $A(m)$ lorsque m tend vers plus l'infini.

* Calculons $A(e+1)$.

$$A(e+1) = \left(2 \left(\text{Log}(e+1-1) \right)^2 + 4\text{Log}(e+1-1) + 2(e+1)^2 + 4(e+1) - 4 - \frac{8}{e} - \frac{2}{e^2} \right) cm^2$$

$$\Rightarrow A(e+1) = \left(2 \left(\text{Log}(e) \right)^2 + 4\text{Log}(e) + 2(e+1)^2 + 4(e+1) - 4 - \frac{8}{e} - \frac{2}{e^2} + \right) cm^2$$

$$\Rightarrow A(e+1) = \left(2+4+2e^2+4e+2+4e+4-4-\frac{8}{e}-\frac{2}{e^2}\right)cm^2 = \left(2e^2+8e-\frac{8}{e}-\frac{2}{e^2}+8\right)cm^2.$$

$$\text{Donc } A(e+1) = \left(2e^2+8e-\frac{8}{e}-\frac{2}{e^2}+8\right)cm^2.$$

* Calculons la limite de $A(m)$ lorsque m tend vers plus l'infini.

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} A(m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(4\left(\text{Log}(m-1)\right)^2 + 4\text{Log}(m-1) + 2m^2 + 4m - 14 - \frac{2}{e^2} + \right)cm^2 = +\infty.$$

$$\text{D'où } \lim_{m \rightarrow +\infty} A(m) = +\infty.$$

Sujet 4

Session de 1986

Exercice 1

- 1 ● Déterminons deux nombres complexes a et b tels que : $a + b = 5 - 4i$, $ab = 3(1 - 3i)$ et $|a| > |b|$.

Comme on a $\begin{cases} a + b = 5 - 4i & \textcircled{1} \\ ab = 3(1 - 3i) & \textcircled{2} \end{cases}$, alors tirons a dans $\textcircled{1}$.

$$\textcircled{1} \Rightarrow a = 5 - 4i - b.$$

Remplaçons a par son expression dans $\textcircled{2}$.

$$\textcircled{2} \Rightarrow (5 - 4i - b)b = 3(1 - 3i) \Rightarrow -b^2 + (5 - 4i)b - 3 + 9i = 0 \Rightarrow b^2 - (5 - 4i)b + 3 - 9i = 0.$$

$$\Delta = -(5 - 4i)^2 - 4(1)(3 - 9i) = 25 - 40i - 16 - 12 + 36i = -3 - 4i.$$

Déterminons les racines carrées de Δ . Soit $d = x + iy$ tel que $d^2 = \Delta$, où $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|d^2| = |\Delta| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\text{donc } d^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \textcircled{1} \\ x^2 - y^2 = -3 & \textcircled{2} \\ 2xy = -4 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 5 - 3 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow x^2 + y^2 - x^2 + y^2 = 5 + 3 \Rightarrow 2y^2 = 8 \Rightarrow y^2 = \frac{8}{2} \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = -2$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow 2xy = -4 \Rightarrow xy = \frac{-4}{2} \Rightarrow xy = -2 < 0, \text{ donc } x \text{ et } y \text{ sont de signes contraires.}$$

$$\text{Ainsi } d = 1 - 2i \text{ ou } d = -1 + 2i. \text{ D'où } b = \frac{5-4i-1+2i}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i \text{ ou } b = \frac{5-4i+1-2i}{2} = \frac{6-6i}{2} = 3 - 3i.$$

$$\text{Si } b = 2 - i, \text{ alors } a = 5 - 4i - 2 + i = 3 - 3i; \text{ si } b = 3 - 3i, \text{ alors } a = 5 - 4i - 3 + 3i = 2 - i.$$

$$\text{Donc } a = 3 - 3i \text{ et } b = 2 - i \text{ ou } a = 2 - i \text{ et } b = 3 - 3i.$$

$$\text{Si } a = 2 - i \text{ et } b = 3 - 3i, \text{ alors } |a| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \text{ et } |b| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}.$$

Comme $|a| < |b|$, alors $a = 2 - i$ et $b = -3 + 3i$ ne convient pas.

$$\text{Si } a = 3 - 3i \text{ et } b = 2 - i, \text{ alors } |a| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}; |b| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

Comme $|a| > |b|$, alors $a = 3 - 3i$ et $b = 2 - i$ convient.

$$\text{D'où } a = 3 - 3i \text{ et } b = 2 - i.$$

● Mettons a sous forme trigonométrique.

$$\text{Soit } \theta = \arg(a). \text{ Alors } \begin{cases} \cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ donc } \theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi].$$

$$\text{D'où } a = 3\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

- 2 Soit dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives $a, \frac{a^2}{18}, b$ et b^2 .

➡ Déterminons les coordonnées du barycentre G des points A, B, C, D affectés des coefficients respectifs $1; -1; 1; 1$.

$$a^2 = (3 - 3i)^2 = 9 - 18i - 9 = -18i \Rightarrow \frac{a^2}{18} = -i; b^2 = (2 - i)^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i.$$

Ainsi $A(3 - 3i); B(-i); C(2 - i)$ et $D(3 - 4i)$.

Donc l'affixe du barycentre G des points A, B, C, D affectés des coefficients respectifs $1; -1; 1; 1$ est :

$$\frac{a - \frac{a^2}{18} + b + b^2}{1 - 1 + 1 + 1} = \frac{3 - 3i + i + 2 - i + 3 - 4i}{2} = \frac{8 - 7i}{2} = 4 - \frac{7}{2}i.$$

D'où $G(4; -\frac{7}{2})$.

► Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$, $k \in \mathbb{R}$.

On sait que G est barycentre des points A, B, C, D affectés des coefficients respectifs $1; -1; 1; 1$. Ainsi on a :

$$MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = (\vec{MG} + \vec{GA})^2 - (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 + (\vec{MG} + \vec{GD})^2$$

$$\Rightarrow MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = \|\vec{MG}\|^2 - 2\vec{MG} \cdot \vec{GA} + \|\vec{GA}\|^2 - \|\vec{MG}\|^2 + 2\vec{MG} \cdot \vec{GB} - \|\vec{GB}\|^2 + \|\vec{MG}\|^2 - 2\vec{MG} \cdot \vec{GC} + \|\vec{GC}\|^2 + \|\vec{MG}\|^2 - 2\vec{MG} \cdot \vec{GD} + \|\vec{GD}\|^2$$

$$\Rightarrow MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2\|\vec{MG}\|^2 + 2\vec{MG}(\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) + \|\vec{GA}\|^2 - \|\vec{GB}\|^2 + \|\vec{GC}\|^2 + \|\vec{GD}\|^2.$$

Or $\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ car G est barycentre des points A, B, C, D affectés des coefficients respectifs $1; -1; 1; 1$.

$$\text{Donc } MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2\|\vec{MG}\|^2 + \|\vec{GA}\|^2 - \|\vec{GB}\|^2 + \|\vec{GC}\|^2 + \|\vec{GD}\|^2$$

$$\Rightarrow MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2MG^2 + GA^2 - GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

$$\text{Par conséquent } MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2 = k \Rightarrow 2MG^2 + GA^2 - GB^2 + GC^2 + GD^2 = k$$

$$\Rightarrow 2MG^2 = k - GA^2 + GB^2 - GC^2 - GD^2.$$

$$GA^2 = \left(\sqrt{(3-4)^2 + (-3+\frac{7}{2})^2} \right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4};$$

$$GB^2 = \left(\sqrt{(0-4)^2 + (-1+\frac{7}{2})^2} \right)^2 = 16 + \frac{25}{4} = \frac{89}{4};$$

$$GC^2 = \left(\sqrt{(2-4)^2 + (-1+\frac{7}{2})^2} \right)^2 = 4 + \frac{25}{4} = \frac{41}{4};$$

$$GD^2 = \left(\sqrt{(3-4)^2 + (-4+\frac{7}{2})^2} \right)^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4};$$

$$\text{Ainsi } 2MG^2 = k - \frac{5}{4} + \frac{89}{4} - \frac{41}{4} - \frac{5}{4} = k + \frac{38}{4} = k + \frac{19}{2} = \frac{2k+19}{4} \Rightarrow MG^2 = \frac{2k+19}{4}.$$

$$\text{Donc } MG^2 = \frac{2k+19}{4}.$$

Si $2k + 19 < 0$, donc $k < -\frac{19}{2}$, alors l'ensemble des points M du plan cherché est l'ensemble vide.

Si $2k + 19 = 0$, donc $k = -\frac{19}{2}$, alors l'ensemble des points M du plan cherché est le singleton $\{G\}$.

Si $2k + 19 > 0$, donc $k > -\frac{19}{2}$, alors l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 + MC^2 + MD^2$ est le cercle de centre G et de rayon $r = \sqrt{\frac{2k+19}{4}} = \frac{\sqrt{2k+19}}{2}$.

- 3 Soit S la transformation géométrique qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az + b$.

Déterminons la nature et les éléments caractéristiques de S .

L'application complexe associée à S est de la forme : $z' = az + b$ avec $a = 3 - 3i \in \mathbb{C}^*$ et $b = 2 - i$,

donc S est une similitude plane directe.

Le rapport et l'argument de S sont le module et l'argument de a respectivement et d'après 1), le module de a est $\sqrt{2}$ et un argument de a est $-\frac{\pi}{4} [2\pi]$.

$$\text{Soit } \Omega \text{ tel que } z_{\Omega} = \frac{b}{1-a}. z_{\Omega} = \frac{2-i}{1-3+3i} = \frac{2-i}{-2+3i} = \frac{(2-i)(-2-3i)}{(-2)^2+3^2} = \frac{-4-6i+2i-3}{4+9} = \frac{-7-4i}{13} = -\frac{7}{13} - \frac{4}{13}i.$$

Donc les éléments caractéristiques de S sont le rapport $k = 3\sqrt{2}$, l'angle $\theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et le centre $\Omega\left(-\frac{7}{13}; -\frac{4}{13}\right)$.

Exercice 2

- 1 Calculons, en fonction de R , les aires des parties A, B, C .

Soit S_A, S_B et S_C les aires respectives des parties A, B, C .

Comme la partie A est un cercle de rayon R , alors $S_A = \pi R^2$.

B est la partie limitée par le cercle de rayon R et le cercle de rayon $2R$,

donc $S_B = \pi((2R)^2 - R^2) = \pi(4R^2 - R^2) = 3\pi R^2$, ainsi $S_B = 3\pi R^2$.

C est la partie limitée par le cercle de rayon $2R$ et le cercle de rayon $3R$,

donc $S_C = \pi((3R)^2 - (2R)^2) = \pi(9R^2 - 4R^2) = 5\pi R^2$, ainsi $S_C = 5\pi R^2$.

Soit p la probabilité d'atteindre la partie A de la cible.

- a Calculons, en fonction de p , les probabilités respectives d'atteindre les parties B et C .

Soit P_B et P_C les probabilités d'atteindre les parties B et C respectivement.

D'après l'énoncé la probabilité d'atteindre une des parties de la cible est proportionnelle à l'aire de

cette partie, donc $\frac{p}{S_A} = \frac{P_B}{S_B} = \frac{P_C}{S_C}$.

Ainsi $P_B = S_B \times \frac{p}{S_A} = 3\pi R^2 \times \frac{p}{\pi R^2} = 3p$ et $P_C = S_C \times \frac{p}{S_A} = 5\pi R^2 \times \frac{p}{\pi R^2} = 5p$

D'où $P_B = 3p$ et $P_C = 5p$.

- b Déduisons-en la valeur de p si la probabilité d'atteindre une des parties de la cible est 0.75.

Comme on a trois parties A, B, C et qu'on ne peut pas atteindre deux parties ou les trois parties de la cible en même temps, alors la probabilité d'atteindre une des parties de la cible est :

$$p + P_B + P_C = p + 3p + 5p = 9p.$$

Puisque cette probabilité est égale à 0,75, alors $9p = 0,75 = \frac{3}{4} \Rightarrow p = \frac{\frac{3}{4}}{9} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{12}$.

Donc $p = \frac{1}{12}$, ainsi $P_B = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ et $P_C = \frac{5}{12}$

- 2 Les parties A, B, C sont affectées respectivement des points suivants : 100, 50, 25 points, un joueur n'atteignant pas la cible marquant 0 point.

Soit X la variable aléatoire qui exprime le nombre de points obtenus par un joueur lançant deux fléchettes.

- a Déterminons la loi de probabilité de X .

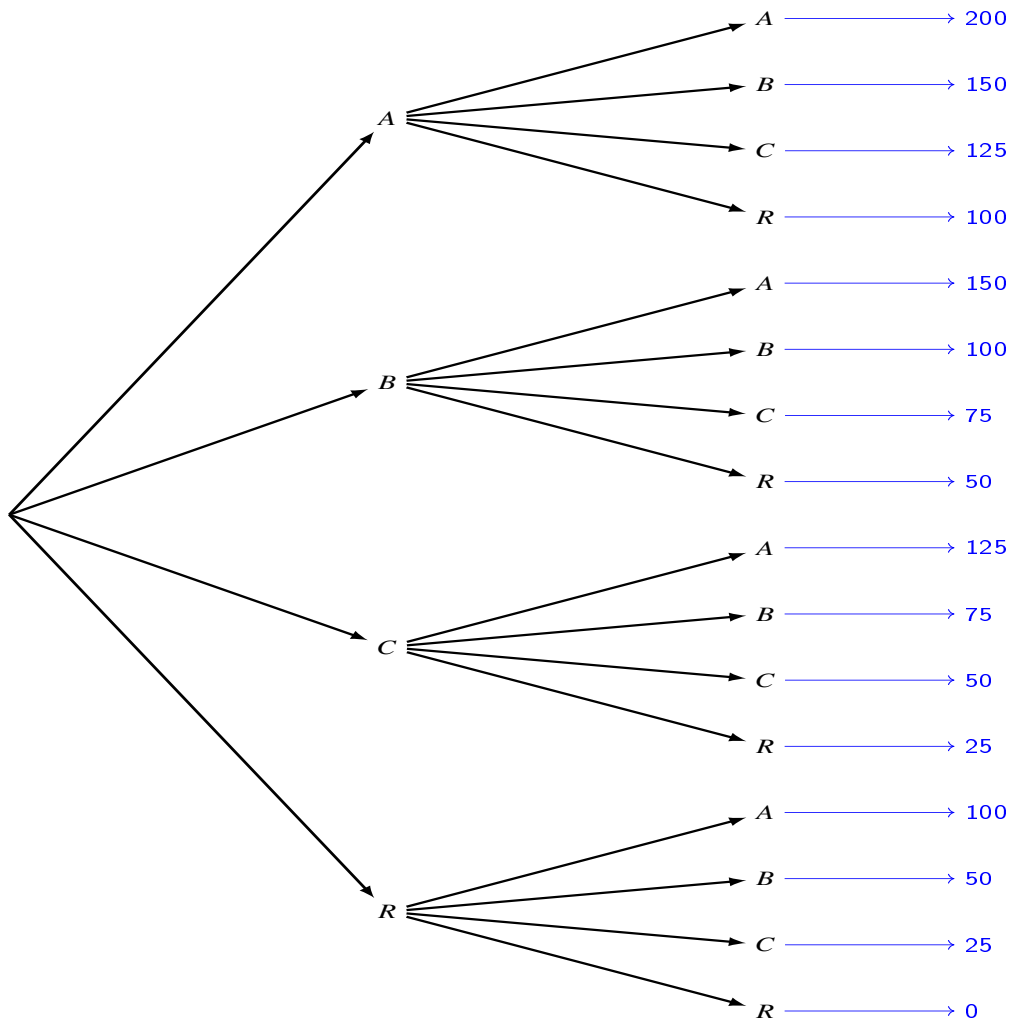
Soit R l'événement : « le joueur n'atteint pas la cible ».

Alors R a pour la probabilité $P_R = 1 - (p + P_B + P_C) = 1 - 0,75 = 0,25 = \frac{1}{4}$.

Soit Ω l'univers associé à l'expérience aléatoire.

Comme à chaque lancer de fléchettes, on a quatre possibilités et que les lancers sont indépendants, alors $\text{Card}\Omega = 4^2 = 16$.

Illustrons cette situation par un arbre pondéré.



Donc l'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0; 25; 50; 75; 100; 125; 150; 200\}$

$$P(X = 0) = P_R \times P_R = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} = \frac{9}{144}$$

$$P(X = 25) = 2P_R \times P_C = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{5}{12} = \frac{10}{48} = \frac{30}{144}$$

$$P(X = 50) = 2P_R \times P_B + P_C \times P_C = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{2}{16} + \frac{25}{144} = \frac{43}{144}$$

$$P(X = 75) = 2P_R \times P_C = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{5}{12} = \frac{10}{48} = \frac{30}{144}$$

$$P(X = 100) = 2P_R \times P_A + P_B \times P_B = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{48} + \frac{1}{16} = \frac{5}{48} = \frac{15}{144}$$

$$P(X = 125) = 2P_A \times P_C = 2 \times \frac{1}{12} \times \frac{5}{12} = \frac{10}{144}$$

$$P(X = 150) = 2P_A \times P_B = 2 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{48} = \frac{6}{144}$$

$$P(X = 200) = P_A \times P_A = \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{144}$$

b Calculons l'espérance mathématique de X .

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^8 x_i P(X = x_i)$$

$$\Rightarrow E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + x_3 P(X = x_3) + x_4 P(X = x_4) + x_5 P(X = x_5) + x_6 P(X = x_6) + x_7 P(X = x_7) + x_8 P(X = x_8)$$

$$\Rightarrow E(X) = 0 \times \frac{9}{144} + 25 \times \frac{30}{144} + 50 \times \frac{43}{144} + 75 \times \frac{30}{144} + 100 \times \frac{15}{144} + 125 \times \frac{10}{144} + 150 \times \frac{6}{144} + 200 \times \frac{1}{144}$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{0+750+2150+2250+1500+1250+900+200}{144} = \frac{9000}{144} = \frac{125}{2} = 62,5.$$

Donc $E(X) = \frac{125}{2} = 62,5$.

❧ Problème ❧

A. Soit f la fonction numérique à variable réelle x définie par : $f(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

- 1 Étudions les variations de f et traçons la courbe représentative de cette fonction dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 2 cm).

* Étudions les variations de f .

$D_f =]0; +\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a : $f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$.

$\forall x \in]0; +\infty[$ $x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $4x^2 - 1$.

Soit $4x^2 - 1 = 0$. Alors $4x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{1}{4}}$ ou $x = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$4x^2 - 1$		0	-	0	+

Donc si $x \in]0; \frac{1}{2}]$, $f'(x) \leq 0$ ainsi f est décroissante sur $]0; \frac{1}{2}]$.

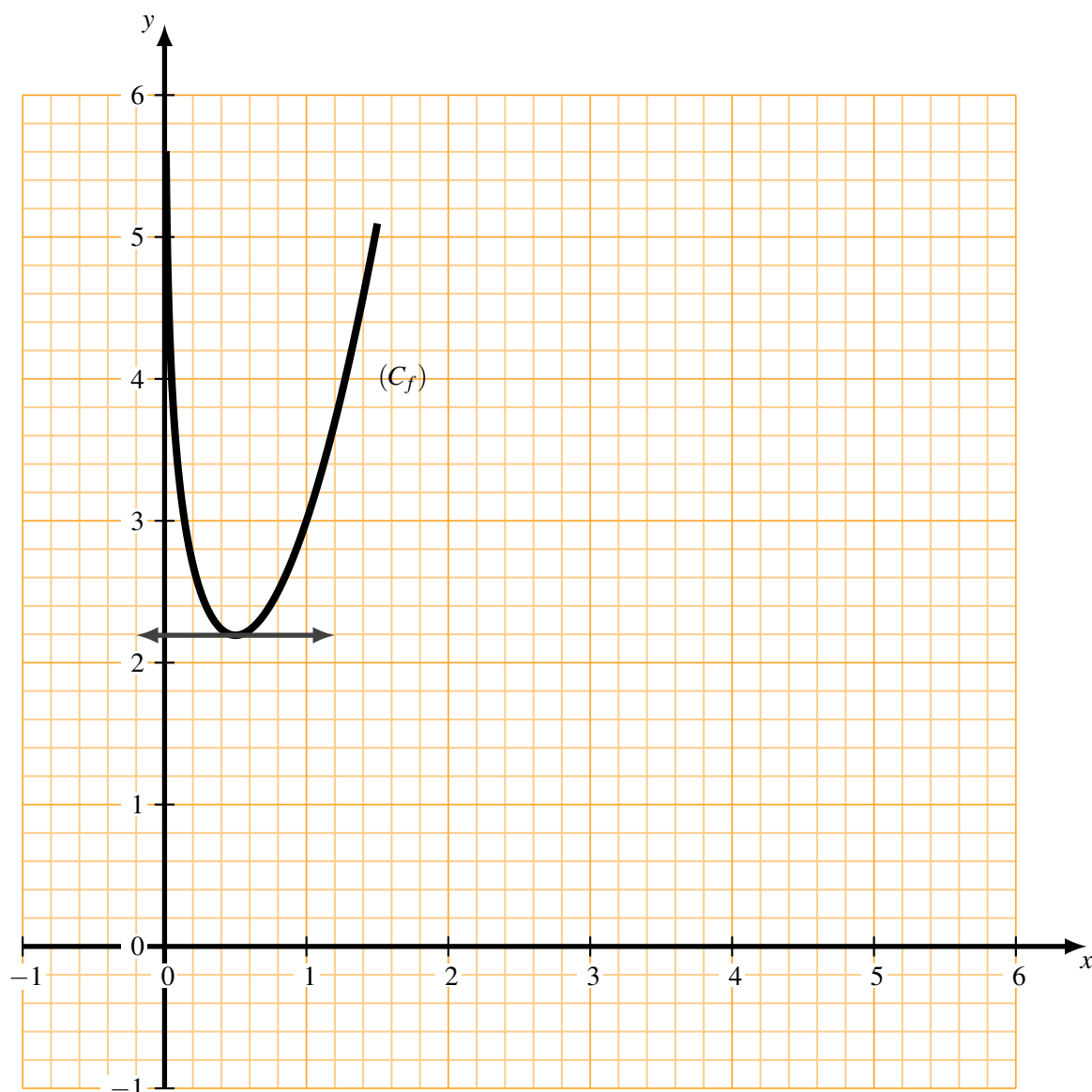
Si $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$, alors $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

D'où le tableau de variation de f ci-après :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	0	$\frac{3}{2} + \ln 2$	$+\infty$

* Traçons la courbe représentative de cette fonction dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 2 cm).

Du tableau de variation de f , nous déduisons la représentation graphique (C_f) de f .



2 Dédudions de cette représentation que : $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) > 0$.

D'après la représentation graphique de f la courbe C de f est au dessus de l'axe des abscisses pour tout $x \in]0; +\infty[$.

D'où $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) > 0$

B. Soit g la fonction numérique à variable réelle x définie par :
$$\begin{cases} g(x) = 2x + \frac{\ln|x|}{x} & \text{si } x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\\ g(0) = 0 \end{cases}$$

1 * Déterminons le domaine de définition de g .

$D_g =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\cup \{0\} =]-\infty; +\infty[$. Donc $D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

* Vérifions si la fonction g est continue en $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x + \frac{\ln|x|}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x + \frac{\ln(-x)}{x} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Donc g n'est pas continues en $x = 0$.

* Vérifions si la fonction g est dérivable en $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x + \frac{\ln|x|}{x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 + \frac{\ln|x|}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2 + \frac{\ln(-x)}{x^2} \right) = -\infty$$

car $\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(-x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Donc g n'est pas dérivable en $x = 0$.

- 2 Montrons que la fonction g est impaire et déduisons-en une propriété de la courbe (C) représentant ses variations.

Soit $x \in D_g$. Alors $-x \in D_g$ et $g(-x) = 2(-x) + \frac{\ln|-x|}{-x} = -2x + \frac{\ln|x|}{-x} = -2x - \frac{\ln|x|}{x} = -\left(2x + \frac{\ln|x|}{x}\right) = -g(x)$.

Donc $\forall x \in D_g, -x \in D_g$ et $g(-x) = -g(x)$.

D'où la fonction g est impaire.

Par conséquent la courbe C_g de g est globalement invariante par la symétrie de centre O .

Autrement dit, la courbe de la fonction g est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

On peut donc étudier g sur $[0; +\infty[$.

- 3 * Calculons $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et déduisons de la partie A. le sens de variation de g .

Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $g(x) = 2x + \frac{\ln(x)}{x}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $g'(x) = 2 + \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{2x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$.

Donc $g'(x) = \frac{2x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$.

Or d'après ce qui précède, $f(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$, de plus $x^2 > 0$. Ainsi $g'(x) > 0$.

D'où g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Nous savons que la fonction g est impaire, donc le sens de variation de g sur $\mathbb{R}_-^*$ se déduit de celui de g sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $-x \in \mathbb{R}_-^*$ et $g(-x) = -g(x) \Rightarrow (g(-x))' = (-g(x))' \Rightarrow -g'(-x) = -g'(x)$

$\Rightarrow g'(-x) = g'(x) > 0 \Rightarrow g'(-x) > 0$.

Par conséquent g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

En conclusion la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

* Étudions la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$.

* Démontrons l'existence d'une asymptote oblique.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{\ln(x)}{x} - 2x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0$.

D'où la courbe g admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.

* Précisons la position de (C) par rapport à l'asymptote

$g(x) - 2x = \frac{\ln(x)}{x}$. Le signe de $g(x) - 2x$ est celui de $\ln(x)$.

Or si $x \in]0; 1]$, $\ln(x) \leq 0$, donc $g(x) - 2x \leq 0$, ainsi (C) est en dessous de la droite d'équation $y = 2x$ sur $]0; 1]$.

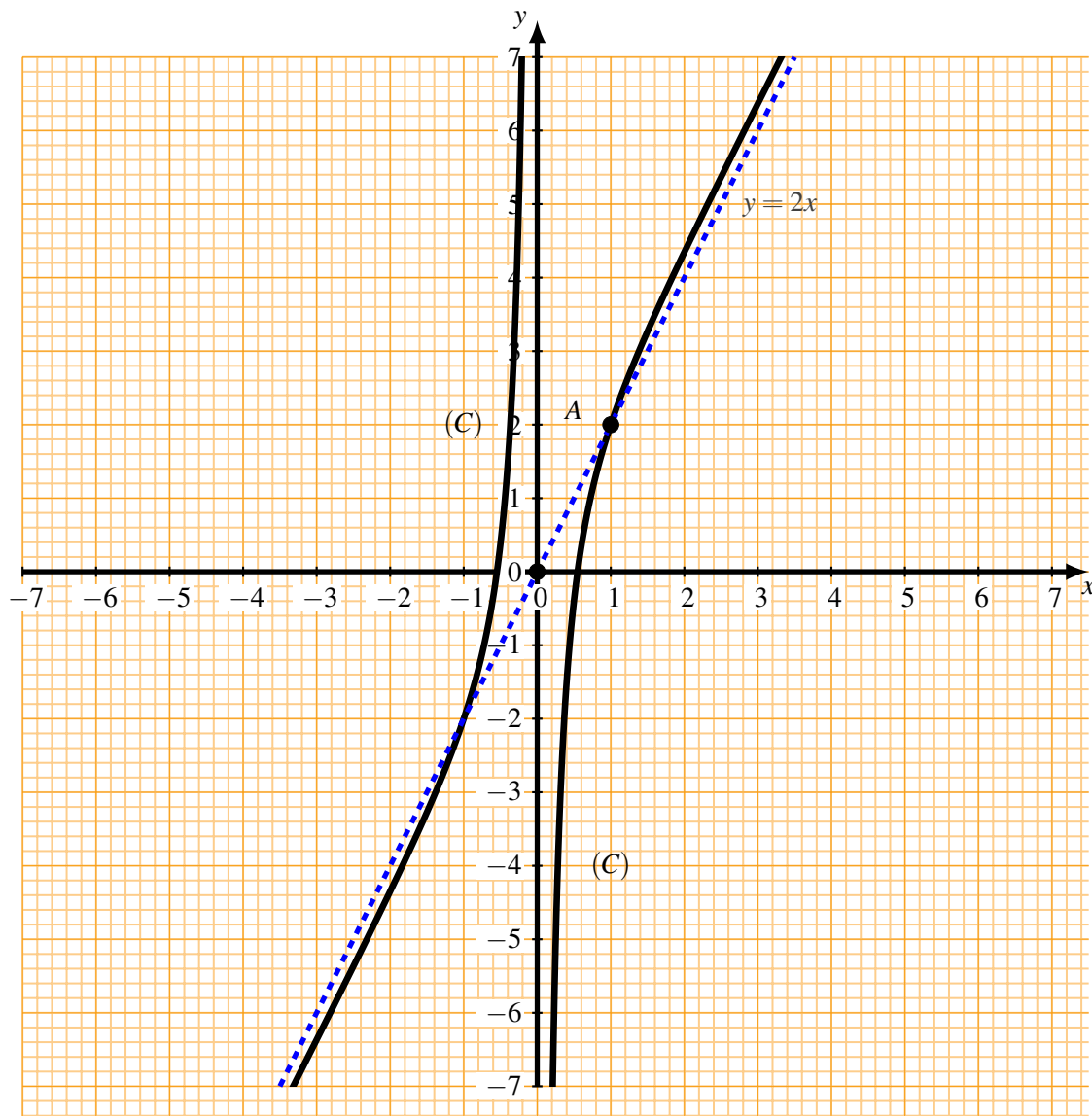
Si $x \in [1; +\infty[$, alors $\ln(x) \geq 0$, donc $g(x) - 2x \geq 0$, d'où (C) est au dessus de la droite d'équation $y = 2x$ sur $[1; +\infty[$.

- 4 * Faisons le tableau des variations de g .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$
g	$-\infty$	0	$+\infty$

* Traçons la courbe (C) de g dans un nouveau repère (Unité : 1 cm).

Le point d'intersection de (C) avec son asymptote oblique a pour abscisse qui vérifie $\ln x = 0$, donc $x = 1$.
 $y = 2 \times 1 = 2$, d'où le point d'intersection de (C) avec son asymptote oblique est $A(1 ; 2)$.



5 Soit $a > 1$.

* Calculons, en fonction de a , l'aire $A(a)$ de la surface comprise entre (C) , l'asymptote oblique et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.

$$A(a) = \int_1^a g(x) dx = \int_1^a \left(2x + \frac{\ln(x)}{x} \right) dx = \left[x^2 + \frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_1^a = a^2 + \frac{1}{2} (\ln(a))^2 - 1 - \frac{1}{2} (\ln(1))^2$$

$$\Rightarrow A(a) = a^2 + \frac{1}{2}(\ln(a))^2 - 1.$$

$$D'où A(a) = a^2 + \frac{1}{2}(\ln(a))^2 - 1.$$

* Déterminons la limite de $A(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} A(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(a^2 + \frac{1}{2}(\ln(a))^2 - 1 \right) = +\infty. \text{ Donc } \lim_{a \rightarrow +\infty} A(a) = +\infty.$$

C. Soit M un point mobile du plan dont les coordonnées, à l'instant t , sont :
$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{-t}(2 - te^{2t}) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

1 Calculons les coordonnées des vecteurs vitesses vitesse $\vec{V}_M$ et accélération $\vec{\Gamma}_M$ du point M à l'instant t .

Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ est défini par $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt}$,

$$\text{c'est-à-dire } \vec{V}(t) : \begin{cases} x' = -e^{-t} \\ y' = -e^{-t}(2 - te^{2t}) + e^{-t}(-e^{2t} - 2te^{2t}) = e^{-t}(-2 - e^{2t} - te^{2t}) \end{cases}$$

$$D'où \vec{V}(t) : \begin{cases} x' = -e^{-t} \\ y' = e^{-t}(-2 - e^{2t} - te^{2t}) \end{cases}$$

Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ est défini par $\vec{\Gamma}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}$,

$$\text{c'est-à-dire } \vec{\Gamma}(t) : \begin{cases} x'' = e^{-t} \\ y'' = -e^{-t}(-2 - e^{2t} - te^{2t}) + e^{-t}(-2e^{2t} - e^{2t} - 2te^{2t}) = e^{-t}(2 - 2e^{2t} - te^{2t}) \end{cases}$$

$$D'où \vec{\Gamma}(t) : \begin{cases} x'' = e^{-t} \\ y'' = e^{-t}(2 - 2e^{2t} - te^{2t}) \end{cases}$$

2 Montrons que la trajectoire du point M est une partie de C que nous précisons.

Comme $t \geq 0$, alors $e^t \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{e^t} \leq 1 \Rightarrow e^{-t} \leq 1$, donc $x \leq 1$, de même $x = e^{-t} > 0$, ainsi $0 < x \leq 1$ c'est-à-dire $x \in]0; 1]$.

$$x = e^{-t} \iff e^{-t} = x \iff -t = \ln(x) \iff t = -\ln(x).$$

$$y = e^{-t}(2 - te^{2t}) = e^{-t} \left(2 - t \times \frac{1}{e^{-2t}} \right) = e^{-t} \left(2 - t \times \left(\frac{1}{e^{-t}} \right)^2 \right) = x \left(2 - (-\ln x) \times \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\Rightarrow y = x \left(2 + \frac{\ln(x)}{x^2} \right) = 2x + \frac{\ln(x)}{x} = g(x) \text{ pour } x \in]0; 1].$$

D'où la trajectoire de M est la partie de (C) dans l'intervalle $]0; 1]$.

3 Précisons dans les cas $t = 0$ et $t = \ln 2$ la position du point M , les coordonnées de $\vec{V}_M$ et $\vec{\Gamma}_M$ et la nature de son mouvement (accélééré ou retardé).

$$* \text{ Pour } t = 0, x = e^0 = 1; y = e^0(2 - 0 \times e^0) = 1 \times 2 = 2;$$

$$x' = -e^0 = -1; y' = e^0(-2 - e^0 - 0 \times 0e^{20}) = -3;$$

$$x'' = e^0 = 1; y'' = e^0(2 - 2e^0 - 0 \times e^0) = 1 \times 0 = 0.$$

D'où le mobile est en $M_0(1; 2)$ avec pour vecteur vitesse $\vec{V}_0(1; 0)$ et pour vecteur accélération $\vec{\Gamma}_0(1; 0)$.

$$\text{De plus } \vec{V}_0 \bullet \vec{\Gamma}_0 = -1 \times 1 - 3 \times 0 = -1 + 0 = -1 < 0.$$

Donc le mouvement de M est retardé.

$$* \text{ Pour } t = \ln 2, x = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}; y = e^{\ln 2}(2 - \ln 2 \times e^{2 \times \ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - 4 \ln 2) = (1 - 2 \ln 2);$$

$$x' = -e^{-\ln 2} = -\frac{1}{2}; y' = e^{-\ln 2}(-2 - e^{2 \times \ln 2} - \ln 2 \times e^{2 \times \ln 2}) = \frac{1}{2}(-2 - 4 - 4 \ln 2) = (-3 - 2 \ln 2);$$

$$x'' = e^{-\ln 2} = \frac{1}{2}; y'' = e^{-\ln 2} (2 - 2e^{2 \times \ln 2} - \ln 2 \times e^{2 \times \ln 2}) = \frac{1}{2} (2 - 8 - 4 \ln 2) = (-3 - 2 \ln 2).$$

Ainsi le mobile est en $M_1 \left(\frac{1}{2}; 1 - 2 \ln 2 \right)$ avec pour vecteur vitesse $\vec{V}_1 \left(-\frac{1}{2}; 1 - 2 \ln 2 \right)$ et pour vecteur accélération $\vec{\Gamma}_1 \left(\frac{1}{2}; -3 - 2 \ln 2 \right)$.

$$\text{De plus } \vec{V}_1 \bullet \vec{\Gamma}_1 = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - (-3 - 2 \ln 2) \times (-3 - 2 \ln 2) = \frac{1}{4} + 9 + 12 \ln 2 + (\ln 2)^2 = \frac{35}{4} + 12 \ln 2 + (\ln 2)^2 > 0.$$

Donc le mouvement de M est accéléré.

Sujet 5

Session de 1987

Exercice 1

- a Soient deux personnes prises au hasard.

Déterminons la probabilité pour qu'elles soient nées un même jour de la semaine.

Soit Ω l'univers associée à l'expérience aléatoire.

Chaque personne a 7 possibilités d'être nées dans une semaine, donc pour deux personnes,

il y a alors $\text{Card}\Omega = 7^2 = 49$ possibilités d'être nées dans une semaines.

Soit A l'événement : « les deux personnes sont nées un même jour de la semaine ».

Comme une semaine compte 7 jours alors $\text{Card}A = 7$, donc $P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$.

Ainsi la probabilité pour que deux personnes soient nées un même jour de la semaine est $P(A) = \frac{1}{7}$.

- b * Déterminons la probabilité pour que, dans un groupe de 4 personnes, pour que toutes soient nées des jours différents de la semaine.

Soit Ω l'univers associée à l'expérience aléatoire.

Chaque personne a 7 possibilités d'être nées dans une semaine, donc pour 4 personnes

il y aura $\text{Card}\Omega = 7^4 = 2041$ possibilités d'être nées dans une semaines.

Soit B l'événement : « les 4 personnes sont nées des jours différents de la semaine ».

Comme une semaine compte 7 jours et comme les 4 personnes sont nées des jours différents,

alors le nombre de possibilités pour ces 4 personnes d'être nées des jours différents est un arrangement de 4 jours parmi 7, donc $\text{Card}B = A_7^4 = \frac{7!}{3!} = 840$, ainsi $P(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega} = \frac{840}{2041} = \frac{120}{343}$.

D'où la probabilité pour que deux personnes soient nées un même jour de la semaine est $P(A) = \frac{120}{343}$.

* Vérifions s'il s'agira de faire un pari gagnant en affirmant que deux d'entre elles au moins sont nées le même jour de la semaine.

L'événement : « les deux personnes d'entre elles au moins sont nées le même jour de la semaine » est l'événement contraire noté $\bar{B}$ de l'événement B :

« les 4 personnes sont nées des jours différents de la semaine »

Donc $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{120}{343} = \frac{343-120}{343} = \frac{223}{343} \Rightarrow P(\bar{B}) = \frac{223}{343} \approx 0,6501$.

Puisque « faire un pari gagnant » signifie que l'événement choisi a une probabilité supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$ et comme $P(\bar{B}) \geq \frac{1}{2} = 0,5$, alors c'est faire un pari gagnant en affirmant que deux d'entre elles au moins sont nées le même jour de la semaine

- c Déterminons la probabilité pour que parmi n personnes l'une au moins soit née un lundi.

Soit Ω l'univers associée a l'expérience aléatoire. Chaque personne a 7 possibilités d'être nées dans une semaine, donc pour n personnes il y a $\text{Card}\Omega = 7^n$ possibilités d'être nées dans une semaines

Soit C l'événement : « parmi n personnes l'une au moins soit née un lundi »

Son évènement contraire noté $\bar{C}$ est « aucune des n personnes n'est née un lundi », donc, $\text{Card}\bar{C} = 6^n$, ainsi

$P(\bar{C}) = \frac{\text{Card}\bar{C}}{\text{Card}\Omega} = \frac{6^n}{7^n} = \left(\frac{6}{7}\right)^n$.

$$\text{D'où } P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n.$$

$$\text{Par suite } P(C) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n.$$

* Déterminons le nombre de personnes qu'il doit y avoir dans le groupe pour que l'affirmation « au moins l'un d'entre vous est née un lundi » soit un pari gagnant.

Il s'agit de déterminer n tel que $P(C) > \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Comme } P(C) = 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n, \text{ alors } 1 - \left(\frac{6}{7}\right)^n > \frac{1}{2} &\Rightarrow -\left(\frac{6}{7}\right)^n > 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow -\left(\frac{6}{7}\right)^n \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{6}{7}\right)^n \leq \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \ln\left(\frac{6}{7}\right)^n &\leq \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow n \ln\left(\frac{6}{7}\right) \leq -\ln 2 \Rightarrow n \geq \frac{-\ln 2}{\ln\left(\frac{6}{7}\right)} \text{ car } \ln\left(\frac{6}{7}\right) < 0, \text{ ainsi } n \geq 4,4965. \end{aligned}$$

Comme n est un entier naturel, alors $n \geq 5$.

Donc il doit y avoir au moins 5 personnes pour que cette affirmation soit pari gagnant.

Exercice 2

Soit l'expression $P(z)$ définie pour tout nombre complexe z par $P(z) = z^3 - z^2 + (-1+i)z - 2 - 2i$.

- a** Démontrons que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle x et une solution imaginaire pur y que nous calculerons.

► Posons $x = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors } a^3 - a^2 + (-1+1i)a - 2 - 2i = 0 \Rightarrow a^3 - a^2 - a + ia - 2 - 2i = 0 \Rightarrow a^3 - a^2 - a - 2 + i(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^3 - a^2 - a - 2 = 0 & \textcircled{1} \\ a - 2 = 0 & \textcircled{2} \end{cases}.$$

Considérons $\textcircled{2}$: $a - 2 = 0$. Alors $a = 2$.

Vérifions si $a = 2$ est solution de $\textcircled{1}$: $2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 8 - 4 - 4 = 0$, donc $a = 2$ convient.

Ainsi l'équation (E) admet une solution réelle $x = 2$.

► Posons $y = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Alors } (ib)^3 - (ib)^2 + (-1+1i)(ib) - 2 - 2i = 0 \Rightarrow -ib^3 + b^2 - ib - b - 2 - 2i = 0$$

$$\Rightarrow i(-b^3 - b - 2) + b^2 - b - 2 \Rightarrow \begin{cases} -b^3 - b - 2 = 0 & \textcircled{1} \\ b^2 - b - 2 = 0 & \textcircled{2} \end{cases}.$$

Considérons $\textcircled{2}$: $b^2 - b - 2 = 0$. $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-2) = 1 + 8 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$.

$$b_1 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1; b_2 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Vérifions si $b = 2$ ou $b = -1$ est solution de $\textcircled{1}$:

Pour $b = 2$, alors $-1 \times 2^3 - 2 - 2 = -8 - 4 = -12 \neq 0$, donc $b = 2$ ne convient pas.

Pour $b = -1$, alors $-(-1)^3 - (-1) - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$, donc $b = -1$ convient.

Donc l'équation (E) admet une solution imaginaire $y = -i$

- b** Déterminons la 3^{ème} solution z à l'aide d'une factorisation.

Le polynôme P est de degré 3, comme d'après 1) $x = 2$ et $y = -i$ sont racines de P , alors il existe un polynôme de degré 1, $Q(z) = az + b$ tel que $P(z) = (z-2)(z+i)Q(z)$, c'est-à-dire $P(z) = (z-2)(z+i)(az+b)$.

$$P(z) = (z^2 + iz - 2z - 2i)(az + b) = az^3 + iaz^2 - 2az^2 - 2iaz + bz^2 + ibz - 2bz - 2ib$$

$$\Rightarrow P(z) = az^3 + (ia - 2a + b)z^2 + (-2ia + ib - 2b)z - 2ib.$$

$$\text{Or } P(z) = z^3 - z^2 + (-1+i)z - 2 - 2i, \text{ donc par identification, on a : } \begin{cases} a = 1 \\ ia - 2a + b = -1 \\ -2ia + ib - 2b = -1 + i \\ b = \frac{-2-2i}{-2i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - ia + 2a \\ (i-2)b = -1 + i + 2i = -1 + 3i \\ -2ib = -2 - 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - i + 2 = 1 - i \\ b = \frac{-1+3i}{i-2} = \frac{(-1+3i)(-i-2)}{1^2+(-2)^2} = \frac{5-5i}{5} = 1 - i \\ b = \frac{-2-2i}{-2i} = -i + 1 = 1 - i \end{cases}$$

Donc $a = 1$ et $b = 1 - i$. Ainsi la 3^{ème} solution z vérifie $z + 1 - i = 0$ c'est-à-dire $z = -1 + i$.

* Donnons les formes trigonométriques des trois solutions.

➡ Pour $x = 2$.

$$\text{Alors } |x| = 2; \text{ Soit } \theta = \arg(x), \text{ alors } \begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{2} = 1 \\ \sin \theta = \frac{0}{2} = 0 \end{cases}, \text{ donc } \theta = 0[2\pi].$$

D'où $x = 2(\cos 0 + i \sin 0)$.

➡ Pour $y = -i$.

$$|y| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\text{Soit } \theta = \arg(y), \text{ alors } \begin{cases} \cos \theta = \frac{0}{1} = 0 \\ \sin \theta = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases}, \text{ donc } \theta = -\frac{\pi}{2}[2\pi].$$

D'où $y = 1 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$.

➡ Pour $z = -1 + i$.

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Soit } \theta = \arg(z), \text{ alors } \begin{cases} \cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ donc } \theta = \pi - \frac{\pi}{4}[2\pi] = \frac{3\pi}{4}[2\pi].$$

D'où $z = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right)$.

c Soit respectivement A, B et C les images dans le plan complexe des nombres x, y, z .

* Montrons que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

$$|AB| = |y - x| = |-i - 2| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5};$$

$$|AC| = |z - x| = |-1 + i - 2| = |-3 + i| = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10};$$

$$|CC| = |z - x| = |-1 + i + i| = |-1 + 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

$$\text{On a } \left. \begin{array}{l} AB^2 = (\sqrt{5})^2 = 5 \\ AC^2 = (\sqrt{10})^2 = 10 \\ BC^2 = (\sqrt{5})^2 = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2, \text{ donc le triangle } ABC \text{ est rectangle en } B, \text{ de plus } AB = BC.$$

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B .

* Déterminons l'affixe du milieu I de $[AC]$.

L'affixe du milieu I de $[AC]$ est $z_I = \frac{x+z}{2} = \frac{2-1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, ainsi l'affixe du milieu I de $[AC]$ est $z_I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

* Déterminons l'image D de A par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit z_D l'affixe du point D image de A par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Comme l'application complexe associée à la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ a pour écriture

complexe $r(z) = e^{\frac{\pi}{2}}(x - z_I) + z_I$, alors $z_D = e^{\frac{\pi}{2}}(x - z_I) + z_I$.

Donc $z_D = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = (0 + i) \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = 1 + 2i$.

D'où D est le point d'affixe $z_D = 1 + 2i$

* Déterminons enfin la nature du quadrilatère $ABCD$.

L'affixe du milieu I de $[DB]$ est $\frac{1+2i-i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = z_I$, donc $[AC]$ et $[DB]$ ont même milieu, ainsi $ABCD$ est un parallélogramme, de plus le triangle ABC est rectangle.

D'où $ABCD$ est un carré.

❧ Problème ❧

Soit f la fonction numérique de la variable x définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x \ln(-x), & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

A.

1 **a** ● Étudions la continuité et la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[=]-\infty; +\infty[$, donc $D_f =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

* Étudions la continuité de f en $x_0 = 0$.

$f(0) = 0 + \sqrt{0^2 + 0} = 0 + \sqrt{0} = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x \ln(-x)) = 2 \times 0 = 0$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sqrt{x^2 + x}) = 0 + \sqrt{0^2 + 0} = 0 + 0 = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

D'où f est continue en $x_0 = 0$.

* Étudions la dérivabilité de f en $x_0 = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x \ln(-x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2 \ln(-x)) = 2(-\infty) = -\infty$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x} \times \sqrt{x+1} \right)$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \times \sqrt{x+1} \right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

D'où f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

● Vérifions si la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Si $x \in]-\infty; 0[$, la fonction $x \mapsto f(x) = 2x \ln(-x)$ est continue sur $]-\infty; 0[$ car il s'agit du produit et composée des fonctions continues sur $]-\infty; 0[$. De même, si $x \in]0; +\infty[$, $x \mapsto f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$ est continue sur $]0; +\infty[$ car c'est la somme et composée des fonctions qui le sont sur $]0; +\infty[$.

De plus f est continue en $x_0 = 0$. Ainsi f est continue sur $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[\cup \{0\} = \mathbb{R}$.

D'où f est continue sur $\mathbb{R}$.

● Déterminons les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est dérivable.

Si $x \in]-\infty; 0[$, la fonction $x \mapsto f(x) = 2x \ln(-x)$ est dérivable sur $]-\infty; 0[$ car il s'agit du produit et composée des fonctions dérivables sur $]-\infty; 0[$. De même, si $x \in]0; +\infty[$, $x \mapsto f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ car c'est la somme et composée des fonctions qui le sont sur $]0; +\infty[$.

Or f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$.

Par conséquent f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

b * Montrons l'existence d'une branche parabolique quand $x \rightarrow -\infty$, pour la courbe représentative de f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x \ln(-x)) = -\infty(+\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x \ln(-x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(-x) = +\infty.$$

D'où la courbe représentative de f admet en $-\infty$ une branche parabolique.

* Précisons sa direction.

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, alors la branche parabolique a pour direction (Oy) .

2 **a** * Montrons que la droite d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote pour la courbe (C) .

Soit $x \in]0; +\infty[$.

$$f(x) - y = x + \sqrt{x^2 + x} - 2x - \frac{1}{2} = \sqrt{x^2 + x} - x - \frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{x^2 + x} - (x + \frac{1}{2}))(\sqrt{x^2 + x} + (x + \frac{1}{2}))}{\sqrt{x^2 + x} + (x + \frac{1}{2})} = \frac{x^2 + x - (x^2 + x + \frac{1}{4})}{\sqrt{x^2 + x} + (x + \frac{1}{2})}$$

$$\Rightarrow f(x) - y = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x} + (x + \frac{1}{2})}.$$

$$\text{Ainsi } f(x) - y = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x} + x + \frac{1}{2}}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x} + (x + \frac{1}{2})} \right) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} + x + \frac{1}{2} \right) = +\infty.$$

D'où la droite d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote pour la courbe (C) .

* Déterminons la position de (C) par rapport à cette droite, quand $x \rightarrow +\infty$.

Quand $x \rightarrow +\infty$, alors $x > 0$. On a : $f(x) - y = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x} + (x + \frac{1}{2})} < 0$, car $\sqrt{x^2 + x} + (x + \frac{1}{2}) > 0$.

Donc $f(x) - y < 0$, d'où la courbe (C) est en dessous de la droite d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$.

b Montrons que, pour $x \geq 0$, (C) ne coupe pas l'asymptote.

(C) ne coupe pas l'asymptote si $f(x) - y \neq 0$.

$$\text{Pour } x \geq 0, f(x) - y = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x} + (x + \frac{1}{2})} \neq 0.$$

D'où pour $x \geq 0$, (C) ne coupe pas l'asymptote.

3 **a** ● Étudions les variations de f .

$$D_f =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}.$$

* Pour $f(x) = 2x \ln(-x)$, avec $x \in]-\infty; 0[$.

La fonction f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et pour tout $x \in]-\infty; 0[$, on a :

$$f'(x) = 2 \ln(-x) + 2x \left(\frac{-1}{-x} \right) = 2 \ln(-x) + 2 \times 1 = 2 \ln(-x) + 2.$$

$$f'(x) \geq 0 \iff 2 \ln(-x) \geq -2 \iff \ln(-x) \geq -1 \iff -x \leq e^{-1} \iff x \leq -e^{-1} \iff x \leq -\frac{1}{e}.$$

D'où si $x \in]-\infty; -\frac{1}{e}]$, $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{e}]$. Si $x \in [-\frac{1}{e}; 0[$, alors $f'(x) \leq 0$,

donc f est croissante sur $[-\frac{1}{e}; 0[$.

* Pour $f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}$, $x \in [0; +\infty[$.

La fonction est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{2\sqrt{x^2+x} + 2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} > 0, \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur }]0; +\infty[.$$

* Démontrons l'existence de deux extremas A et B .

Comme la fonction f est croissante sur $] -\infty; -\frac{1}{e}]$ et décroissante sur $[-\frac{1}{e}; 0[$, alors f admet un maximum sur $] -\infty; 0[$ en $-\frac{1}{e}$ égale à $f(-\frac{1}{e}) = 2 \times (-\frac{1}{e}) \ln(\frac{1}{e}) = \frac{2}{e}$.

De même f étant décroissante sur $[-\frac{1}{e}; 0[$ et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, alors f admet un minimum en 0 égale à $f(0) = 0$.

D'où f admet un maximum en $A(-\frac{1}{e}; \frac{2}{e})$ et un minimum en $B(0; 0)$.

b * Calculons $f(-e), f(-1), f(-\frac{1}{e}), f(0), f(1)$.

$$f(-e) = -2e \times \ln(e) = -2e \times 1 = -2e, \text{ donc } f(-e) = -2e.$$

$$f(-1) = -2 \ln(1) = -2 \times 0 = 0, \text{ donc } f(-1) = 0.$$

$$f(-\frac{1}{e}) = -\frac{2}{e} \ln(\frac{1}{e}) = -\frac{2}{e} \times (-1) = \frac{2}{e}, \text{ donc } f(-\frac{1}{e}) = \frac{2}{e}.$$

$$f(0) = 0 + \sqrt{0^2 + 0} = 0 + \sqrt{0} = 0, \text{ donc } f(0) = 0.$$

$$f(1) = 1 + \sqrt{1^2 + 1} = 1 + \sqrt{2}, \text{ donc } f(1) = 1 + \sqrt{2}.$$

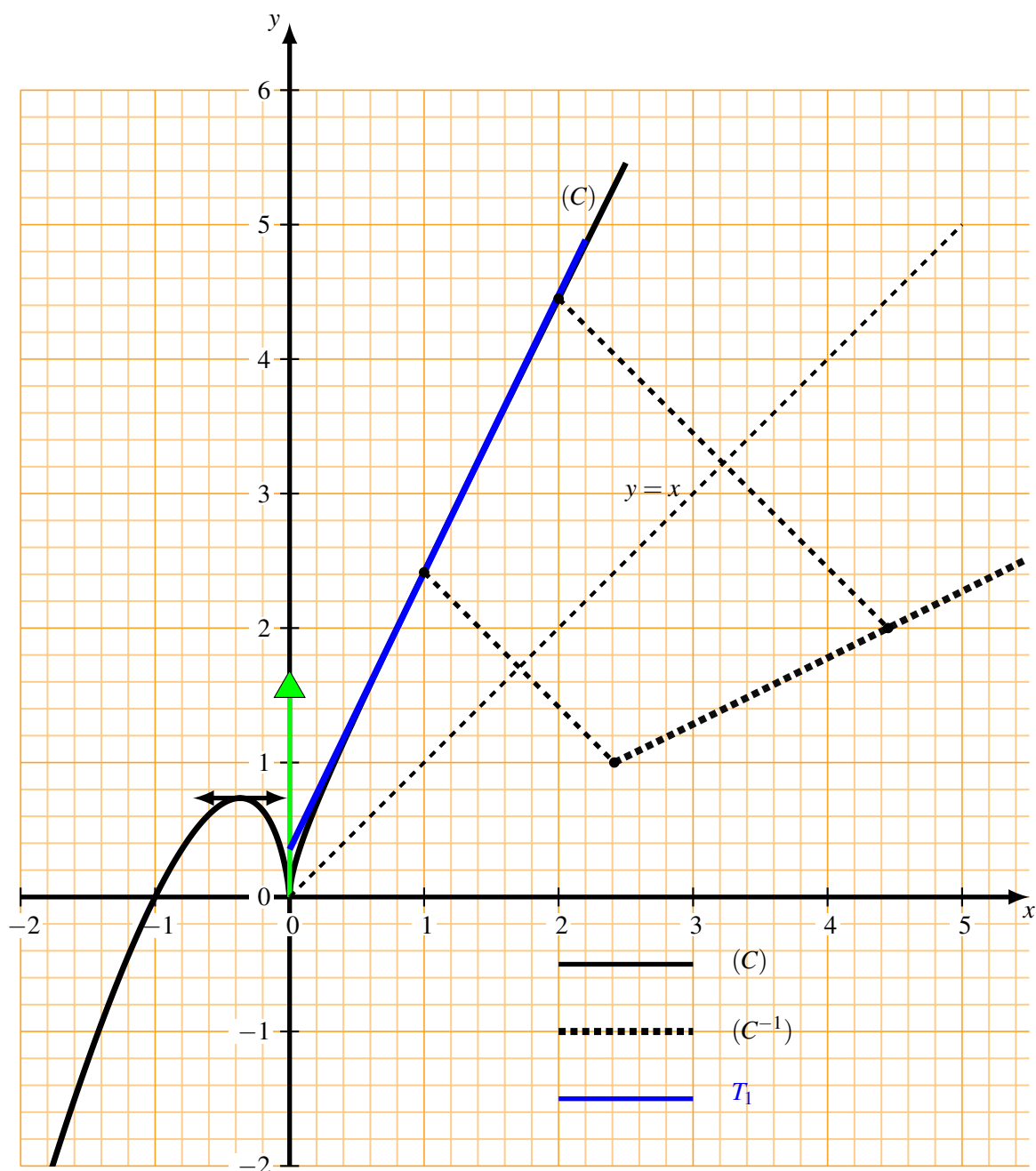
* Établissons un tableau de variation de f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ d'après ce qui précède. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + x}) = +\infty.$$

D'où le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	$-\frac{1}{e}$	0	4
$f'(x)$	+	0	-	+
f	0	$\frac{2}{e}$	0	$+\infty$

c Dessinons la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



* Reportons les demi-tangentes, puis la tangente à la courbe de direction Ox (axe des abscisses).

Déterminons l'équation de la tangente à (C) en $x_0 = 1$.

$$f(0) = 1 + \sqrt{1^2 + 1} = 1 + \sqrt{2} = 0; f'(1) = 1 + \frac{2 \times 1 + 1}{2\sqrt{1+1}} = 1 + \frac{3}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{4+3\sqrt{2}}{4}.$$

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{4}\right)(x - 1) + 1 + \sqrt{2} = \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{4}\right)x - 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} + 1 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{4}\right)x + \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Donc l'équation de la tangente à (C) est $y = \left(\frac{4+3\sqrt{2}}{4}\right)x + \frac{\sqrt{2}}{4}$.

B.

- 1 Démontrons que la restriction de f à $[1, +\infty[$ admet une bijection réciproque f^{-1} en précisant l'ensemble de définition et l'ensemble image.

La fonction f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ en particulier sur $[1; +\infty[$. De plus la fonction f est

strictement croissante sur $[1; +\infty[$. D'où la restriction de f à $[1; +\infty[$ admet une bijection réciproque f^{-1} .

Ainsi la restriction de f à $[1; +\infty[$ réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $f([1; +\infty[) = \left[f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$.

Or $f(1) = 1 + \sqrt{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

D'où la restriction de f à $[1; +\infty[$ admet une bijection réciproque f^{-1} définie de $\left[1 + \sqrt{2}; +\infty \right[$ et dont l'ensemble image est $[1; +\infty[$.

* Dessinons sa courbe représentative $(C)^{-1}$ dans le même repère que celui de (C) .

Puisque les fonction f et f^{-1} sont réciproques l'une de l'autre, alors leurs représentations graphiques dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).

Pour le tracé de $(C)^{-1}$ voir le graphique précédent où la courbe $(C)^{-1}$ est en pointillée.

- 2 Calculons, en cm^2 , l'aire géométrique du domaine (A) limite par les frontières $x = -1$; $x = -\frac{1}{e}$, l'axe Ox et la courbe (C) .

Soit $\mathbf{a}$ l'aire du domaine (A) .

$\mathbf{a} = \int_{-1}^{-\frac{1}{e}} f(x) dx \times u.a.$ $u.a$ représente l'unité d'aire : $u.a = 2cm \times 2cm = 4cm^2$.

$\int_{-1}^{-\frac{1}{e}} f(x) dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{e}} (2x \ln(-x)) dx$. Effectuons une intégration par parties.

Posons $u'(x) = 2x$ et $v(x) = \ln(-x)$. Alors $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{e}} f(x) dx = \left[x^2 \ln(-x) \right]_{-1}^{-\frac{1}{e}} - \int_{-1}^{-\frac{1}{e}} \left(x^2 \times \frac{1}{x} \right) dx = \left[x^2 \ln(-x) \right]_{-1}^{-\frac{1}{e}} - \int_{-1}^{-\frac{1}{e}} x dx = \left[x^2 \ln(-x) \right]_{-1}^{-\frac{1}{e}} - \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^{-\frac{1}{e}}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{-\frac{1}{e}} f(x) dx = \left(-\frac{1}{e} \right)^2 \ln \left(\frac{1}{e} \right) - (-1)^2 \ln(1) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{e} \right)^2 + \frac{1}{2} (-1)^2$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{-\frac{1}{e}} f(x) dx = \frac{1}{e^2} \times (-1) - 0 - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2e^2} + \frac{1}{2}.$$

Donc $\mathbf{a} = \left(-\frac{3}{2e^2} + \frac{1}{2} \right) \times 4cm^2 = (-6e^{-2} + 2)cm^2 = (2 - 6e^{-2})cm^2$.

D'où l'aire géométrique du domaine (A) limite par les frontières $x = -1$; $x = -\frac{1}{e}$, l'axe Ox et la courbe (C) est $\mathbf{a} = (2 - 6e^{-2})cm^2$.

C. Soit un point $M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ animé d'un mouvement plan, curviligne, et sa position en fonction du temps t donnée par :

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 + \sqrt{t^2 + 3t + 2} \end{cases} \quad \text{avec } t \geq 0$$

- 1 * Montrons que la trajectoire de M est une partie de (C) que nous préciserons.

Comme $t \geq 0$, alors $x = t + 1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$, donc $x \in [1; +\infty[$. De plus $x = t + 1 \Rightarrow t = x - 1$.

Ainsi $y = x + \sqrt{(x-1)^2 + 3(x-1) + 2} = x + \sqrt{x^2 - 2x + 1 + 3x - 3 + 2} = x + \sqrt{x^2 + x} = f(x)$ avec $x \geq 1$.

D'où $y = f(x)$ avec $x \geq 1$.

Par suite la trajectoire de M est la partie de (C) dans l'intervalle $[1; +\infty[$.

* Déterminons le sens de parcours de M .

Si $t = 0$, alors $x = 0 + 1 = 1$; $y = 0 + 1 + \sqrt{0^2 + 3 \times 0 + 2} = 1 + \sqrt{2}$.

Puisque la trajectoire de M est la partie de (C) dans l'intervalle $[1; +\infty[$, alors si t croît de 0 à $+\infty$, le mobile M va de M_0 à l'infini.

- 2 Déterminons et représentons le vecteur vitesse $\vec{V}$ et le vecteur accélérateur $\vec{\Gamma}$ à $t = 1$.

Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ est défini par $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt}$

$$\text{c'est-à-dire } \vec{V}(t) : \begin{cases} x' = -e^{-t} \\ y' = -e^{-t} (2 - te^{2t}) + e^{-t} (-e^{2t} - 2te^{2t}) = e^{-t} (-2 - e^{2t} - te^{2t}) \end{cases}$$

$$\text{D'où } \vec{V}(t) : \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 + \frac{2t+3}{2\sqrt{t^2+3t+2}} \end{cases}$$

Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ est défini par $\vec{\Gamma}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}$.

$$\vec{\Gamma}(t) : \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = \frac{2 \times 2\sqrt{t^2+3t+2} - (2t+3) \times \frac{2t+3}{\sqrt{t^2+3t+2}}}{(2\sqrt{t^2+3t+2})^2} = \frac{4(t^2+3t+2) - (2t+3)^2}{4(t^2+3t+2)\sqrt{t^2+3t+2}} = \frac{4t^2+12t+8-4t^2-12t-9}{4(t^2+3t+2)\sqrt{t^2+3t+2}} = -\frac{1}{4(t^2+3t+2)\sqrt{t^2+3t+2}} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \vec{\Gamma}(t) : \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = -\frac{1}{4(t^2+3t+2)\sqrt{t^2+3t+2}} \end{cases}$$

* Pour $t = 1$, $x = 2$; $y = 2 + \sqrt{1+3+2} = 2 + \sqrt{6}$; $x' = 1$; $y' = 1 + \frac{2+3}{2\sqrt{1+3+2}} = 1 + \frac{5}{2\sqrt{6}} = 1 + \frac{5\sqrt{6}}{12}$; $x'' = 0$;
 $y'' = -\frac{1}{4(1+3+2)\sqrt{1+3+2}} = -\frac{\sqrt{6}}{144}$.

D'où le mobile est en $M_1(2; 2 + \sqrt{6})$ avec pour vecteur vitesse $\vec{V}_1\left(1; 1 + \frac{5\sqrt{6}}{12}\right)$ et pour vecteur accélérateur $\vec{\Gamma}_1\left(0; -\frac{\sqrt{6}}{144}\right)$.

* Vérifions si le mouvement est accéléré ou retardé à cet instant.

$$\text{Comme } \vec{V}_1 \bullet \vec{\Gamma}_1 = 1 \times 0 + \left(1 + \frac{5\sqrt{6}}{12}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{6}}{144}\right) = -\left(1 + \frac{5\sqrt{6}}{12}\right) \left(\frac{\sqrt{6}}{144}\right) < 0.$$

Alors le mouvement de M est retardé.

- 3 Montrons que le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire du point M .

$$\text{Comme } \vec{V}(t) : \begin{cases} x' = 1 \neq 0 \\ y' = 1 + \frac{2t+3}{2\sqrt{t^2+3t+2}} \neq 0 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \vec{V}(t) \neq 0 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Alors le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire du point M .

Sujet 6

Session de 1988

Exercice 1

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à termes positifs, de premier terme $u_1 = 1$ et telle que pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on ait $(u_{n+1})^2 = e u_n$.
Donc $u_{n+1} = \sqrt{e u_n} = (e u_n)^{\frac{1}{2}}$.

- 1 Calculons u_2, u_3, u_4 en donnant les résultats sous formes e^r où r est rationnel.

$$u_2 = (e u_1)^{\frac{1}{2}} = (e \times 1)^{\frac{1}{2}} = (e)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}, \text{ donc } u_2 = e^{\frac{1}{2}}$$

$$u_3 = (e u_2)^{\frac{1}{2}} = \left(e \times e^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{4}}, \text{ donc } u_3 = e^{\frac{3}{4}}$$

$$u_4 = (e u_3)^{\frac{1}{2}} = \left(e \times e^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^{1+\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(e^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{7}{8}}, \text{ donc } u_4 = e^{\frac{7}{8}}$$

- 2 On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln u_n - a$ où a est un réel strictement positif.

- a Déterminons a pour que (v_n) soit une suite géométrique en précisant la raison.

$$v_{n+1} = \ln u_{n+1} - a = \ln(e u_n)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(e u_n) - a = \frac{1}{2} (\ln e + \ln u_n) - a = \frac{1}{2} (1 + \ln u_n) - a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln u_n - a$$

$$\text{Or } v_n = \ln u_n - a, \text{ donc } \ln u_n = v_n + a, \text{ ainsi } v_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (v_n + a) - a = \frac{1}{2} v_n + \frac{1-a}{2}.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique si $\frac{1-a}{2} = 0$ c'est-à-dire $1 - a = 0$, d'où $a = 1$.

La suite (v_n) est suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$.

- b Calculons dans ce cas la limite de v_n , puis celle de u_n quand n tend vers $+\infty$.

➡ Calculons dans ce cas la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

D'après 2) a) la suite (v_n) est suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme v_1

$$v_1 = \ln u_1 - 1 = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1.$$

$$\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}^*, v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \text{ car } \frac{1}{2} < 1. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

➡ Calculons dans ce cas la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Comme $v_n = \ln u_n - 1$, alors $\ln u_n = v_n + 1 \Rightarrow u_n = e^{v_n+1}$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{v_n+1} = e^{0+1} = e^1 = e. \text{ D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e.$$

- 3 Soit $a = 1$; on désigne par A_k la somme des k premiers termes de la suite géométrique (v_n) et par B_k le produit des k premiers termes de la suite (u_n) .

● Calculons A_k et B_k en fonction de k .

➡ Calculons A_k en fonction de k .

D'après 2) a) (v_n) est suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = -1$.

$$\text{Donc } A_k = v_1 + v_2 + \dots + v_k = v_1 \times \left(\frac{1-q^k}{1-q}\right) = -\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}\right) = \left(-1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \times \frac{2}{1} = -2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2,$$

$$\text{donc } A_k = 2\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2.$$

➡ Calculons B_k en fonction de k .

$$B_k = u_1 \times u_2 \times u_3 \times \dots \times u_k. \text{ D'après la question 2) b) pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{v_n+1}.$$

Donc $B_k = e^{v_1+1} \times e^{v_2+1} \times e^{v_3+1} \times \dots \times e^{v_k+1} = e^{v_1+v_2+v_3+\dots+v_k+1+1+1+\dots+1} = e^{A_k+k} \Rightarrow B_k = e^{2(\frac{1}{2})^k-2+k}$.
 D'où $B_k = e^{2(\frac{1}{2})^k-2+k}$.

● Déterminons les limites de A_k et B_k quand k tend vers $+\infty$.

➡ Déterminons les limites de A_k quand k tend vers $+\infty$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ car $\frac{1}{2} < 1$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(2\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\right) = 0 - 2 = -2$. Donc $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = -2$.

➡ Déterminons les limites de B_k quand k tend vers $+\infty$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} (-2+k) = +\infty$, alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} B_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(e^{2(\frac{1}{2})^k-2+k}\right) = +\infty$.

D'où $\lim_{k \rightarrow +\infty} B_k = +\infty$

Exercice 2

Soit dans le plan complexe, l'application associant au point a d'affixe z , le point A d'affixe $Z = z + 1 + \frac{2}{z+1}$, ($z \neq -1$).

1 Calculons (X, Y) coordonnées de A , en fonction de (x, y) coordonnées de a .

$$\begin{aligned} Z &= z + 1 + \frac{2}{z+1} = x + iy + 1 + \frac{2}{x+iy+1} = x + 1 + iy + \frac{2(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} \\ &= x + 1 + iy + \frac{2(x+1)-2iy}{(x+1)^2+y^2} = x + 1 + iy + \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2} + \frac{-2iy}{(x+1)^2+y^2} \\ &= x + 1 + \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2} + iy + \frac{-2iy}{(x+1)^2+y^2} = (x+1) \left(1 + \frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) + iy \left(1 - \frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi $Z = (x+1) \left(1 + \frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) + iy \left(1 - \frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right)$,

c'est-à-dire $X + iY = (x+1) \left(1 + \frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) + iy \left(1 - \frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right)$.

$$\text{D'où } \begin{cases} X = (x+1) \left(1 + \frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) \\ Y = y \left(1 - \frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) \end{cases}$$

2 **a** Déterminons l'ensemble E des points A tels que Z soit réel.

Z est réel si et seulement si sa partie imaginaire Y est nulle, donc si et seulement si $y \left(1 - \frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) = 0$.

$$\begin{aligned} y \left(1 - \frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) = 0 &\iff y = 0 \text{ ou } 1 - \frac{2}{(x+1)^2+y^2} = 0 \iff y = 0 \text{ ou } \frac{(x+1)^2+y^2-2}{(x+1)^2+y^2} = 0 \\ &\iff y = 0 \text{ ou } (x+1)^2+y^2-2 = 0 \text{ avec } (x+1)^2+y^2 \neq 0 \\ &\iff y = 0 \text{ ou } (x+1)^2+y^2 = 2 \text{ avec } (x, y) \neq (-1, 0) \end{aligned}$$

Soit (D) la droite d'équation $y = 0$ et (C) le cercle de centre $\Omega(-1, 0)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$.

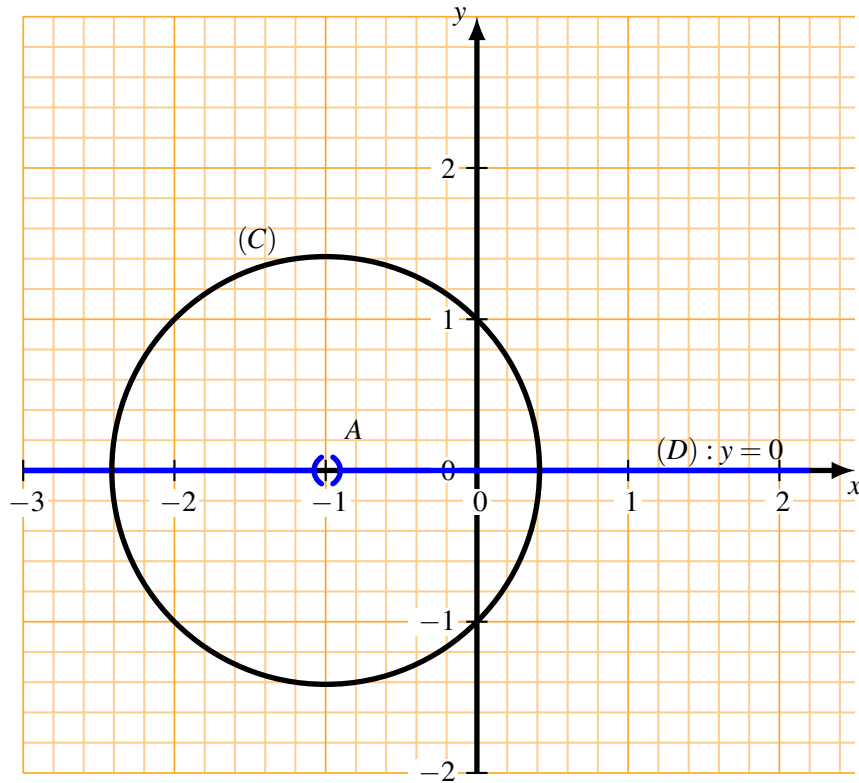
On remarque que le point $\Omega(-1, 0)$ appartient à la droite (D) .

Puisque Z est réel si et seulement si $y = 0$ ou $(x+1)^2+y^2 = 2$ avec $(x, y) \neq (-1, 0)$, alors l'ensemble

E est la réunion de la droite (D) privée de $\Omega(-1, 0)$ et du cercle (C) de centre $\Omega(-1, 0)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$.

● Construisons la partie de E qui est un cercle de centre $\Omega(-1, 0)$.

Il s'agit du cercle (C) de centre $\Omega(-1, 0)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$.



b) Déterminons l'ensemble F des points A tels que Z soit imaginaire pur.

Z est imaginaire pur si et seulement si la partie réelle X de Z est nulle,

donc si et seulement si $(x+1) \left(1 + \frac{2}{(x+1)^2 + y^2} \right) = 0$.

$$(x+1) \left(1 + \frac{2}{(x+1)^2 + y^2} \right) = 0 \iff x+1 = 0 \text{ ou } 1 + \frac{2}{(x+1)^2 + y^2} = 0$$

$$\iff x = -1 \text{ ou } \frac{(x+1)^2 + y^2 + 2}{(x+1)^2 + y^2} = 0$$

$$\iff x = -1 \text{ ou } (x+1)^2 + y^2 + 2 = 0 \text{ avec } (x+1)^2 + y^2 \neq 0$$

$$\iff x = -1 \text{ ou } (x+1)^2 + y^2 + 2 = 0 \text{ avec } (x, y) \neq (-1, 0)$$

Or $(x+1)^2 + y^2 + 2 = 0 \iff (x+1)^2 + y^2 = -2$ impossible car la somme des carrés de deux nombres est positive.

Ainsi $X = 0 \iff x = -1$ avec $(x, y) \neq (-1, 0)$. Soit (Δ) la droite d'équation $x = -1$ avec $\Omega(-1, 0)$

On remarque que le point $\Omega(-1, 0)$ appartient à la droite (D) .

Donc Z est imaginaire pur si et seulement

si $x = -1$ avec $(x, y) \neq (-1, 0)$.

D'où l'ensemble F est la droite (D) privée de $\Omega(-1, 0)$

3 On suppose que $|z+1| = 1$.

➡ Déterminons z tel que l'on ait $|Z| = 1$.

$$|z+1|=1 \Rightarrow |z+1|^2=1^2=1 \Rightarrow \left(\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2=1 \Rightarrow (x+1)^2+y^2=1 \quad \textcircled{1}.$$

$$|Z|=1 \Rightarrow |Z|^2=1 \Rightarrow \left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)^2=1 \Rightarrow X^2+Y^2=1, \text{ or } \begin{cases} X=(x+1)\left(1+\frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) \\ Y=y\left(1-\frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right) \end{cases}$$

$$\text{donc } (x+1)^2\left(1+\frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right)^2+y^2\left(1-\frac{2}{(x+1)^2+y^2}\right)^2.$$

$$\text{Comme } (x+1)^2+y^2=1, \text{ on obtient } (x+1)^2\left(1+\frac{2}{1}\right)^2+y^2\left(1-\frac{2}{1}\right)^2=1 \Rightarrow (x+1)^2(3)^2+y^2(-1)^2=1 \\ \Rightarrow 9(x+1)^2+y^2=1 \quad \textcircled{2}.$$

$$\text{Ainsi on obtient le système suivant : } \begin{cases} (x+1)^2+y^2=1 & \textcircled{1} \\ 9(x+1)^2+y^2=1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \Rightarrow 9(x+1)^2+y^2-(x+1)^2-y^2=1-1 \Rightarrow 8(x+1)^2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1.$$

$$\text{Remplaçons } x=-1 \text{ dans } \textcircled{1}. \text{ On a } (-1+1)^2+y^2=1 \Rightarrow 0+y^2=1 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=1 \text{ ou } y=-1.$$

$$\text{Donc } z=-1+i \text{ ou } z=-1-i.$$

➡ Dédoublons-en Z .

$$\text{On a } Z=z+1+\frac{2}{z+1}.$$

$$\ast \text{ Pour } z=-1+i, Z=-1+i+1+\frac{2}{-1+i+1}=i+\frac{2}{i}=i-\frac{2i}{1}=i-2i=-i.$$

$$\ast \text{ Pour } z=-1-i, Z=-1-i+1+\frac{2}{-1-i+1}=-i+\frac{2}{-i}=i+\frac{2i}{1}=i+2i=3i.$$

$$\text{D'où } Z=-i \text{ ou } Z=3i.$$

❧ Problème ❧

A. Soit les fonctions numériques de la variable réelle x , dépendant du paramètre réel m , non nul, définies par : $f_m(x) = \frac{e^{2x}+m}{2e^x}$.

1 Étudions les variations de f_m suivant les valeurs de m en distinguant les cas où $m < 0$ et $m > 0$.

$$D_{f_m} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[.$$

La fonction f_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'_m(x) = \frac{2e^{2x} \times 2e^x - 2e^x \times (e^{2x}+m)}{(2e^x)^2} = \frac{2e^x(2e^{2x}-e^{2x}-m)}{4e^{2x}} = \frac{e^x(e^{2x}-m)}{2e^{2x}}. \text{ Donc } f'_m(x) = \frac{e^x(e^{2x}-m)}{2e^{2x}}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0 \text{ et } e^x > 0, \text{ donc le signe de } f'_m(x) \text{ est celui de } e^{2x}-m.$$

$$\text{Si } m \leq 0, \text{ alors } -m \geq 0, \text{ donc } e^{2x}-m > 0 \text{ ainsi } f'_m(x) > 0.$$

$$\text{D'où } f_m \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \text{ pour } m \in]-\infty; 0].$$

$$\text{Si } m > 0, \text{ alors } e^{2x}-m=0 \Rightarrow e^{2x}=m \Rightarrow 2x=\ln(m) \Rightarrow x=\frac{1}{2}\ln(m).$$

$$\text{Si } x \in]-\infty; \frac{1}{2}\ln(m)], \text{ alors } f'_m(x) \leq 0, \text{ donc } f_m \text{ est décroissante sur }]-\infty; \frac{1}{2}\ln(m)].$$

$$\text{Si } x \in [\frac{1}{2}\ln(m); +\infty[, \text{ alors } f'_m(x) \geq 0, \text{ donc } f_m \text{ est croissante sur } [\frac{1}{2}\ln(m); +\infty[.$$

2 Déterminons les valeurs de m pour lesquelles, on a la relation : pour tout réel x : $|(f'_m(x))^2 - (f_m(x))^2| = 1$ où f'_m est la fonction dérivée de f_m .

$$|(f'_m(x))^2 - (f_m(x))^2| = 1 \iff \left| \left(\frac{e^x(e^{2x}-m)}{2e^{2x}} \right)^2 - \left(\frac{e^{2x}+m}{2e^x} \right)^2 \right| = 1$$

$$\iff \left| \frac{e^{4x}-2me^{2x}+m^2}{4e^{2x}} - \left(\frac{e^{4x}+2me^{2x}+m^2}{4e^{2x}} \right) \right| = 1 \iff \left| \frac{e^{4x}-2me^{2x}+m^2-e^{4x}-2me^{2x}-m^2}{4e^{2x}} \right| = 1 \iff \left| \frac{-4me^{2x}}{4e^{2x}} \right| = 1$$

$$\Longleftrightarrow |-m| = 1 \Longleftrightarrow |m| = 1 \Longleftrightarrow m = -1 \text{ ou } m = 1.$$

D'où on a la relation : pour tout réel x : $|(f'_m(x))^2 - (f_m(x))^2| = 1$ si $m = -1$ ou $m = 1$.

B. Soit les fonctions numériques définies par :

$x \mapsto f_1(x) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x}$ (si $m = 1$) et $f_{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$ (si $m = -1$) de courbes C_1 et C_{-1} .

1 **a** Montrons que $f_1(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $f_{-1}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

$$f_1(x) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x} = \frac{(e^{2x}+1) \times e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x-x}+e^{-x}}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

$$\text{D'où } f_1(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

$$\text{De même } f_{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x} = \frac{(e^{2x}-1) \times e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x-x}-e^{-x}}{2} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

$$\text{D'où } f_{-1}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

b ● Vérifions que f_1 et f_{-1} sont respectivement paire et impaire.

* Montrons que f_1 est paire.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}. \text{ Alors } -x \in \mathbb{R} \text{ et on a : } f_1(-x) = \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = f_1(x).$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $f_1(-x) = f_1(x)$. D'où f_1 est paire.

* Montrons que f_{-1} est impaire.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_{-1}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x}-e^x}{2} = \frac{-e^x+e^{-x}}{2} = \frac{-(e^x-e^{-x})}{2} = -f_{-1}(x).$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $f_{-1}(-x) = -f_{-1}(x)$. D'où f_{-1} est impaire.

● Montrons que C_{-1} admet un point d'inflexion.

La courbe C_{-1} admet un point d'inflexion si la dérivée seconde f_{-1}'' de f_{-1} s'annule en changeant de signe.

La fonction f_{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_{-1}'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \text{ et } f_{-1}''(x) = (f_{-1}'(x))' = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

$$\text{Soit } f_{-1}''(x) = 0. \text{ Alors } \frac{e^x-e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Tableau de signe

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_{-1}''(x)$	$-$	$\begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}$	$+$

D'après le tableau de signe f_{-1}'' s'annule en changeant de signe. D'où C_{-1} admet un point d'inflexion.

$$f_{-1}(0) = \frac{e^0-e^0}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

Donc le point d'inflexion est le point $O(0; 0)$.

2 ● Déterminons la position relative de C_1 par rapport à C_{-1} .

$$f_1(x) - f_{-1}(x) = \frac{e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}}{2} = \frac{2e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Ainsi } f_1(x) - f_{-1}(x) > 0.$$

D'où la courbe C_1 est au dessus de la courbe C_{-1} sur $\mathbb{R}$.

* Construisons C_1 et C_{-1} dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unités $2cm$.

➡ Variation de f_1 .

$$\text{La fonction } f_1 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Soit $f_1'(x) = 0$. Alors $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \Rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$.

Tableau de signe

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

De plus $f_1(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$. D'où le tableau de variation de f_1 .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$
f_1	$+\infty$	1	$+\infty$

➡ Variation de f_{-1} .

La fonction f_{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{-1}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ car $\forall x \in \mathbb{R} \ e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$.
Donc f_{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

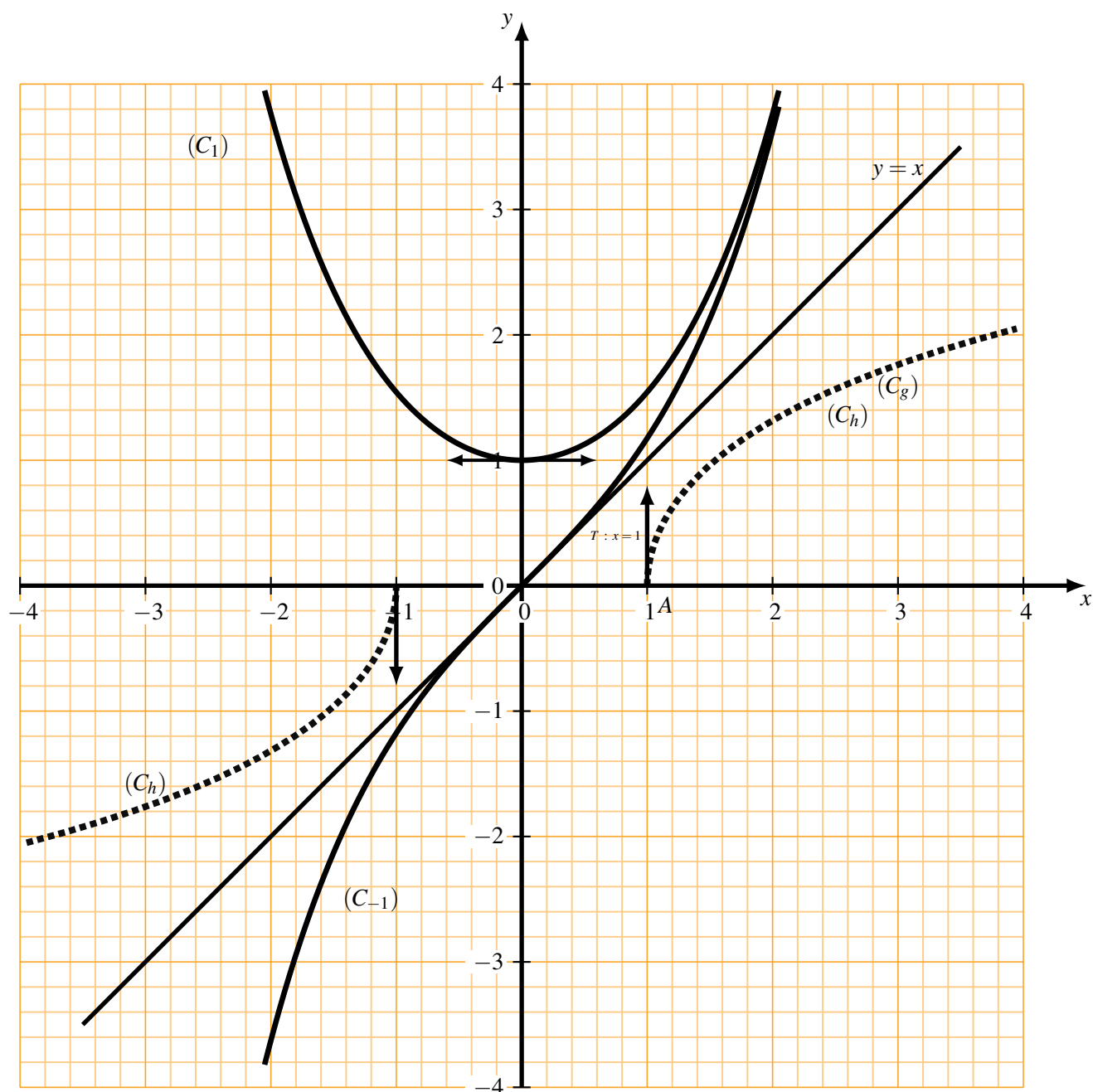
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

D'où le tableau de variation de f_{-1} .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_{-1}'(x)$	$+$	
f_{-1}	$-\infty$	$+\infty$

D'où la construction de C_1 et C_{-1} .



● Précisons les branches infinies.

➡ Pour la courbe (C_1) .

Nous avons vu que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = 0 - \infty = -\infty. \text{ De même } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = +\infty + 0 = +\infty$$

Donc la courbe (C_1) de f_1 admet une branche parabolique de direction (Oy) .

➡ Pour la courbe (C_{-1}) .

Nous avons vu que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_{-1}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{-1}(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_{-1}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{-x}}{x} \right) = 0 + \infty = +\infty.$$

De même $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_{-1}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{e^{-x}}{x} \right) = +\infty + 0 = +\infty$.

Donc la courbe (C_{-1}) de f_{-1} admet une branche parabolique de direction (Oy) .

● Précisons $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) - f_{-1}(x))$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) - f_{-1}(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}) = 0.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) - f_{-1}(x)) = 0$.

Ainsi les courbes (C_1) et (C_{-1}) sont asymptotes l'une de l'autre au voisinage de $+\infty$.

● Traçons la tangente à C_{-1} au point d'inflexion.

Le point d'inflexion est $O(0, 0)$. $f_{-1}(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$.

$$f'_{-1}(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Donc l'équation de la tangente à C_{-1} au point $O(0, 0)$ est $y = 1(x - 0) + 0$ c'est-à-dire $y = x$.

Voir figure pour le tracé de tangente.

3 ● Calculons en cm^2 l'aire $A(\lambda)$ du domaine défini par : $\begin{cases} 0 \leq x \leq \lambda \\ f_{-1}(x) \leq y \leq f_1(x) \end{cases}$ où λ décrit $]0, +\infty[$.

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda (f_1(x) - f_{-1}(x)) dx \times u.a. \quad u.a = 2cm \times 2cm = 4cm^2.$$

Posons $I = \int_0^\lambda (f_1(x) - f_{-1}(x)) dx$.

Nous avons vu que $f_1(x) - f_{-1}(x) = e^{-x}$, donc $I = \int_0^\lambda e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^\lambda$.

Ainsi $I = -e^{-\lambda} - (-e^0) = -e^{-\lambda} + 1 = 1 - e^{-\lambda}$.

Donc $A(\lambda) = (1 - e^{-\lambda}) \times 4cm^2 = (4 - 4e^{-\lambda}) cm^2$.

D'où $A(\lambda) = (4 - 4e^{-\lambda}) cm^2$.

● Calculons la limite de $A(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (4 - 4e^{-\lambda}) cm^2 = (4 - 0) cm^2 = 4cm^2.$$

Donc $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = 4cm^2$.

Soit la fonction numérique $x \mapsto h(x) = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|$.

● Déterminons D_h , l'ensemble de définition de h .

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \geq 0\}.$$

Soit $x^2 - 1 = 0$. Alors $x^2 = 1$, donc $x = -1$ ou $x = 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	$\emptyset$	$\emptyset$	$+$

Donc $D_h =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

● Montrons que h est impaire en montrant que pour tout $x \in D_h$, $h(x) + h(-x) = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $-x \in \mathbb{R}$. On a :

$$h(-x) = \ln \left| -x + \sqrt{(-x)^2 - 1} \right| = \ln \left| -x + \sqrt{x^2 - 1} \right|.$$

$$h(x) + h(-x) = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| + \ln \left| -x + \sqrt{x^2 - 1} \right| = \ln \left| \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \times \left(-x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \right| = \ln \left| -x^2 + x^2 - 1 \right|$$

$$\Rightarrow h(x) + h(-x) = \ln |-1| = \ln(1) = 0. \text{ Ainsi } h(x) + h(-x) = 0 \text{ ce qui implique } h(-x) = -h(x).$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $h(-x) = -h(x)$. D'où h est impaire.

● Montrons que $x + \sqrt{x^2 - 1} < 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1]$.

Soit $x \in]-\infty, -1]$. Comme $x^2 - 1 > 0$ et $x^2 > 0$, alors $x^2 - 1 < x^2 \iff \sqrt{x^2 - 1} < \sqrt{x^2} \iff \sqrt{x^2 - 1} < |x|$.

Or $x \in]-\infty, -1]$, donc $|x| = -x$.

$$\text{Ainsi } \sqrt{x^2 - 1} < -x \iff \sqrt{x^2 - 1} + x < 0 \iff x + \sqrt{x^2 - 1} < 0.$$

D'où $x + \sqrt{x^2 - 1} < 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1]$.

● Dédoublons-en l'expression de $h(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

Comme $x + \sqrt{x^2 - 1} < 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -1]$, alors $x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$ si $x \in [1, +\infty[$.

$$\text{Donc } h(x) = \begin{cases} \ln \left(-x - \sqrt{x^2 - 1} \right) & \text{si } x \in]-\infty, -1] \\ \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

4 a Montrons que la restriction de f_1 à $[0, +\infty[$ admet une bijection réciproque g ,

définie de : $[1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ par $g(x) = h(x)$.

La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $[0, +\infty[$, donc sa restriction est aussi continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, f_1 est croissante sur $[0, +\infty[$.

D'où f_1 admet une bijection réciproque g définie de $f_1([0, +\infty[)$ vers $[0, +\infty[$.

$$f_1(0) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty. \text{ Donc } f_1([0, +\infty[) = [1, +\infty[.$$

Par suite la restriction de f_1 à $[0, +\infty[$ admet une bijection réciproque g définie de : $[1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$.

► Calculons $g(x)$.

Soit $x \in [1, +\infty[; y \in [0, +\infty[$ tel que $f_1(y) = x$.

$$f_1(y) = x \Rightarrow \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x \Rightarrow e^y + e^{-y} = 2x \Rightarrow e^{2y} + 1 = 2xe^y \Rightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0.$$

$$\text{Posons } Y = e^y. \text{ Alors } Y^2 = e^{2y}. \text{ Donc } e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \Rightarrow Y^2 - 2xY + 1 = 0.$$

$$\Delta = (-2x)^2 - 4(1)(1) = 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) \leq 0 \text{ car } x \leq 1.$$

$$Y_1 = \frac{2x - \sqrt{4(x^2 - 1)}}{2} = \frac{2x - 2\sqrt{x^2 - 1}}{2} = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$Y_2 = \frac{2x + \sqrt{4(x^2 - 1)}}{2} = \frac{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Or $Y = e^y$. Ainsi $e^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ ou $e^y = x + \sqrt{x^2 - 1}$. Donc $y = \ln \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)$ ou $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$.

Comme $y \in [0, +\infty[$, alors pour $x = 2 \in [1, +\infty[$, on a : $y = \ln \left(2 - \sqrt{2^2 - 1} \right)$ ou $y = \ln \left(2 + \sqrt{2^2 - 1} \right)$

$$\Rightarrow y = \ln \left(2 - \sqrt{3} \right) \text{ ou } y = \ln \left(2 + \sqrt{3} \right).$$

Puisque $2 - \sqrt{3} < 1$, alors $y = \ln \left(2 - \sqrt{3} \right) < 0$, impossible, donc $y = \ln \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)$ ne convient pas.

Puisque $2 + \sqrt{3} > 1$, alors $y = \ln \left(2 + \sqrt{3} \right) > 0$, donc $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$ convient.

D'où $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = h(x)$.

En conclusion la restriction de f_1 à $[0, +\infty[$ admet une bijection réciproque g définie de :

$[1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ par $g(x) = h(x)$.

b ● Déterminons l'équation de la demi-tangente T à la courbe de g au point A , de coordonnées $(1, 0)$.

Nous savons que $f_1(0) = 1$, donc $g(1) = 0$. Or $f_1'(0) = 0$, d'où g n'est pas dérivable en 1.

Donc l'équation de la demi-tangente T à la courbe de g au point A est $x = 1$.

● Traçons la demi-tangente T , et la courbe de g dans le même repère que C_1 .

Voir la figure précédente pour le tracé de T .

Puisque les fonction f_1 et g sont réciproques l'une de l'autre, alors leurs représentations graphiques dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).

Pour le tracé de (C_g) voir le graphique précédent où la courbe C_g est en pointillée.

● Déduisons-en le tracé de la courbe de h .

Puisque la fonction h est impaire, alors (C_h) et (C_g) coïncide sur $[1; +\infty[$ et elles sont symétriques par rapport à l'origine du repère sur $]-\infty; -1]$.

Soit M un point mobile du plan dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, à l'instant t , sont :
$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{t^2+1}{2t} \end{cases}$$

 $t \in \mathbb{R}_*^+$

1 Déterminons la trajectoire de M quand t décrit $]0, +\infty[$.

Comme $x = \ln t$ et que $t \in \mathbb{R}_*^+$, alors $x \in \mathbb{R}$. $x = \ln t \Rightarrow \ln t = x \Rightarrow t = e^x$.

$$y = \frac{t^2+1}{2t} = \frac{(e^x)^2+1}{2e^x} = \frac{e^{2x}+1}{2e^x} = \frac{e^{-x}(e^{2x}+1)}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}.$$

Ainsi $y = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = f_1(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Donc la trajectoire de M quand t décrit $]0, +\infty[$ est la courbe (C_1) .

2 Déterminons à chaque instant t le vecteur vitesse $\vec{V}_M$ et accélération $\vec{\Gamma}_M$ du point M .

Le vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ est défini par $\vec{V}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt}$

$$\text{c'est-à-dire } \vec{V}(t) : \begin{cases} x' = \frac{1}{t} \\ y' = \frac{4t^2-2(t^2+1)}{4t^2} = \frac{2t^2-2}{4t^2} = \frac{t^2-1}{2t^2} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \vec{V}(t) : \begin{cases} x' = \frac{1}{t} \\ y' = \frac{t^2-1}{2t^2} \end{cases}$$

Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ est défini par $\vec{\Gamma}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}$.

$$\vec{\Gamma}(t) : \begin{cases} x'' = -\frac{1}{t^2} \\ y'' = \frac{4t^3-4t(t^2-1)}{4t^2} = \frac{4t}{4t^2} = \frac{1}{t^3} \end{cases}$$

$$\text{D'où } \vec{\Gamma}(t) : \begin{cases} x'' = -\frac{1}{t^2} \\ y'' = \frac{1}{t^3} \end{cases}$$

3 ● Montrons que l'application $t \mapsto \|\vec{V}\|$ est décroissante.

Notons $Q(t) = \|\vec{V}\|$. Nous savons que $\|\vec{V}\| = \vec{V}(t) \bullet \vec{V}(t)$.

Donc $Q'(t) = 2 \times \frac{d\vec{V}}{dt} \bullet \vec{V}(t) = 2\vec{\Gamma}(t) \bullet \vec{V}(t)$.

$$\vec{\Gamma}(t) \bullet \vec{V}(t) = -\frac{1}{t^2} \times \frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} \left(\frac{t^2-1}{2t^2} \right) = -\frac{1}{t^3} + \frac{t^2-1}{2t^5} = \frac{-2t^2+t^2-1}{2t^5} = \frac{-t^2-1}{2t^5}.$$

Ainsi $Q'(t) = 2 \left(\frac{-t^2-1}{2t^5} \right) = \frac{-(t^2+1)}{t^5} < 0$ car $t \in \mathbb{R}_*^+$. D'où Q est décroissante sur $]0; +\infty[$.

En conclusion l'application $t \mapsto \|\vec{V}\|$ est décroissante.

● Déduisons-en la nature du mouvement de M .

Comme l'application $t \mapsto \|\vec{V}\|$ est décroissante, alors le mouvement de M est retardé.

Exercice 1

- 1 a Vérifions que $-2i = (1-i)^2$.

On a : $(1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$. Donc $-2i = (1-i)^2$.

- b Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2 - 2(1+i) + 4i)(z^2 + 4z + 8) = 0$.

$$(z^2 - 2(1+i) + 4i)(z^2 + 4z + 8) = 0 \Rightarrow z^2 - 2(1+i) + 4i = 0 \text{ ou } z^2 + 4z + 8 = 0.$$

Considérons $z^2 - 2(1+i) + 4i = 0$. Calculons le discriminant réduit Δ'

$\Delta' = b'^2 - ac = (-(1+i))^2 - (1)(4i) = 1 + 2i - 1 - 4i = -2i = (1-i)^2$ d'après 1)a), donc si d est une racine carrée de Δ' , alors $d = 1-i$ ou $d = -1+i$.

$$\text{Ainsi } z_1 = \frac{-b'-d}{a} = \frac{1+i-1-i}{1} = \frac{2i}{1} = 2i; z_2 = \frac{-b'+d}{a} = \frac{1+i+1-i}{1} = \frac{2}{1} = 2.$$

Considérons $z^2 + 4z + 8$. $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(1)(8) = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$, donc si d est une racine carrée de Δ , alors $d = 4i$ ou $d = -4i$.

$$\text{Ainsi } z_1 = \frac{-b'-d}{a} = \frac{-4-4i}{2} = -2-2i; z_2 = \frac{-b'+d}{a} = \frac{-4+4i}{2} = -2+2i.$$

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{2i; 2; -2-2i; -2+2i\}$.

Soit les images des racines dans le plan complexe notées A, B, C et D telles que A et B ont même abscisse et A et C ont même ordonnée

- 2 ➡ Définissons la similitude directe S du plan complexe tel que $S(A) = C$ et $S(B) = D$.

On a : $z_A = -2 + 2i; z_B = -2 - 2i; z_C = 2i$ et $z_D = 2$.

Soit $s(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$; $b \in \mathbb{C}$, l'application complexe associée à S .

$$\text{Alors } S(A) = C \text{ et } S(B) = D \Rightarrow \begin{cases} az_A + b = z_C & \textcircled{1} \\ az_B + b = z_D & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow az_A + b - az_B - b = z_C - z_D \Rightarrow a(z_A - z_B) = z_C - z_D \Rightarrow a = \frac{z_C - z_D}{z_A - z_B} = \frac{2i - 2}{-2 + 2i + 2 + 2i} = \frac{2i - 2}{4i} = \frac{2 + 2i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Remplaçons $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ dans $\textcircled{1}$.

$$az_A + b = z_C \Rightarrow b = z_C - az_A = 2i - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-2 + 2i) = 2i - (-1 + i - i - 1) = 2i + 2 \Rightarrow b = 2 + 2i.$$

Donc S est la similitude directe dont l'application complexe qui lui est associée est $s(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + 2 + 2i$

➡ Donnons l'angle, le rapport et le centre Ω de la similitude S .

$$k = |a| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

Soit Ω tel que $z_{\Omega} = \frac{b}{1-a}$.

$$z_{\Omega} = \frac{b}{1-a} = \frac{2+2i}{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} = \frac{2+2i}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i} = \frac{(2+2i)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1+i-i-1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{2i}{\frac{1}{2}} = 2i \times \frac{4}{2} = 4i \Rightarrow z_{\Omega} = 4i.$$

Donc l'angle de la similitude S est $\theta = \frac{\pi}{4} [2\pi]$, son rapport est $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et son centre est $\Omega(0; 4)$

3 Soit M_0 le point d'affixe $2 - 3i$.

On pose pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = S(M_n)$ puis $U_n = \left\| \overrightarrow{\Omega M_n} \right\|$.

a Déterminons ce qu'on peut dire de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit z_n l'affixe du point M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exprimons U_{n+1} en fonction de U_n .

$$U_n = \left\| \overrightarrow{\Omega M_n} \right\| = |z_n - 4i|.$$

$$\text{On a : } U_{n+1} = \left\| \overrightarrow{\Omega M_{n+1}} \right\| = |z_{n+1} - 4i|. \text{ Or } z_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z_n + 2 + 2i.$$

$$\text{Donc } z_{n+1} - 4i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z_n + 2 + 2i - 4i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) z_n + 2 - 2i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z_n + \frac{2-2i}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}\right)$$

$$\Rightarrow z_{n+1} - 4i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z_n + (2 - 2i) \times \frac{2}{1+i}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z_n + \frac{4-4i}{1+i}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z_n + \frac{(4-4i)(1-i)}{1^2+1^2}\right)$$

$$\Rightarrow z_{n+1} - 4i = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z_n + \frac{4-4i-4i-4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(z_n + \frac{-8i}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) (z_n - 4i).$$

$$\text{Donc } |z_{n+1} - 4i| = \left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) (z_n - 4i)\right| = \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| \times |z_n - 4i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times |z_n - 4i|.$$

$$\text{Ainsi } U_{n+1} = |z_{n+1} - 4i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times |z_n - 4i| = \frac{\sqrt{2}}{2} U_n, \text{ c'est-à-dire } U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} U_n.$$

D'où la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme U_0 d'affixe $z_0 = 2 - 3i$

b Exprimons U_n en fonction de n et étudions U_n quand $n \rightarrow +\infty$.

➡ Exprimons U_n en fonction de n .

Comme la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme U_0 d'affixe $z_0 = 2 - 3i$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = (2 - 3i) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

➡ Étudions U_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Puisque $q = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

Exercice 2

Les naissances sont indépendantes les unes des autres. Soit X_j la variable aléatoire associée à la j -ème naissance et prenant la valeur 0 pour G et 1 pour F et $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

1 Dans cette partie $n = 4$.

a Donnons la loi de probabilité de X .

Soit Ω l'univers associée à l'expérience aléatoire.

Désignons par p la probabilité d'avoir une fille et q la probabilité d'avoir un garçon.

Alors $p + q = P(\Omega) = 1$. Or la probabilité d'avoir une fille est double de celle d'avoir un garçon, donc $p = 2q$.

$$\text{Ainsi } 2q + q = 1 \Rightarrow 3q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}, \text{ donc } p = \frac{2}{3} \text{ et } q = \frac{1}{3}.$$

La variable aléatoire X est une expérience à deux issues G ou F qu'on renouvelle 4 fois, de façon identique et indépendante, donc X suit la loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{2}{3}$. Donc l'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

D'où la loi de probabilité de X est $P(X = k) = C_k^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{4-k} = C_k^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$, pour tout $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$$P(X=0) = C_1^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4-0} = 1 \times 1 \times \frac{1}{81} = \frac{1}{81}$$

$$P(X=1) = C_4^1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4-1} = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{27} = \frac{8}{81}$$

$$P(X=2) = C_4^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4-2} = 6 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{24}{81}$$

$$P(X=3) = C_4^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4-3} = 3 \times \frac{8}{27} \times \frac{1}{3} = \frac{32}{81}$$

$$P(X=4) = C_4^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4-4} = 1 \times \frac{16}{81} \times 1 = \frac{16}{81}$$

On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(X=k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

b) Construisons la fonction de répartition de X .

La fonction de répartition de X est définie sur $\mathbb{R}$ par : Si $x < 0$; $F(x) = 0$

$$\text{Si } 0 \leq x < 1, F(x) = P(X=0) = \frac{1}{81} = \frac{1}{81}$$

$$\text{Si } 1 \leq x < 2, F(x) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{81} + \frac{8}{81} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$$

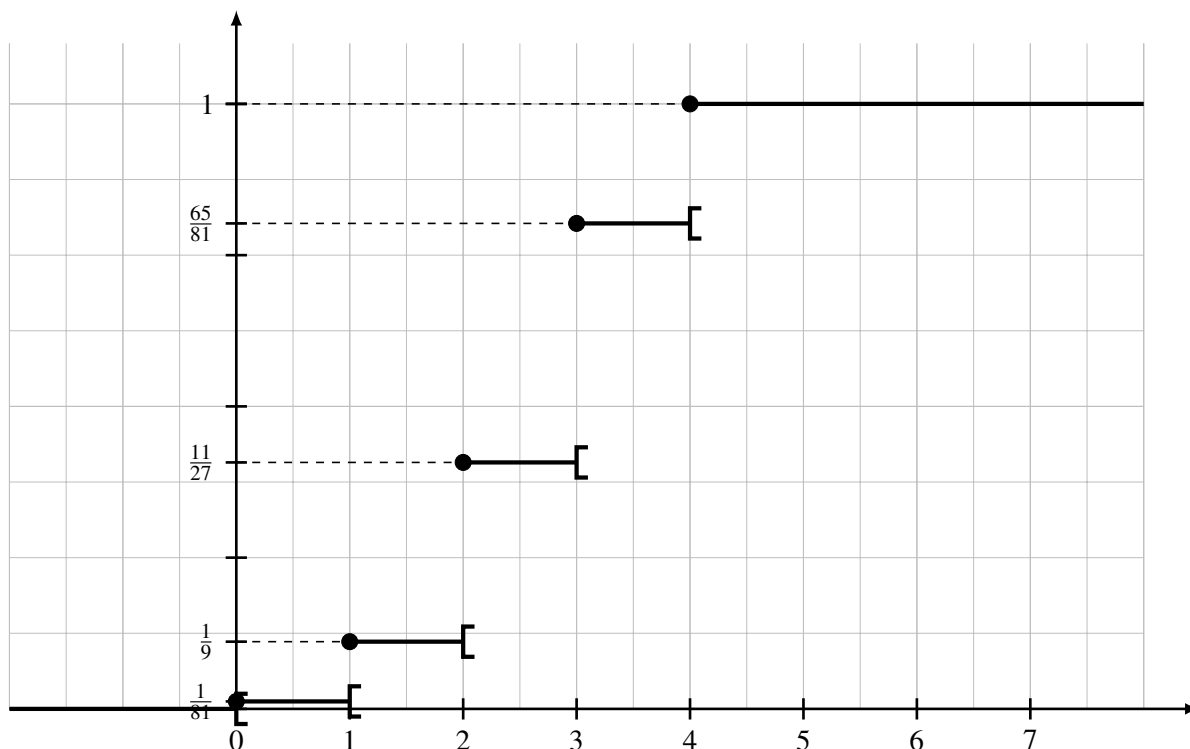
$$\text{Si } 2 \leq x < 3, F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{81} + \frac{8}{81} + \frac{24}{81} = \frac{33}{81} = \frac{11}{27}$$

$$\text{Si } 3 \leq x < 4, F(x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{81} + \frac{8}{81} + \frac{24}{81} + \frac{32}{81} = \frac{65}{81}$$

$$\text{Si } 4 \leq x, F(x) = 1.$$

$$\text{C'est-à-dire que } F \text{ est définie par : } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{81} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{9} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{27} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{65}{81} & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

D'où la représentation graphique de F .



c) Calculons l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$.

Comme X suit la loi binomiale de paramètre $n = 4$ et $p = \frac{2}{3}$, alors $E(X) = np$, donc $E(X) = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ et $V(X) = np(1-p)$ c'est-à-dire $V(X) = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$.

Ainsi $E(X) = \frac{8}{3}$ et $V(X) = \frac{8}{9}$.

2) Déterminons n pour que la probabilité de ne pas avoir de garçon soit strictement inférieure à $\frac{1}{100}$.

Dans ce cas X suit la loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{2}{3}$. Ainsi $P(X = k) = C_k^n \times \left(\frac{2}{3}\right)^k \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{n-k}$.

Donc la probabilité de ne pas avoir de garçon est strictement inférieure à $\frac{1}{100}$ si $P(X = n) < \frac{1}{100}$.

Ainsi $C_n^n \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{n-n} < \frac{1}{100} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{100} \Rightarrow \ln\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) < \ln\left(\frac{1}{100}\right)$

$\Rightarrow n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln\left(\frac{1}{100}\right) \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$ car $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$.

Donc $n > \frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow n > 11,357747 \Rightarrow n \geq 12$ car n est un entier naturel.

D'où n est au moins égal à 12 ($n \geq 12$).

❧ Problème ❧

I. Soit la fonction u définie par : $u(x) = \ln(1-x^2) + 2 + \frac{2}{x^2-1}$.

● Étudions la variation de u . $D_u = \{x \in \mathbb{R} / 1-x^2 > 0 \text{ et } x^2-1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / 1-x^2 > 0\}$.

$1-x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 > -1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1} \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$.

Donc $D_u =]-1; 1[$.

La fonction u , en tant que composée et somme des fonctions dérivables sur $] -1; 1[$, est aussi dérivable sur $] -1; 1[$ et pour tout $x \in] -1; 1[$, on a :

$$u'(x) = \frac{-2x}{1-x^2} - \frac{2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-1)-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-4x}{(x^2-1)^2}.$$

$\forall x \in] -1; 1[$ ($(x^2-1)^2 > 0$), donc le signe de $u'(x)$ est celui du numérateur $2x^3 - 4x$.

Soit $2x^3 - 4x = 0$. Alors $2x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow 2x = 0$ ou $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^2 = 2 \Rightarrow x = 0$ ou $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x^2 - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x^3 - 4x$	$-$	0	$+$	0	$+$

En tenant compte du domaine de définition de u , alors si $x \in]-1; 0]$, $u'(x) \geq 0$, donc u est croissante sur $] -1 ; 0]$.
Si $x \in [0; 1[$, alors $u'(x) \leq 0$, donc u est décroissante sur $[0; 1[$.

● Dédudons-en le signe de $u(x)$ pour tout x appartenant au domaine de définition D_u de u .

Comme u est croissante sur $] -1 ; 0]$ et décroissante sur $[0; 1[$, alors la fonction u admet un minimum sur $] -1 ; 1[$ au point 0. Donc $\forall x \in]-1; 1[$, $u(x) \geq u(0)$. Or $u(0) = \ln(1 - 0^2) + 2 + \frac{2}{0^2 - 1} = \ln 1 + 2 + \frac{2}{-1} = 0 + 2 - 2 = 0$.

D'où $\forall x \in]-1; 1[$, $u(x) \geq 0$.

II. Soit la fonction f définie par : $f(x) = x \ln(1 - x^2)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x^2 > 0\}.$$

$$1 - x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 > -1 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow \sqrt{x^2} \sqrt{1} \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

Donc $D_f =]-1; 1[$.

1 Montrons que f est impaire.

Soit $x \in]-1; 1[$. Alors $-x \in]-1; 1[$ et on a : $f(-x) = -x \ln(1 - (-x)^2) = -x \ln(1 - x^2) = -f(x)$.

Donc $\forall x \in]-1; 1[$, $-x \in]-1; 1[$ et $f(-x) = -f(x)$. D'où f est impaire.

2 Étudions la variation de f .

La fonction f est dérivable sur D_f et pour tout $x \in D_f$, on a :

$$f'(x) = 1 \times \ln(1 - x^2) + x \times \frac{-2x}{1 - x^2} = \ln(1 - x^2) + x \times \frac{2x}{x^2 - 1} = \ln(1 - x^2) + \frac{2x^2}{x^2 - 1}.$$

$$\text{Donc } f'(x) = \ln(1 - x^2) + \frac{2x^2}{x^2 - 1}.$$

$$\forall x \in]-1; 1[\quad x^2 > 0, \text{ ainsi } -x^2 < 0 \Rightarrow 1 - x^2 < 1 + 0 \Rightarrow 1 - x^2 < 1 \Rightarrow \ln(1 - x^2) < \ln(1) \Rightarrow \ln(1 - x^2) < 0.$$

$$\text{De même } \forall x \in]-1; 1[\quad x^2 > 0 \text{ et } x^2 - 1 < 0, \text{ donc } \frac{2x^2}{x^2 - 1} < 0.$$

D'où $f'(x) < 0 + 0$ c'est-à-dire $f'(x) < 0$, ainsi f est strictement décroissante sur $] -1 ; 1[$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x \ln(1 - x^2) = -1 \times (-\infty) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -1^+} (1 - x^2) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \ln(1 - x^2) = 1 \times (-\infty) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x^2) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

$$f(0) = 0 \times \ln(1 - 0^2) = 0 \times \ln(1) = 0 \times 0 = 0.$$

D'où le tableau de variation de f suivant :

x	-1	0	1
$f'(x)$		$-$	
f	$+\infty$	0	$-\infty$

- 3 Étudions la position de la courbe C de f par rapport à la tangente au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente à la courbe C de f au point 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

$$f(0) = 0 \times \ln(1 - 0^2) = 0; f'(0) = \ln(1 - 0^2) + \frac{2 \times 0^2}{0^2 - 1} = 0 + 0 = 0.$$

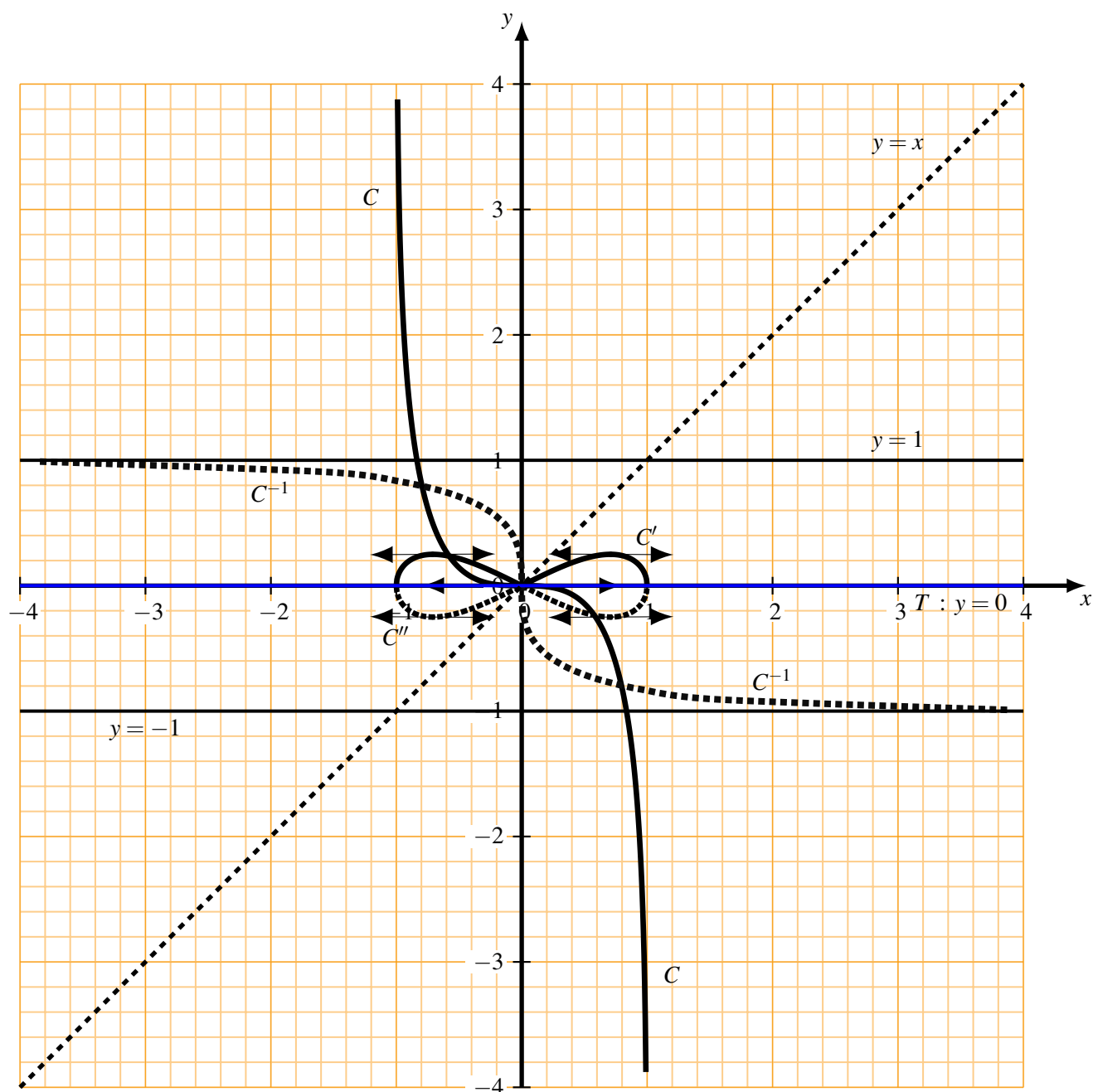
$$\text{Donc } y = 0(x - 0) + 0 = 0.$$

$$f(x) - y = x \ln(1 - x^2) - 0 = x \ln(1 - x^2). \text{ D'après ce qui précède : } \forall x \in]-1; 1[\quad \ln(1 - x^2) < 0.$$

Alors si $x \in]-1; 0]$, $f(x) - y = x \ln(1 - x^2) > 0$, donc C est au dessus de la tangente au point d'abscisse 0.

Si $x \in [0; 1[$, alors $f(x) - y = x \ln(1 - x^2) < 0$, donc C est en dessous de la tangente au point d'abscisse 0.

- 4 Traçons la courbe C et la tangente T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité = 2 cm).



- 5 Montrons que f admet une bijection réciproque en dressant son tableau de variation. En déduire sa courbe représentative C^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $] -1 ; 1[$ [d'après ce qui précède, d'où la fonction f admet une bijection réciproque f^{-1} définie sur $] -\infty ; +\infty[= \mathbb{R}$.

● Dressons son tableau de variation.

Comme f est strictement décroissante sur $] -1 ; 1[$, alors f^{-1} est aussi strictement décroissante sur $] -\infty ; +\infty[$.

D'où le tableau de variation de f^{-1} .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f^{-1}'(x)$	$-$		
f^{-1}			

● Dédudions-en sa courbe représentative C^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Puisque les fonction g et g^{-1} sont réciproques l'une de l'autre, alors leurs représentations graphiques dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).

Pour le tracé de C^{-1} voir le graphique précédent où la courbe C^{-1} est en pointillée.

III. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{1}{2} |x| \sqrt{1-x^2}$.

$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} / 1-x^2 \geq 0 \right\}$. Posons $1-x^2 = 0$. Alors $x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

Tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$1-x^2$	$-$	$\emptyset$	$+$	$\emptyset$	$-$

Donc $D_h = [-1; 1]$.

1 Montrons que h est paire et étudions sa dérivabilité.

● Montrons que h est paire .

Soit $x \in [-1; 1]$. Alors $-x \in [-1; 1]$ et on a : $h(-x) = \frac{1}{2} |-x| \sqrt{1-(-x)^2} = \frac{1}{2} |x| \sqrt{1-x^2} = h(x)$.

Donc $\forall x \in [-1; 1]$, $-x \in [-1; 1]$ et $h(-x) = h(x)$. D'où h est paire.

● Étudions la dérivabilité de la fonction h .

La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]-1; 0[$ et sur $]0; 1[$, en particulier sur $] -1; 0[$ et sur $]0; 1[$.

De même, la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $] -1; 1[$ en particulier sur $] -1; 0[$ et sur $]0; 1[$.

Donc $x \mapsto |x| \sqrt{1-x^2}$, en tant que produit des fonctions dérivables sur $] -1; 0[$ et sur $]0; 1[$ est dérivable sur $] -1; 0[$ et sur $]0; 1[$.

D'où, $h(x) = \frac{1}{2} |x| \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $] -1; 0[$ et sur $]0; 1[$.

➡ Étudions la dérivabilité de h en 0.

$h(0) = \frac{1}{2} \times |0| \times \sqrt{1-0^2} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2} |x| \sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2} \sqrt{1-0^2} = -\frac{1}{2}.$$

Donc h est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} |x| \sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1-0^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc h est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \frac{1}{2}$.

Nous avons $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$.

D'où h n'est pas dérivable en 0.

➡ Étudions la dérivabilité de h en -1 .

$$h(-1) = \frac{1}{2} \times |-1| \times \sqrt{1 - (-1)^2} = \frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{h(x) - h(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{1}{2}|x|\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{1}{2}|x|\sqrt{1-x} \times \sqrt{1+x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{1}{2}|x|\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}}.$$

Or, quand $x \rightarrow -1^-$ on a : $\frac{1}{2}|x|\sqrt{1-x} = \frac{1}{2}\sqrt{2} > 0$ et $\sqrt{1+x} \rightarrow 0^+$.

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{h(x) - h(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\frac{1}{2}|x|\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+1}} = +\infty.$$

Donc h n'est pas dérivable à gauche en -1 .

On déduit que h n'est pas dérivable en -1 .

➡ Étudions la dérivabilité de h en 1 .

Nous avons montré que la fonction h est paire. Donc, puisque la fonction h n'est pas dérivable en -1 , alors elle n'est pas aussi dérivable en 1 .

En conclusion, la fonction h est dérivable sur $] -1; 0[$ et sur $]0; 1[$.

2 Étudions la variation de h .

Comme nous l'avons vu précédemment, la fonction h est dérivable sur $] -1; 0[$ et sur $]0; 1[$.

➡ Si $x \in] -1; 0[$, alors $h(x) = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$.

$$\text{On a : } h'(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x \times \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-(1-x^2)+x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1+2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{Donc } h'(x) = \frac{-1+2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

$\forall x \in] -1; 0[$, $2\sqrt{1-x^2} > 0$, donc le signe de $h'(x)$ est celui de $-1+2x^2$.

Soit $-1+2x^2 = 0$. Alors $2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or $x \in] -1; 0[$, donc $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0,71$.

Tableau de signe :

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$-1+2x^2$	⋮	+	0	-
	⋮	⋮	⋮	⋮

Donc si $x \in] -1; -\frac{\sqrt{2}}{2}]$, $h'(x) \geq 0$, donc h est croissante sur $] -1; -\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Si $x \in [-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0[$, $h'(x) \leq 0$, donc h est décroissante sur $[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0[$.

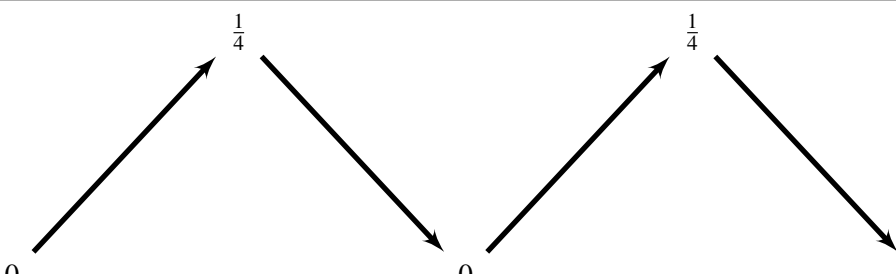
➡ Si $x \in]0; 1[$, alors $h(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$.

Comme h est paire sur $] -1; 1[$, alors on déduit que si $x \in]0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$, $h'(x) \geq 0$, donc h est croissante sur $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

Si $x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}; 1[$, $h'(x) \leq 0$, donc h est décroissante sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1[$.

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{4}.$$

On a donc le tableau de variation de h suivant :

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1					
$h'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+$	0	$-$	$+\infty$
h										

3 ● Traçons la courbe C' de h dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

● Déduisons-en le tracé de la courbe de Γ d'équation $y^2 = \frac{x^2 - x^4}{4}$.

$$y^2 = \frac{x^2 - x^4}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4}x^2(1 - x^2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2}\sqrt{1 - x^2} \text{ ou } y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2}\sqrt{1 - x^2}.$$

$$\text{Or } \sqrt{x^2} = |x|.$$

$$\text{Donc } y = -\frac{1}{2}|x|\sqrt{1 - x^2} \text{ ou } y = \frac{1}{2}|x|\sqrt{1 - x^2} \text{ c'est-à-dire } y = -h(x) \text{ ou } y = h(x).$$

D'où $\Gamma = C' \cup C''$ où C'' est le symétrique de C' par rapport à l'axe des abscisse (Ox).

4 ● Calculons l'intégrale $\int_0^1 h(x)dx$.

$$\text{Posons } I = \int_0^1 h(x)dx. \text{ Sur } [0; 1], h(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2}x(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Considérons } p(x) = 1 - x^2. p \text{ est dérivable sur }]0; 1[\text{ et on a : } p'(x) = -2x$$

$$\text{Nous remarquons que } h(x) = -\frac{1}{4} \times (-2x) \times (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}p'(x) \times (p(x))^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Ainsi, une primitive de } h(x) \text{ est } -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{2}} \times (p(x))^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times (p(x))^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6}(p(x))^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Donc } I = \left[-\frac{1}{6}(p(x))^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1}{6}p(1) + \frac{1}{6}p(0). p(1) = 1 - 1^2 = 1 - 1 = 0; p(0) = 1 - 0^2 = 1 - 0 = 1.$$

$$\text{Ainsi } I = -\frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 = 0 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

$$\text{D'où } \int_0^1 h(x)dx = \frac{1}{6}.$$

● Déduisons l'aire du domaine délimité par la courbe Γ , en cm^2 .

Appelons A l'aire de ce domaine.

$$\text{Alors } A = \left(\int_{-1}^1 h(x)dx - \int_{-1}^1 -h(x)dx \right) \times u.a = \left(\int_{-1}^1 h(x)dx + \int_{-1}^1 h(x)dx \right) \times u.a$$

$$\Rightarrow A = \left(2 \int_{-1}^1 h(x)dx \right) \times u.a, \text{ où } u.a \text{ est l'unité d'aire.}$$

$$\text{Or la fonction } h \text{ est paire sur } [-1; 1], \text{ donc } \int_{-1}^1 h(x)dx = 2 \int_0^1 h(x)dx.$$

$$\text{Ainsi } A = \left(2 \times 2 \int_0^1 h(x) dx \right) \times u.a = \left(4 \times \frac{1}{6} \right) \times 4cm^2 = \frac{16}{6} cm^2 = \frac{8}{3} cm^2.$$

D'où l'aire du domaine délimité par la courbe Γ , en cm^2 est $A = \frac{8}{3} cm^2 \approx 2,67cm^2$.

5 Soit, α un réel tel que $0 \leq \alpha < 1$.

Calculons l'aire $A(\alpha)$ du domaine E des points de coordonnées (x, y) tels que $0 \leq x \leq \alpha$ et $f(x) \leq y \leq h(x)$.

$$A(\alpha) = \int_0^\alpha (h(x) - f(x)) dx \times u.a = \left(\int_0^\alpha h(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right) \times u.a.$$

$$\text{Posons } S = \int_0^\alpha (h(x) - f(x)) dx.$$

$$\text{Dérivons la fonction } q(x) = -\frac{1}{2} [(1-x^2) \ln(1-x^2) + x^2].$$

$$q'(x) = -\frac{1}{2} \left(-2x \ln(1-x^2) + (1-x^2) \times \frac{-2x}{1-x^2} + 2x \right) = -\frac{1}{2} (-2x \ln(1-x^2) - 2x + 2x) = -\frac{1}{2} (-2x \ln(1-x^2))$$

$$\Rightarrow q'(x) = x \ln(1-x^2) = f(x). \text{ Ainsi } q(x) \text{ est une primitive de } f(x) \text{ sur }]0; 1[.$$

Nous avons montré qu'une primitive de $h(x)$ est $-\frac{1}{6} (p(x))^{\frac{3}{2}}$.

$$\text{Donc } S = \left[-\frac{1}{6} (p(x))^{\frac{3}{2}} \right]_0^\alpha - [q(x)]_0^\alpha = -\frac{1}{6} p(\alpha) + \frac{1}{6} p(0) - (q(\alpha) - q(0)).$$

$$q(0) = -\frac{1}{2} [(1-0^2) \ln(1-0^2) + 0^2] = -\frac{1}{2} \times 0 = 0.$$

$$\text{Ainsi } S = -\frac{1}{6} (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} [(1-\alpha^2) \ln(1-\alpha^2) + \alpha^2]$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{6} (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} (1-\alpha^2) \ln(1-\alpha^2) + \frac{1}{2} \alpha^2.$$

$$\text{Donc } A(\alpha) = S \times 4cm^2 = \left(-\frac{2}{3} (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} + 2(1-\alpha^2) \ln(1-\alpha^2) + 2\alpha^2 \right) cm^2.$$

$$\text{D'où } A(\alpha) = \left(-\frac{2}{3} (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} + 2(1-\alpha^2) \ln(1-\alpha^2) + 2\alpha^2 \right) cm^2.$$

● Calculons $\lim_{\alpha \rightarrow 1} A(\alpha)$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left(-\frac{2}{3} (1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} + 2(1-\alpha^2) \ln(1-\alpha^2) + 2\alpha^2 \right) cm^2.$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1} (1-\alpha^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} (1-\alpha^2) \ln(1-\alpha^2) = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{\alpha \rightarrow 1} A(\alpha) = \left(-\frac{1}{6} \times 0 + \frac{2}{3} + 2 \times 0 + 2 \times 1 \right) cm^2 = \left(0 + \frac{2}{3} + 0 + 2 \right) cm^2 = \frac{8}{3} cm^2.$$

$$\text{D'où } \lim_{\alpha \rightarrow 1} A(\alpha) = \frac{8}{3} cm^2.$$