Définition et conséquences directes

Soit a un réel <u>strictement positif</u> et <u>différent de 1</u>.
La fonction exponentielle de base a, notée $\boldsymbol{exp_a}$, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\boldsymbol{exp_a(x) = a^x = e^{x\ln a}}.$$

Conséquences :

- $\boldsymbol{exp_a}$ *possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction* $x \longmapsto e^x$ *;*
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (exp_a)'(x) = (a^x)' = (\ln a)a^x$
  Ainsi :
  Si $0 < a < 1$ *alors* $x \longmapsto a^x$ *est décroissante ;*
  Si $a > 1$ *alors* $x \longmapsto a^x$ *est croissante.*

Définition et conséquences directes

Soit a un réel <u>strictement positif</u> et <u>différent de 1</u>.
La fonction logarithme de base a, notée $\boldsymbol{log_a}$, est la fonction définie sur $]0;\ +\infty[$ *par :*

$$\boldsymbol{log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}}.$$

Conséquences :

- $\boldsymbol{log_a}$ *possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction* $x \longmapsto \ln x$ *;*
- $\forall x \in \mathbb{R},\ (log_a)'(x) = \frac{1}{x\ln a}$.

Si $\boldsymbol{a = 10}$*, on parle de logarithme décimal, noté log, que l'on utilise en chimie pour mesurer le pH.*

Définition et conséquences directes

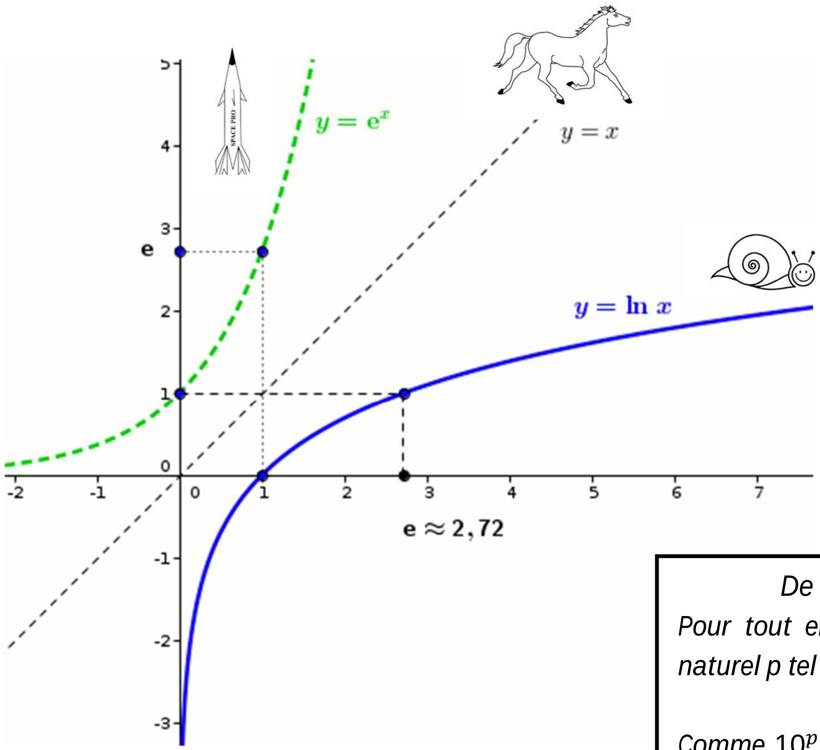
Les fonctions u et v étant définies sur un intervalle I telles que $\forall x \in I, u(x) > 0$*, on définit sur I la fonction puissance* u^v *par :*

$$\boldsymbol{\forall x \in I,\qquad [u(x)]^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}}$$

Exemples :

$f(x) = (x+1)^{x^2}\ définie\ sur\ ]-1;\ +\infty[$

$g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ définie\ sur]-\infty, -1[\ \cup\ ]0, +\infty[$



Croissances comparées

① $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0}\quad \left[\frac{escargot}{cheval}\right]$

② $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}} = +\infty\quad \left[\frac{fusée}{cheval}\right]$

③ $\displaystyle \boldsymbol{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x} = 0}\quad \left[\frac{escargot}{fusée}\right]$

Formes indéterminées induites

La définition de la fonction puissance u^v *par :*

$$\boldsymbol{[u(x)]^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}}$$

induit trois nouvelles formes indéterminées :

$$« \boldsymbol{0^0} »\ ,\ « \infty^{\boldsymbol{0}} »\ ,\ « \boldsymbol{1}^\infty »$$

Exemple : Calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

On reconnaît la F.I : « $\boldsymbol{1}^\infty$ ». On a :

$$\ln f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \to 1\ si\ x \to +\infty$$

Enfin :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e.$$

De l'utilisation du logarithme décimal

Pour tout entier naturel $n \geq 1$*, il existe un seul entier naturel p tel que :* $10^p \leq n < 10^{p+1}$.

Comme 10^p *s'écrit à l'aide de p+1 chiffres et que* 10^{p+1} *est le plus petit entier naturel qui s'écrit à l'aide de p+2 chiffres, alors n s'écrit avec p+1 chiffres.*

D'autre part, on a :

$$10^p \leq n < 10^{p+1} \Longrightarrow p \leq \log n < p+1$$

D'où : $p + 1 = Ent(\log n) + 1$.
Donc le nombre de chiffres de n est $Ent(\log n) + 1$.

Application :
Pour $n = 17523^{9675}$*, on calcule* $\log n$ *à la calculette :*

$$\log n = 9675 \times \log 17523 = 41056{,}91$$

Ainsi, le nombre $n = 17523^{9675}$ *s'écrit sous forme décimale à l'aide de 41057 chiffres.*