Évaluation (mai 2025)

Épreuve de mathématiques – Durée : 4 heures

Exercice 1

1ère partie. Soit $(\mathbf{a};\mathbf{b})$ un couple d'entiers naturels non nuls tel que $\mathbf{173}$ divise $\mathbf{a^3+b^3}$.

1. Montrer que $\mathbf{a^{171} \equiv -b^{171}}$ $[\mathbf{mod.}\,\mathbf{173}]$ (on pourra remarquer que $\mathbf{171 = 3 \times 57}$).

2. Montrer que $\mathbf{173}$ divise $\mathbf{a}$ si, et seulement si, $\mathbf{173}$ divise $\mathbf{b}$.

3. Montrer que si $\mathbf{173}$ divise $\mathbf{a}$ alors $\mathbf{173}$ divise $\mathbf{a+b}$.

4. On suppose que $\mathbf{173}$ ne divise pas $\mathbf{a}$.

- **a.** Montrer, en utilisant le petit théorème de Fermat, que $\mathbf{a^{172} \equiv b^{172}}$ $[\mathbf{mod.}\,\mathbf{173}]$.
- **b.** Prouver que $\mathbf{a^{171}(a+b) \equiv 0}$ $[\mathbf{mod.}\,\mathbf{173}]$.
- **c.** En déduire que $\mathbf{173}$ divise $\mathbf{a+b}$.

2ème partie. On considère l'équation $(\mathbf{E})$: $\mathbf{x^3+y^3 = 173(xy+1)}$, où $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des entiers naturels non nuls. Soit $(\mathbf{x}\,;\,\mathbf{y})$ une solution de $(\mathbf{E})$.

1. Justifier qu'il existe un entier naturel non nul $\mathbf{k}$ tel que $\mathbf{x+y = 173k}$.

2. Vérifier que $\mathbf{k(x-y)^2+(k-1)xy = 1}$.

3. Montrer que $\mathbf{k = 1}$ puis résoudre l'équation $(\mathbf{E})$.

Exercice 2

Soit $\mathbf{u}$ un nombre complexe et $(\mathbf{E_u})$ l'équation : $\mathbf{z^2-(2u-i\overline{u})z-2iu.\overline{u} = 0}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(\mathbf{E_u})$. On désigne par $\mathbf{z'}$ et $\mathbf{z''}$ les solutions de cette équation.

2. Dans le plan orienté $(\mathbf{O};\,\overrightarrow{\mathbf{e_1}},\overrightarrow{\mathbf{e_2}})$, soient les points $\mathbf{A}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{M'}$ et $\mathbf{M''}$ d'affixes respectives $\mathbf{2i}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{z'}$ et $\mathbf{z''}$.
Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des points $\mathbf{M}$ tels que $\mathbf{A}$, $\mathbf{M'}$ et $\mathbf{M''}$ sont alignés.

- **a.** Trouver une équation cartésienne de $\mathcal{H}$.
- **b.** Montrer que $\mathcal{H}$ est une hyperbole dont on précisera les caractéristiques.
- **c.** Vérifier que $\mathcal{H}$ passe par le point $\mathbf{O}$ et donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{H}$ en $\mathbf{O}$.
- **d.** Tracer $\mathcal{H}$.

Exercice 3

On considère la fonction $\boldsymbol{\varphi}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{dt}}{\sqrt{\mathbf{1+4t^2}}}.$$

Partie A

1. Montrer que $\boldsymbol{\varphi}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\boldsymbol{\varphi}'(\mathbf{x})$ pour tout réel $\mathbf{x}$.

2. Montrer que pour tout réel $\mathbf{t \geq 0}$, on a : $\mathbf{2t+1 \geq \sqrt{1+4t^2}}$

3. En déduire que pour tout $\mathbf{x \geq 0}$, on a : $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \geq \frac{\mathbf{ln(2x+1)}}{\mathbf{2}}$
et déterminer alors $\mathbf{lim}_{\mathbf{x\to+\infty}}\,\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$.

4. Montrer que $\boldsymbol{\varphi}$ est une fonction impaire et qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variation de $\boldsymbol{\varphi}$. On notera $\boldsymbol{\psi}$ la bijection réciproque de $\boldsymbol{\varphi}$.

5. Montrer que pour tout $\mathbf{x \geq 1}$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \leq \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{1}) + \frac{\ln x}{2}$. En déduire les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ et tracer $\mathcal{C}_\varphi$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{O};\,\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}})$.

Partie B

On considère l'équation différentielle $(\mathbf{E})$: $\mathbf{y' = \sqrt{1+4y^2}}$.

1. Montrer que $\boldsymbol{\psi}$ est une solution de $(\mathbf{E})$.

2. Calculer $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{0})$ puis en déduire $\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{0})$.

3. Montrer que pour tout réel $\mathbf{x}$, on a :

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}(\mathbf{e^{2x}-e^{-2x}})$$

4. Évaluer la quantité $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{ln}\left[\mathbf{2}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) + \sqrt{\mathbf{1+4}\boldsymbol{\psi}^{\mathbf{2}}(\mathbf{x})}\right]$ et en déduire l'expression de $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O};\ \overrightarrow{\mathbf{e_1}},\ \overrightarrow{\mathbf{e_2}})$.

Partie A

Soit $\mathbf{a}$ un paramètre réel et $\mathbf{T_a}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $\mathbf{M(z)}$ associe le point $\mathbf{M'(z')}$ tel que l'on ait $\mathbf{z' = bz}$ où $\mathbf{b}$ est le nombre complexe défini par :

$$\mathbf{b = -\frac{1}{2} + ia}$$

1. Prouver que $\mathbf{T_a}$ est une similitude directe. Donner son centre et son rapport.

2. Montrer qu'il existe une unique valeur $\mathbf{a_0}$ de $\mathbf{a}$ pour laquelle $\mathbf{T_a}$ est une homothétie. Déterminer les éléments caractéristiques de cette homothétie.

3. Montrer qu'il existe deux valeurs $\mathbf{a_1}$ et $\mathbf{a_2}$ du paramètre $\mathbf{a}$ pour lesquelles $\mathbf{T_{a_1}}$ et $\mathbf{T_{a_2}}$ sont des isométries. Vérifier que : $\mathbf{T_{a_1} = T_{a_2}^{-1}}$. On pose : $\mathbf{R = T_{a_1} = T_{a_2}^{-1}}$.

4. Montrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R^{-1}}$ laissent globalement invariant tout triangle équilatéral centré en $\mathbf{O}$.

Partie B

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathbf{z^3 = i}$.
On désigne par $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ les points dont les affixes sont les solutions de cette équation, $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ d'ordonnées positives et $\mathbf{K}$ d'ordonnée négative. Soit $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{J_1}$ et $\mathbf{K_1}$ les images de $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ par $\mathbf{T_a}$.

2. Donner les affixes des points $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{J_1}$ et $\mathbf{K_1}$ en fonction de $\mathbf{a}$. En déduire que $\mathbf{I_1 \in (JK)}$, $\mathbf{J_1 \in (IK)}$ et $\mathbf{K_1 \in (IJ)}$ et cela pour toute valeur de $\mathbf{a}$.

3. Montrer que si $\mathbf{a}$ décrit $\mathbb{R}$ alors le milieu du segment $[\mathbf{J_1K_1}]$ décrit une droite que l'on déterminera.

4. Soit $\mathbf{I_2}$ l'image de $\mathbf{I_1}$ par $\mathbf{T_a}$.

a. Montrer que les coordonnées de $\mathbf{I_2}$ sont : $\begin{cases} \mathbf{x = -a} \\ \mathbf{y = a^2 - 1/4} \end{cases}$

b. Reconnaître alors l'ensemble $\mathbf{\Sigma}$ des points $\mathbf{I_2}$ quand le paramètre $\mathbf{a}$ décrit $\mathbb{R}$.

c. Montrer que la dérivée $\mathbf{\frac{d(\overrightarrow{OI_2})}{da}}$ du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OI_2}}$ par rapport à $\mathbf{a}$ et le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{J_1K_1}}$ sont colinéaires et que la droite $(\mathbf{J_1K_1})$ est tangente à $\mathbf{\Sigma}$.

Partie C

On fixe $\mathbf{a}$ et on pose pour $\mathbf{n}$ entier : $\mathbf{T_a^0 = Id}$ et $\mathbf{T_a^{n+1} = T_a \circ T_a^n}$.
Soit $\mathbf{D}$ le point de coordonnées $(\mathbf{0, -1})$ et on pose $\mathbf{D_n = T_a^n(D)}$.

1. Calculer l'affixe $\mathbf{z_n}$ de $\mathbf{D_n}$ en fonction de $\mathbf{b}$ et prouver que :

$$\mathbf{z_n = \left(\frac{-1}{2\cos\mu}\right)^n e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+n\mu\right)}}$$

où $\mathbf{\mu}$ est une mesure de l'angle de la similitude $\mathbf{T_a}$.
Quelles sont les valeurs de $\mathbf{\mu}$ pour lesquelles la suite $(|\mathbf{z_n}|)$ est décroissante ?

2. Calculer :

$$\left\|\overrightarrow{\mathbf{D_nD_{n+1}}}\right\| \quad \text{et} \quad \mathbf{S_n = \sum_{p=0}^{n}\left\|\overrightarrow{D_pD_{p+1}}\right\|}$$

3. Comment faut-il choisir $\mathbf{\mu}$ pour que la suite $(\mathbf{S_n})$ admette une limite finie quand $\mathbf{n}$ tend vers $+\infty$? Donner la valeur de cette limite dans le cas où $\mathbf{\mu = 3\pi/4}$.

Fin