Exercice 1

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

2. En déduire une expression de A^n, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \\ 5 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice M telle que

$$A = M - I_3.$$

2. Vérifier que M^2 est la matrice nulle. En déduire A^2.

3. Déduire A^{-1}.

4. Résoudre le système

$$\begin{cases} -2x - 2y + z = -7, \\ 3x + 5y - 3z = 14, \\ 5x + 10y - 6z = 26. \end{cases}$$

Exercice 4

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. **a)** Calculer $A - J$ et J^2.

MEDIABIB

b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 3$,

$$J^n = 0_3.$$

2. a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$A^n = (-1)^n \left(I_3 - nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \right).$$

b) En déduire la matrice A^n en fonction de n, pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 5

1. Pour tout entier $n \geq 2$, soit

$$R_n(X) = a_n X + b_n$$

le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
Ainsi, il existe un polynôme Q_n tel que

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n(X) + a_n X + b_n.$$

Montrer que

$$a_n = 2^n - 1 \qquad \text{et} \qquad b_n = 2 - 2^n.$$

2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que A est inversible et vérifier que

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3.$$

b) Déduire la valeur de la matrice A^{-1}.

3. Déduire la valeur de A^n, pour tout $n \geq 2$.

Exercice 6

On note (U_n) et (V_n) les suites définies par

$$U_0 = 2, \qquad V_0 = 1$$

et

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 8V_n, \\ V_{n+1} = 2U_n + V_n. \end{cases}$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $X_{n+1} = AX_n$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de X_n en fonction de A et de X_0.

MED HABIB

2. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer P^{-1}, puis vérifier que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale que l'on notera D.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

c) Calculer A^n, puis X_n. En déduire les expressions de U_n et V_n.

Exercice 7

1°. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer A^2 et vérifier que

$$A^2 = A + 2I_3.$$

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

c) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}I_3.$$

2°. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que $A = M - I_3$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad M^k = 3^{k-1}M.$$

b) En déduire que

$$A^n = (-1)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}(-1)^{n-k}\right) M$$

puis que

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}M + (-1)^n I_3.$$

MED HABIB