CORRECTION DU SUJET DE MATHÉMATIQUES DU BACCALAURÉAT PREMIER GROUPE 2023 DE TERMINALE C / E

Exercice 1 :

1) Calculons $P(A_1)$; $P(B_1)$; $P(A_2)$ et $P(B_2)$.

A_1 : « le joueur gagne la partie à l'issue du premier tir ».

Alors $P(A_1) = p$.

B_1 : « le joueur perd la partie à l'issue du premier tir ».

Pour que B_1 se réalise, il faut qu'au premier tir, il rate la cible et tire une boule noire :

$P(B_1) = (1-p) \times \frac{1}{3}$.

A_2 : « le joueur gagne la partie à l'issue du deuxième tir ».

Pour que A_2 se réalise il faut qu'au premier tir, il rate la cible et tire une boule blanche puis tire une seconde fois en atteignant cette fois sa cible, donc

$P(A_2) = (1-p) \times \frac{2}{3} \times p = \frac{2}{3}p(1-p) \Rightarrow P(A_2) = \frac{2}{3}p(1-p)$.

B_2 : « le joueur perd la partie à l'issue du deuxième tir ».

Pour que B_2 se réalise il faut qu'au premier tir, il rate la cible et tire une boule blanche puis tire une seconde fois en ratant cette fois sa cible, donc

$P(B_2) = (1-p) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{6}(1-p) = \frac{1}{3}(1-p) \Rightarrow P(B_2) = \frac{1}{3}(1-p)$.

2) Montrons que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$P(A_n) = p\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}$ et $P(B_n) = \left(\frac{1-p}{3}\right)\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}$.

Pour que A_n se réalise il faut d'abord qu'il rate sa cible au cours des $(n-1)$ premiers tirs et pour que cela soit possible il faut qu'il tire une première fois sur la cible et ne l'atteint pas, ensuite tirer une boule blanche et pour chaque boule blanche tirée, il doit tirer sur la cible et la rater jusqu'à $(n-2)$ fois et enfin pour tirer sur la cible la $n^{ième}$ fois, il doit d'abord tirer une boule blanche et tirer sur la cible et l'atteindre à cette $n^{ième}$ fois. Ce qui donnera, compte tenu du fait qu'il s'agit d'un tirage avec remise et que les issues sont indépendantes :

$$P(A_n) = (1-p) \times \underbrace{\frac{2}{3}(1-p) \times \frac{2}{3}(1-p) \times \frac{2}{3}(1-p) \times \cdots \times \frac{2}{3}(1-p) \times \frac{2}{3}(1-p)}_{(n-2)\text{ fois}} \times \frac{2}{3} \times p$$

$$P(A_n) = (1-p) \times \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-2} \times \frac{2}{3}p = p \times \frac{2}{3}(1-p) \times \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-2} = p\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}.$$

D'où $P(A_n) = p\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}$.

Pour que B_n se réalise il faut d'abord qu'il rate sa cible au cours des $(n-1)$ premiers tirs et pour que cela soit possible il faut qu'il tire une première fois sur la cible et ne l'atteint pas, ensuite tirer une boule blanche et pour chaque boule blanche tirée, il doit tirer sur la cible et la rater jusqu'à $(n-2)$ fois et enfin pour tirer sur la cible la $n^{ième}$ fois, il doit d'abord tirer une boule blanche et tirer sur la cible et la rater puis tirer une boule noire à ce $n^{ième}$ tir. Ce qui donnera, compte tenu du fait qu'il s'agit d'un tirage avec remise et que les issues sont indépendantes :

$$P(B_n) = (1-p) \times \underbrace{\tfrac{2}{3}(1-p) \times \tfrac{2}{3}(1-p) \times \tfrac{2}{3}(1-p) \times \cdots \times \tfrac{2}{3}(1-p) \times \tfrac{2}{3}(1-p)}_{(n-2)\text{ fois}} \times \tfrac{2}{3} \times (1-p) \times \tfrac{1}{3}.$$

$$P(B_n) = (1-p) \times \left[\tfrac{2}{3}(1-p)\right]^{n-2} \times \tfrac{2}{3} \times (1-p) \times \tfrac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow P(B_n) = (1-p) \times \left[\tfrac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1} \times \tfrac{1}{3} = \left(\tfrac{1-p}{3}\right) \times \left[\tfrac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}$$

D'où $P(B_n) = \left(\frac{1-p}{3}\right) \times \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}$.

Par suite $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$P(A_n) = p\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}$ et $P(B_n) = \left(\frac{1-p}{3}\right)\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}$.

3) Calculons en fonction de p les probabilités de A, B et C.

A : « le joueur gagne la partie »

L'évènement A se realise si et seulement le joueur gagne la partie à l'issue d'un $k^{ième}$ tir.

C'est-à-dire si A_1 se réalise ou A_2 ou A_3, ou … ou A_n se réalise. Donc $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)$. Comme $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont de deux à deux disjoints, alors $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Or $P(A_n) = p\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, donc $\big(P(A_n)\big)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}(1-p)$ et de premier terme p, car $P(A_n)$ est de la forme $P(A_n) = a \times q^{n-1}$ avec $a = p$ et $q = \frac{2}{3}(1-p)$.

Ainsi $P(A)$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Donc $P(A) = p \times \left(\frac{1-\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n}{1-\frac{2}{3}(1-p)}\right) = p \times \left(\frac{1-\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n}{\frac{3-2+2p}{3}}\right) = p\left(\frac{1-\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n}{\frac{2p+1}{3}}\right)$

$\Rightarrow P(A) = p \times \left(\frac{3}{2p+1}\right)\left(1-\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n\right)$

Ainsi $P(A) = p \times \left(\frac{3}{2p+1}\right)\left(1-\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n\right)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Étant donné $P(A) = p \times \left(\frac{3}{2p+1}\right)\left(1-\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n\right)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, alors

$P(A) = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(p \times \left(\frac{3}{2p+1}\right)\left(1-\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n\right)\right)$. Or $p \in [0\,,1] \Rightarrow 0 \le p \le 1 \Rightarrow -1 \le -p \le 0$

$\Rightarrow 0 \le 1-p \le 1 \Rightarrow 0 \times \frac{2}{3} \le \frac{2}{3}(1-p) \le \frac{2}{3} \times 1 \Rightarrow 0 \le \frac{2}{3}(1-p) \le \frac{2}{3}$, donc $0^n \le \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} 0 = 0$,

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty}\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n = 0$.

Ainsi $P(A) = \lim_{n \to +\infty} \left(p \times \left(\frac{3}{2p+1}\right)\left(1 - \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n\right)\right) = p \times \left(\frac{3}{2p+1}\right) \times (1-0) = p \times \left(\frac{3}{2p+1}\right) = \frac{3p}{2p+1}$

D'où $P(A) = \frac{3p}{2p+1}$.

B : « le joueur perd la partie »

L'évènement B se réalise si et seulement le joueur perd la partie à l'issue d'un $k^{ième}$ tir.

C'est-à-dire si B_1 se réalise ou B_2 ou B_3, ou … ou B_n se réalise. Donc $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $P(B) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n)$. Comme B_1, B_2, …, B_n sont de deux à deux disjoints, alors $P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + \cdots + P(B_n)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Or $P(B_n) = \left(\frac{1-p}{3}\right)\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, donc $\left(P(B_n)\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}(1-p)$ et de premier terme $\frac{1-p}{3}$, car $P(B_n)$ est de la forme $P(B_n) = a' \times q'^{n-1}$ avec $a' = \frac{1-p}{3}$ et $q' = \frac{2}{3}(1-p)$. Ainsi $P(B)$ est la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

Donc $P(B) = \left(\frac{1-p}{3}\right) \times \left(\frac{1-\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n}{1-\frac{2}{3}(1-p)}\right) = \left(\frac{1-p}{3}\right) \times \left(\frac{1-\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n}{\frac{3-2+2p}{3}}\right) = \left(\frac{1-p}{3}\right) \times \left(\frac{1-\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n}{\frac{2p+1}{3}}\right)$

$\Rightarrow P(B) = \left(\frac{1-p}{3}\right) \times \left(\frac{3}{2p+1}\right)\left(1 - \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n\right) = \left(\frac{1-p}{2p+1}\right)\left(1 - \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n\right)$

Ainsi $P(B) = \left(\frac{1-p}{2p+1}\right)\left(1 - \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n\right)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

Étant donné $P(B) = \left(\frac{1-p}{2p+1}\right)\left(1 - \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n\right)$ $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, alors

$P(B) = \lim_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{1-p}{2p+1}\right)\left(1 - \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n\right)\right)$. Or $p \in [0\,,1] \Rightarrow 0 \le p \le 1 \Rightarrow -1 \le -p \le 0$

$\Rightarrow 0 \le 1-p \le 1 \Rightarrow 0 \times \frac{2}{3} \le \frac{2}{3}(1-p) \le \frac{2}{3} \times 1 \Rightarrow 0 \le \frac{2}{3}(1-p) \le \frac{2}{3}$, donc $0^n \le \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n \le \left(\frac{2}{3}\right)^n$

De plus $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$; $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0$,

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n = 0$.

Ainsi $P(B) = \lim_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{1-p}{2p+1}\right)\left(1 - \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^n\right)\right) = \left(\frac{1-p}{2p+1}\right) \times (1-0) = \left(\frac{1-p}{2p+1}\right) = \frac{1-p}{2p+1}$

D'où $P(B) = \frac{1-p}{2p+1}$.

C : « la partie ne s'arrête pas ».

Considérons l'évènement contraire de C : $\overline{C}$: « la partie s'arrête ».

Pour que l'évènement $\overline{C}$ se réalise il faut que le joueur gagne ou que le joueur perd.

Donc $\overline{C} = A \cup B \Rightarrow P(\overline{C}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ car A et B sont incompatibles(disjoints).

Ainsi $P(\overline{C}) = P(A) + P(B) = \frac{3p}{2p+1} + \frac{1-p}{2p+1} = \frac{3p+1-p}{2p+1} = \frac{2p+1}{2p+1} = 1 \Rightarrow P(\overline{C}) = 1$.

Donc $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 1 = 0$. D'où $P(C) = 0$.

4) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de coups nécessaires pour arrêter la partie.

Soit Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Pour que la partie s'arrête il faut et il suffit que le joueur gagne à l'issue du $k^{ième}$ tir ou perd la partie à l'issue du $k^{ième}$ tir, donc $P(X = k) = P(A_k) + P(B_k)$ car A_k et B_k sont incompatibles $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$.

Or d'après 2) $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$P(A_k) = p\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{k-1}$ et $P(B_k) = \left(\frac{1-p}{3}\right)\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{k-1}$.

Donc $P(X = k) = p\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{k-1} + \left(\frac{1-p}{3}\right)\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{k-1} = \left(p + \frac{1-p}{3}\right)\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{k-1}$.

$\Rightarrow P(X = k) = \left(\frac{3p+1-p}{3}\right)\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{k-1} = \left(\frac{2p+1}{3}\right)\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{k-1}$.

D'où la loi de probabilité de X est : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \left(\frac{2p+1}{3}\right)\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{k-1}$.

5) Sachant que le joueur a perdu la partie, calculons la probabilité que ce soit à l'issue du $n^{ième}$ tir ; $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Supposons qu'ici $p \neq 1$. Il s'agit de calculer $P(B_n/B)$.

On a : $P(B_n/B) = \frac{P(B_n \cap B)}{P(B)}$. Or $B_n \subset B \Rightarrow B_n \cap B = B_n$. Donc $P(B_n\,/B) = \frac{P(B_n)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{1-p}{3}\right)\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}}{\frac{1-p}{2p+1}}$

Ainsi $P(B_n/B) = \frac{\left(\frac{1-p}{3}\right)\left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}}{1-p} \times (2p+1) = \frac{2p+1}{3} \times \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}$.

D'où $P(B_n/B) = \frac{2p+1}{3} \times \left[\frac{2}{3}(1-p)\right]^{n-1}$

6) Montrons que $P(A) - P(B) = \frac{4p-1}{2p+1}$.

D'après 3), on a $P(A) = \frac{3p}{2p+1}$ et $P(B) = \frac{1-p}{2p+1}$,

donc $P(A) - P(B) = \frac{3p}{2p+1} - \left(\frac{1-p}{2p+1}\right) = \frac{3p-1+p}{2p+1} = \frac{4p-1}{2p+1}$, d'où $(A) - P(B) = \frac{4p-1}{2p+1}$.

Discutons en fonction de p le fait que le joueur ait plus ou moins la chance de gagner à ce jeu.

Puisque $2p + 1 > 0$, alors le signe de $P(A) - P(B) = \frac{4p-1}{2p+1}$ est celui de $4p - 1$.

Soit $P(A) - P(B) = \frac{4p-1}{2p+1} = 0$, alors $4p - 1 = 0$, donc $p = \frac{1}{4}$. Dressons un tableau de signe :

p	0 $\frac{1}{4}$	1
$4p-1$	$-$	$+$

Si $p \in \left[0\,;\frac{1}{4}\right[$, alors $P(A) - P(B) < 0 \Rightarrow P(A) < P(B)$, donc le joueur a moins de chance de gagner.

Si $p \in \left]\frac{1}{4}\,;1\right]$, alors $P(A) - P(B) > 0 \Rightarrow P(A) > P(B)$, donc le joueur a plus de chance de gagner.

Exercice 2 :

1) a) Montrons que $f_1' = f_2 - \frac{1}{2}f_1$ et $f_2' = -f_1 - \frac{1}{2}f_2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_1'(x) = \left(e^{-\frac{x}{2}}\sin(x)\right)' = -\frac{1}{2}\sin(x)\,e^{-\frac{x}{2}} + \cos(x)\,e^{-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}f_1(x) + f_2(x)\,.$$

Donc $f_1'(x) = f_2(x) - \frac{1}{2}f_1(x)$. D'où $f_1' = f_2 - \frac{1}{2}f_1$.

f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f_2'(x) = \left(e^{-\frac{x}{2}}\cos(x)\right)' = -\frac{1}{2}\cos(x)\,e^{-\frac{x}{2}} - \sin(x)\,e^{-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}f_2(x) - f_1(x)\,.$$

Donc $f_1'(x) = -f_1(x) - \frac{1}{2}f_2(x)$. D'où $f_2' = -f_1 - \frac{1}{2}f_2$.

b) Exprimons f_1 et f_2 en fonction de f_1' et de f_2'.

D'après 1) a), on a : $f_1' = f_2 - \frac{1}{2}f_1 \quad (*)$ et $f_2' = -f_1 - \frac{1}{2}f_2 \quad (**)$.

En faisant $\frac{1}{2}\times(*) + (**)$, on obtient $\frac{1}{2}f_1' + f_2' = \frac{1}{2}f_2 - \frac{1}{4}f_1 - f_1 - \frac{1}{2}f_2 = -\frac{5}{4}f_1$

Donc $f_1 = -\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}f_1' + f_2'\right) = \frac{-2}{5}f_1' - \frac{4}{5}f_2' \Rightarrow f_1 = \frac{-2}{5}f_1' - \frac{4}{5}f_2'$.

En faisant $(*) - \frac{1}{2}\times(**)$, on obtient $f_1' - \frac{1}{2}f_2' = f_2 - \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{4}f_2 = \frac{5}{4}f_2$

Donc $f_1 = \frac{4}{5}\left(f_1' - \frac{1}{2}f_2'\right) = \frac{4}{5}f_1' - \frac{2}{5}f_2' \Rightarrow f_2 = \frac{4}{5}f_1' - \frac{2}{5}f_2'$.

2) Montrons que la fonction f définie par $f = Af_1 + Bf_2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $F = \left(-\frac{2}{5}A + \frac{4}{5}B\right)f_1 - \left(\frac{4}{5}A + \frac{2}{5}B\right)f_2$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

La fonction $f = Af_1 + Bf_2$ est la combinaison de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction $F = \left(-\frac{2}{5}A + \frac{4}{5}B\right)f_1 - \left(\frac{4}{5}A + \frac{2}{5}B\right)f_2$ est aussi la combinaison de deux fonction dérivables sur $\mathbb{R}$, donc F est derivable sur $\mathbb{R}$, de plus , on a :

$$F' = \left(-\frac{2}{5}A + \frac{4}{5}B\right)f_1' - \left(\frac{4}{5}A + \frac{2}{5}B\right)f_2' = -\frac{2}{5}Af_1' + \frac{4}{5}Bf_1' - \frac{4}{5}Af_2' - \frac{2}{5}Bf_2'.$$

$\Rightarrow F' = \left(-\frac{2}{5}f_1' - \frac{4}{5}f_2'\right)A + \left(\frac{4}{5}f_1' - \frac{2}{5}f_2'\right)B$. Or d'après 1) b) $f_1 = \frac{-2}{5}f_1' - \frac{4}{5}f_2'$ et $f_2 = \frac{4}{5}f_1' - \frac{2}{5}f_2'$.

Donc $F' = \left(-\frac{2}{5}f_1' - \frac{4}{5}f_2'\right)A + \left(\frac{4}{5}f_1' - \frac{2}{5}f_2'\right)B = f_1 \times A + f_2 \times B = Af_1 + Bf_2 = f$.

Ainsi $F' = f$ sur $\mathbb{R}$, d'où F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3) Déduisons la valeur de l'intégrale I.

$I = \int_a^b \left(Ae^{-\frac{x}{2}}\sin(x) + Be^{-\frac{x}{2}}\cos(x)\right)dx = \int_a^b (Af_1(x) + Bf_2(x))dx = \int_a^b f(x)dx$ d'après 2)

D'après 2), on a aussi $F'(x) = f(x) \Rightarrow I = \int_a^b F'(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$\Rightarrow I = F(b) - F(a) = \left(-\frac{2}{5}A + \frac{4}{5}B\right) f_1(b) - \left(\frac{4}{5}A + \frac{2}{5}B\right) f_2(a)$

$\Rightarrow I = \left(-\frac{2}{5}f_1(b) - \frac{4}{5}f_2(a)\right) A + \left(\frac{4}{5}f_1(b) - \frac{2}{5}f_2(b)\right) B$

$\Rightarrow I = \left(-\frac{2}{5}e^{-\frac{b}{2}}\sin(b) - \frac{4}{5}Be^{-\frac{a}{2}}\cos(a)\right) A + \left(\frac{4}{5}e^{-\frac{b}{2}}\sin(b) - \frac{2}{5}Be^{-\frac{a}{2}}\cos(a)\right) B.$

PROBLÈME :

1) a) Montrons que T est bijective.

Soit φ l'endomorphisme associé à T :

$$\varphi : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + y\cos\alpha \\ y' = \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\alpha \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dét}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\alpha \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\alpha \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\alpha = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha = -\frac{1}{2}(1 + \cos\alpha).$$

Or $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\alpha > 0 \Rightarrow 1 + \cos\alpha > 1$, autrement dit $1 + \cos\alpha \neq 0$.

Ainsi $\text{Dét}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\alpha \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(1 + \cos(\alpha)) \neq 0$. D'où φ est bijective, par suite T est bijective.

Définissons l'application affine réciproque T^{-1}.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que $T(M) = M'$.

$$\text{Alors : : } \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + y\cos(\alpha) & (*) \\ y' = \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2} & (**) \end{cases}.$$

En faisant $(*) - \sqrt{2} \times (**)$, on obtient : $x' - \sqrt{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + y\cos(\alpha) - \frac{\sqrt{2}}{2}x + y \times \frac{2}{2}$

$\Rightarrow x' - \sqrt{2}y' = y\cos(\alpha) + y \Rightarrow x' - \sqrt{2}y' = y(\cos(\alpha) + 1) \Rightarrow y = \frac{x' - \sqrt{2}y'}{\cos(\alpha)+1} = \frac{x'}{\cos(\alpha)+1} - \frac{\sqrt{2}y'}{\cos(\alpha)+1}.$

En faisant $\frac{\sqrt{2}}{2} \times (*) + \cos(\alpha) \times (**)$,

on obtient $\frac{\sqrt{2}}{2}x' + y'\cos(\alpha) = \frac{2}{4}x + y\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha) + \frac{1}{2}\cos(\alpha)\,x - y\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha)$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x' + y'\cos(\alpha) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cos(\alpha)\,x \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x' + y'\cos(\alpha) = \frac{x(\cos(\alpha)+1)}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x' + y'\cos(\alpha)}{\frac{\cos(\alpha)+1}{2}} = \frac{2}{\cos(\alpha)+1} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + y'\cos(\alpha)\right) = \frac{\sqrt{2}x' + 2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}x'}{\cos(\alpha)+1} + \frac{2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1}.$

D'où l'application affine réciproque T^{-1} qui à tout point $M'\binom{x'}{y'}$ du plan fait correspondre le point $M\binom{x}{y}$ est définie par : $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}x'}{\cos(\alpha)+1} + \frac{2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1} \\ y = \frac{x'}{\cos(\alpha)+1} - \frac{\sqrt{2}y'}{\cos(\alpha)+1} \end{cases}$

b) Déterminons les points invariants de T.

Soit $M\binom{x}{y}$, tel que $T(M) = M$. Alors on a : $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x + y\cos\alpha \\ y = \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = y\cos\alpha \\ \frac{1}{2}x = y + y\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = y\cos\alpha \\ x = 2y + y\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y\cos\alpha \times \frac{1}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \\ x = 2y + y\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y\cos\alpha \times \frac{2}{2-\sqrt{2}} \\ x = 2y + y\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y\cos\alpha \times \frac{2(2+\sqrt{2})}{4-2} \\ x = 2y + y\sqrt{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y\cos\alpha \times \frac{2(2+\sqrt{2})}{2} \\ x = 2y + y\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y(2+\sqrt{2})\cos\alpha \\ x = y(2+\sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow y(2+\sqrt{2})\cos\alpha = y(2+\sqrt{2}) \Leftrightarrow$
$y(2+\sqrt{2})\cos\alpha - y(2+\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow y(2+\sqrt{2})(\cos\alpha - 1) = 0 \quad *$. Si $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, donc $\cos\alpha - 1 = 0$ et $y(2+\sqrt{2})(\cos\alpha - 1) = y(2+\sqrt{2}) \times 0 = 0$, donc tout nombre réel y est solution de $*$.

Posons $y = a$, alors $x = y(2+\sqrt{2})\cos\alpha \Rightarrow x = a(2+\sqrt{2}) \times 1 \Rightarrow x = (2+\sqrt{2})a$.

Dans ce cas, $A\binom{(2+\sqrt{2})a}{a}$ est un point invariant de T

Si $\alpha \neq 0$; donc $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, alors $\cos\alpha \neq 1$, donc $\cos\alpha - 1 \neq 0$. Dans ce cas $*$ est équivalente à

$y = \frac{0}{(2+\sqrt{2})(\cos\alpha - 1)} = 0$. Donc $x = y(2+\sqrt{2})\cos\alpha \Rightarrow x = 0 \times (2+\sqrt{2})\cos\alpha \Rightarrow x = 0$.

Alors ici $B\binom{0}{0}$ est un point invariant de T.

Par suite les points invariants de T sont $A\binom{(2+\sqrt{2})a}{a}$ et $B\binom{0}{0}$.

c) déterminons les transformées par T des axes de coordonnées.

* Transformée par T de l'axe des abscisses :

L'axe des abscisses a pour équation de droite, l'équation $D_1 : y = 0$.

Or d'après 1) a) T^{-1} : $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}x'}{\cos(\alpha)+1} + \frac{2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1} \\ y = \frac{x'}{\cos(\alpha)+1} - \frac{\sqrt{2}y'}{\cos(\alpha)+1} \end{cases}$.

Donc la transformée par T de l'axe des abscisses est : $D'_1 : \frac{x'}{\cos(\alpha)+1} - \frac{\sqrt{2}y'}{\cos(\alpha)+1}$

c'est-à-dire $D'_1 : x' - \sqrt{2}y' = 0$.

** Transformée par T de l'axe des ordonnées:

L'axe des ordonnées a pour équation de droite, l'équation $D_2 : x = 0$

Donc la transformée par T de l'axe ordonnées est : D_2': $\frac{\sqrt{2}x'}{\cos(\alpha)+1} + \frac{2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1}$

c'est-à-dire D_2': $\sqrt{2}x' + 2y'\cos(\alpha) = 0$.

2) a) Montrons qu'il existe seulement deux valeurs k_1 et k_2 possibles pour k puis calculons k_1 et k_2 en fonction de α.

$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$. Or d'après 1) a) T^{-1}: $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}x'}{\cos(\alpha)+1} + \frac{2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1} \\ y = \frac{x'}{\cos(\alpha)+1} - \frac{\sqrt{2}y'}{\cos(\alpha)+1} \end{cases}$.

Donc $\begin{cases} x' = k\left(\frac{\sqrt{2}x'}{\cos(\alpha)+1} + \frac{2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1}\right) \\ y' = k\left(\frac{x'}{\cos(\alpha)+1} - \frac{\sqrt{2}y'}{\cos(\alpha)+1}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(\cos(\alpha)+1) = k\sqrt{2}x' + 2ky'\cos(\alpha) \\ y'(\cos(\alpha)+1) = kx' - \sqrt{2}ky' \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x'\left(\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2}\right) = 2ky'\cos(\alpha) & (*) \\ y'\left(\cos(\alpha)+1+\sqrt{2}k\right) = kx' & (**) \end{cases}$

Tirons x' dans $(*)$: $x' = \frac{2ky'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2}}$. Remplaçons x' dans $(**)$.

$y'\left(\cos(\alpha)+1+\sqrt{2}k\right) = kx' \Rightarrow y'\left(\cos(\alpha)+1+\sqrt{2}k\right) = \frac{2k^2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \frac{y'(\cos(\alpha)+1+\sqrt{2}k)(\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2})}{\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2}} = \frac{2k^2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2}}$. Notons que y' est non nul car sinon y le serait aussi, ce qui ne cadre pas avec l'hypothèse que $M\binom{0}{y} \neq O\binom{0}{0}$, car ici la nullité de y' entraine systématiquement celle de y et inversement.

Ainsi $\frac{y'(\cos(\alpha)+1+\sqrt{2}k)(\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2})}{\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2}} = \frac{2k^2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{(\cos(\alpha)+1+\sqrt{2}k)(\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2})}{\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2}} = \frac{2k^2\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2}}$

$\Rightarrow (\cos(\alpha)+1+\sqrt{2}k)(\cos(\alpha)+1-k\sqrt{2}) = 2k^2\cos(\alpha)$. Or $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2} \Rightarrow \cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$, donc $\cos(\alpha) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$.

$\Rightarrow \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 + 1 + \sqrt{2}k\right)\left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 + 1 - k\sqrt{2}\right) = 2k^2\left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1\right)$

$\Rightarrow \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{2}k\right)\left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - k\sqrt{2}\right) = 4k^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2k^2$

$\Rightarrow \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 - \left(k\sqrt{2}\right)^2 = 4k^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2k^2$

$\Rightarrow \left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 - 2k^2 = 4k^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2k^2 \Rightarrow 4\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4k^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\Rightarrow k^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow k^2 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, car $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0$.

Ainsi $k^2 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow k = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ou $k = -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Dans les deux cas $k \neq 0$ puisque $\alpha \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Donc il existe seulement deux valeurs k_1 et k_2 possibles pour k et $k_1 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; $k_2 = -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

b) Déduisons-en qu'il existe deux droites (D_1) et (D_2) globalement invariantes par T et qu'elles ont pour vecteurs directeurs respectifs :

$\overrightarrow{u_1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right);\frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{u_2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right);\frac{1}{2}\right)$.

D'après 2) a) il existe seulement deux valeurs k_1 et k_2 possibles pour k tel que $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$, à savoir $k_1=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; $k_2=-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

$\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=k\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x'=kx\\y'=ky\end{cases}$. En particulier $y'=ky$.

Donc $y'=\frac{1}{2}x-y\frac{\sqrt{2}}{2}=ky \Rightarrow \frac{1}{2}x-y\frac{\sqrt{2}}{2}-ky=0$.

Considérons la droite (D) : $\frac{1}{2}x-y\frac{\sqrt{2}}{2}-ky=0$.

Cette droite a pour vecteurs directeurs respectifs : $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-k;\frac{1}{2}\right)$

Montrons qu'elle est globalement invariante par T.

Déterminons $T(D)$:

D'après 1) a) T^{-1} : $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}x'}{\cos(\alpha)+1}+\frac{2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1}\\ y=\frac{x'}{\cos(\alpha)+1}-\frac{\sqrt{2}y'}{\cos(\alpha)+1}\end{cases}$

Donc $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}x'}{\cos(\alpha)+1}+\frac{2y'\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)+1}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x'}{\cos(\alpha)+1}-\frac{\sqrt{2}y'}{\cos(\alpha)+1}\right)-\mathrm{k}\left(\frac{x'}{\cos(\alpha)+1}-\frac{\sqrt{2}y'}{\cos(\alpha)+1}\right)=0$.

Or $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+\cos(x)}{2}$, donc $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\cos(x)}{2} \Rightarrow 1+\cos(\alpha)=2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2k^2$ et $\begin{cases}x'=kx\\y'=ky\end{cases}$

Ainsi $\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}kx}{2k^2}+\frac{2k\cos(\alpha)}{2k^2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{kx}{2k^2}-\frac{\sqrt{2}ky}{2k^2}\right)-\mathrm{k}\left(\frac{kx}{2k^2}-\frac{\sqrt{2}ky}{2k^2}\right)=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}x}{2k}+\frac{2y\cos(\alpha)}{2k}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x}{2k}-\frac{\sqrt{2}y}{2k}\right)-\mathrm{k}\left(\frac{x}{2k}-\frac{\sqrt{2}y}{2k}\right)=0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x+2y\cos(\alpha)\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\sqrt{2}y\right)-\mathrm{k}\left(x-\sqrt{2}y\right)=0$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x+y\cos(\alpha)-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{2}{2}y-\mathrm{k}x+k\sqrt{2}y=0$

$\Rightarrow y\cos(\alpha)+y-\mathrm{k}x+k\sqrt{2}y=0 \Rightarrow y(\cos(\alpha)+1)-\mathrm{k}x+k\sqrt{2}y=0$

$\Rightarrow y(2k^2)-\mathrm{k}x+k\sqrt{2}y=0$. En divisant cette dernière équation par $2k$, on obtient :

$ky-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=0$, en multipliant par -1 cette dernière équation on obtient :

$-ky+\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y=0$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y-ky=0 \quad (D)$.

D'où $T(D)=(D)$. C'est-à-dire que (D) est globalement invariante par T.

Puisque k a deux valeurs $k_1 = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; $k_2 = -\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, on deduit qu'il existe deux droites (D_1) pour $k = k_1$ et (D_2) pour $k = k_2$ globalement invariantes par T et qu'elles ont pour vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u_1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) ; \frac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{u_2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) ; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) ; \frac{1}{2}\right)$

3) Montrons que T_0 est involutive

T_0 est définie par $T_0 : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + y \\ y' = \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

T_0 est involutive si $T_0 o T_0 = id_{\mathbb{R}^2}$.

Soit $M\binom{x}{y}$. $T_0 o T_0(M) = T_0(T_0(M))$ et est definie par : $\begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + y' \\ y' = \frac{1}{2}x' - y'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Donc $\begin{cases} x'' = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + y' = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + y\right) + \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x' - y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + y\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{2}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{2}{4}y \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x = x \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = x \\ y' = y \end{cases}$ donc $T_0 o T_0(M) = M$, c'est-à-dire $T_0 o T_0 = id_{\mathbb{R}^2}$.

D'où T_0 est involutive.

b) Calculons les coordonnées de P.

Comme P est le milieu du bipoint $(M ; M')$, alors P a pour coordonnées $P\left(\frac{x+x'}{2} ; \frac{y+y'}{2}\right)$.

Avec : $\frac{x+x'}{2} = \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}x+y}{2} = \frac{2x+x\sqrt{2}}{4} + \frac{y}{2}$ et $\frac{y+y'}{2} = \frac{y+\frac{1}{2}x-y\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{2y-\sqrt{2}y}{4}$

Déduisons-en que lorsque M varie dans le plan, P décrit une droite dont nous donnerons une équation.

D'après ce qui précède $P\left(\frac{x+x'}{2} ; \frac{y+y'}{2}\right)$.

Avec : $\frac{x+x'}{2} = \frac{2x+x\sqrt{2}}{4} + \frac{y}{2}$ et $\frac{y+y'}{2} = \frac{1}{4}x + \frac{2y-\sqrt{2}y}{4}$. Posons $q = \frac{x+x'}{2}$ et $r = \frac{y+y'}{2}$.

En multipliant r par $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$, on obtient : $\frac{2+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4}x + \frac{2y-\sqrt{2}y}{4}\right) = \frac{2x+x\sqrt{2}}{8} + \frac{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})y}{8}$.

Donc $\frac{2+\sqrt{2}}{2}r = \frac{2x+x\sqrt{2}}{8} + \frac{(4-2)y}{8} = \frac{2x+x\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{4}y = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+x\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{2}q$.

Ainsi $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)r = \frac{1}{2}q \Leftrightarrow \frac{1}{2}q - \frac{(2+\sqrt{2})}{2}r = 0$

c'est-à-dire $P(q ; r)$ appartient à la droite d'équation $\frac{1}{2}x - \frac{(2+\sqrt{2})}{2}y = 0$.

D'où lorsque M varie dans le plan, P décrit la droite d'équation $\frac{1}{2}x - \frac{(2+\sqrt{2})}{2}y = 0$.

c) Soit $A(1\,,0)$. Calculons les coordonnées de $A' = T_0(A)$ puis montrons que que pour tout point M distinct de O, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires.

$$T_0 : \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + y \\ y' = \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \\ y' = \frac{1}{2} - 0 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ donc } A'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right).$$

Soit $M(x\,;y)$ et $M'(x'\,;y')$.

$\overrightarrow{MM'}(x'-x\ \ ,y'-y)$ et $\overrightarrow{AA'}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\,,\,\frac{1}{2}-0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AA'}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\,,\,\frac{1}{2}\right)$.

$\frac{1}{2}(x'-x) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)(y'-y) = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}y + y' - y.$

Or $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + y$ et $y' = \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2}$,

donc $\frac{1}{2}(x'-x) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)(y'-y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + y\ \right) - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2} - y$

$\Rightarrow\ (x'-x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) - \frac{1}{2}(y'-y) = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{1}{2}x - y\frac{\sqrt{2}}{2} - y$

$\Rightarrow (x'-x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) - \frac{1}{2}(y'-y) = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y - y = y - y = 0$

$\Rightarrow (x'-x)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) - \frac{1}{2}(y'-y) = 0.$

D'où pour tout point M distinct de O, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires.

Reconnaissant en T_0 une transformation usuelle.

D'après ce qui précède pour tout point M distinct de O, les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires.

Or $\overrightarrow{AA'}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\,,\,\frac{1}{2}\right) = u_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\,,\,\frac{1}{2}\right)$ (car $\alpha = 0$) qui est le vecteur directeur de la droite (D_2) globalement invariante par T_0 en particulier d'après 2) b).

Aussi T_0 est bijective d'après 1) a) et d'après 3) a) T_0 est involutive.

Ainsi T_0 est bijective, involutive et admet la droite (D_2) comme ensemble des points invariants.

D'où T_0 est une symétrie orthogonale d'axe (D_2).

4) a) Soit (H) d'équation $y = \frac{\sqrt{2}}{2x}$

Déterminons l'équation de l'image (H') de (H) par T_0.

D'après 3) a) T_0 est involutive, c'est-à-dire $T_0 o T_0 = id_{\mathbb{R}^2}$ donc $T_0^{-1} = T_0$.

$$T_0 : \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + y' \\ y = \frac{1}{2}x' - y'\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow\ (H'): \frac{1}{2}x' - y'\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x'+y'\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}x'+2y'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}(x'+\sqrt{2}y')} = \frac{1}{x'+\sqrt{2}y'}.$$

Donc $\frac{1}{2}\left(x' - y'\sqrt{2}\right) = \frac{1}{x'+\sqrt{2}y'} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x' - y'\sqrt{2}\right) \times \left(x' + y'\sqrt{2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x'^2 - 2y'^2\right) = 1$

$\Rightarrow x'^2 - 2y'^2 = 2 \Rightarrow 2y'^2 = x'^2 - 2 \Rightarrow y'^2 = \frac{x'^2-2}{2}.$

D'où l'équation de l'image (H') de (H) par T_0 est $y'^2 = \frac{x'^2-2}{2}$, c'est-à-dire $y^2 = \frac{x^2-2}{2}$

b) Construisons (H) et (H') dans le même repéré $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

• la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et y est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, elle a pour dérivée la fonction $x \mapsto -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{x^2}$ qui est strictement négative sur $\mathbb{R}^*$, donc la fonction $x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. De plus $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{2}}{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{2}}{2x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2}}{2x} = +\infty$.

D'où son tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	0	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	0

• $y^2 = \frac{x^2-2}{2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x^2-2}{2}} \Rightarrow y = -\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$ ou $y = \sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$.

Soit $x^2 - 2 = 0$. Alors $x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$. Dressons un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x \mapsto -\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$ et $x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$ sont définies sur $]-\infty\,;\ -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}\,;\ +\infty[$.

Ces deux fonctions sont dérivables sur $]-\infty\,;\ -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}\,;\ +\infty[$ et ont pour dérivée les fonctions :

$x \mapsto -\left(\frac{\frac{2x}{2}}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}}\right) = -\frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}}$ et $x \mapsto \left(\frac{\frac{2x}{2}}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}}\right) = \frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}}$ respectivement.

Si $x \in]-\infty\,;\ -\sqrt{2}[$, alors $-\frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}} > 0$ et si $x \in]\sqrt{2}\,;\ +\infty[$, $-\frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}} < 0$ donc $x \mapsto -\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$ est strictement croissante sur $]-\infty\,;\ -\sqrt{2}[$ et strictement décroissante sur $]\sqrt{2}\,;\ +\infty[$. De plus elle s'annule en $-\sqrt{2}$ et en $\sqrt{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(-\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right) = -\infty$

D'où son tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$-\frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}}$		$+$		//////		$-$	
y	$-\infty$	↗	0	//////	0	↘	$-\infty$

De même La fonction Si $x \in]-\infty\,;\,-\sqrt{2}[$, alors $\frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}} < 0$ et si $x \in]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$, $\frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}} > 0$

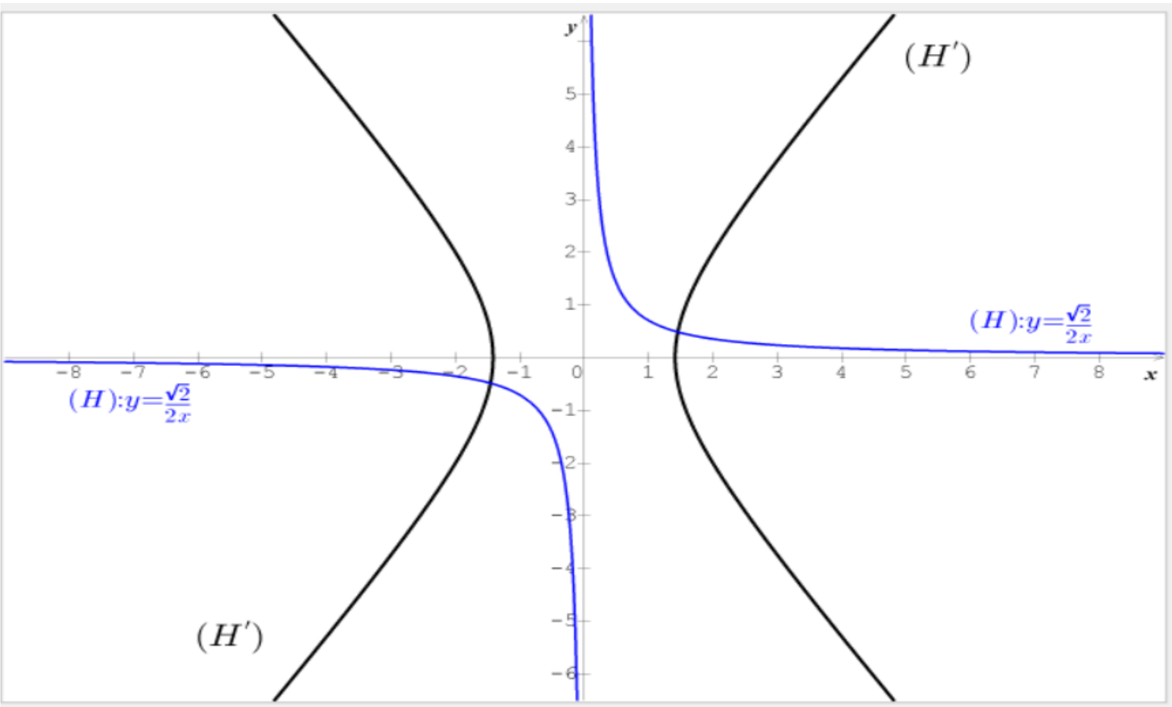
donc $x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-\sqrt{2}[$ et strictement croissante sur $]\sqrt{2}\,;\,+\infty[$.

De plus elle s'annule en $-\sqrt{2}$ et en $\sqrt{2}$ et $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right) = +\infty$

D'où son tableau de variation :

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$\frac{x}{2\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}}$	$-$			$+$
y	$+\infty \searrow 0$			$0 \nearrow +\infty$

D'où les représentations de (H) en bleu et (H') en noire.



c) Déterminer les équations des asymptotes de (H').

l'équation de (H') est $y^2 = \frac{x^2-2}{2}$ ce qui est équivalent à $y = -\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$ ou $y = \sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$.

Considérons $y = \sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{2}}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2}\times\sqrt{\frac{1-\frac{2}{x^2}}{2}}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\times\sqrt{\frac{1-\frac{2}{x^2}}{2}}}{x}\right)$$ car $x>0$ puisque $x\ \to\ +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{2}{x^2}}{2}}\right)=\sqrt{\frac{1-0}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\times\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right).$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\times\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x^2-2}{2}-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-2}{2}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right).$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right)=0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=0$.

Donc la droite $(D_1)\colon y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ est une asymptote oblique à (H') en $+\infty$.

De même, on a :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{2}}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2}\times\sqrt{\frac{1-\frac{2}{x^2}}{2}}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\times\sqrt{\frac{1-\frac{2}{x^2}}{2}}}{x}\right)$$ car $x<0$ puisque $x\ \to\ -\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\sqrt{\frac{1-\frac{2}{x^2}}{2}}\right)=-\sqrt{\frac{1-0}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\times\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right).$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\times\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(y+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{x^2-2}{2}-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{-2}{2}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right).$$

Or $\lim_{x \to -\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = +\infty$ donc $\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\right) = 0$. Ainsi $\lim_{x \to -\infty}\left(y + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = 0$.

Donc la droite $(D_2): y = \frac{-\sqrt{2}}{2}x$ est une asymptote oblique à (H') en $-\infty$.

• Considérons à présent la fonction $y = -\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$. L'étude des asymptotes est la même que les cas précédents et les asymptotes sont déterminées en multipliant par -1 les asymptotes obtenues dans le cas précédent en $+\infty$ et en $-\infty$ et on conclut que :

$(D_3): y = \frac{-\sqrt{2}}{2}x$ est une asymptote oblique à (H') en $+\infty$ et $(D_4): y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ est une asymptote oblique à (H') en $-\infty$.

d) Étudions la position de (H') par rapport à ses asymptotes.

l'équation de (H') est $y^2 = \frac{x^2-2}{2}$ ce qui est équivalent à $y = -\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$ ou $y = \sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$.

• Pour $y = \sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$:

Si $(D_1): y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, alors on a :

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2}x = \sqrt{\frac{x^2-2}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\times\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x} = \frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x}$$

$$\Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\frac{x^2-2}{2}-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x} = \frac{\frac{-2}{2}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x} < 0$$

$\Rightarrow y < \frac{\sqrt{2}}{2}x$, donc (D_1) est au-dessus de (H') sur $[\sqrt{2}\,;\,+\infty[$

Si $(D_2): y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$, alors on a :

$$y + \frac{\sqrt{2}}{2}x = \sqrt{\frac{x^2-2}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)\times\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x} = \frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}x}$$

$$\Rightarrow y + \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\frac{x^2-2}{2}-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x} = \frac{\frac{-2}{2}}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x} = \frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}x} < 0 \text{ car } \sqrt{\frac{x^2-2}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}x > 0$$

$\Rightarrow y < \frac{-\sqrt{2}}{2}x$, donc (D_2) est au-dessus de (H') sur $]-\infty\,;\,-\sqrt{2}]$.

• Pour $y = -\sqrt{\frac{x^2-2}{2}}$:

On fait le même raisonnement que précédemment et étant donné que la fonction y est l'opposé de la fonction précédente et que les asymptotes ici sont les opposées des asymptotes (D_1) et (D_2) en $+\infty$ et en $-\infty$ respectivement, on conclut que :

$(D_3) : y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ est en-dessous de (H') sur $\left[\sqrt{2}\ ;\ +\infty\right[$ et que $(D_4) : y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ est en-dessous de (H') sur $\left]-\infty\ ;\ -\sqrt{2}\right]$.