Définition

La fonction **exp** est définie sur $\mathbb{R}$ comme l'unique fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} \exp'(x) = \exp(x) \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$

Propriété fondamentale

On démontre la P.F (**dém**):

$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Ainsi :

- **exp** transforme une **somme** en un **produit** ;
- **exp**transforme donc une **S.A** en une **S.G** ;
- **exp**possède les propriétés des **puissances**.

Conséquences importantes :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) > 0$ (**dém**)
- La fonction **exp** est strict. croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$.

Propriétés algébriques

En posant $\mathbf{exp(1) = e}$ ($\approx \mathbf{2,718}$), on peut se permettre de noter définitivement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbf{exp(x) = e^x}.$$

Ainsi, on retrouve les propriétés des puissances déjà connues depuis le collège :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e^{x+y} = e^x \times e^y}$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$;
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{e^{nx} = (e^x)^n}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}}$.

Comportement asymptotique

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ (considérer $g(x) = e^x - x$)

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \mathbf{0}$ (utiliser $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$)

Équations et Inéquations

En vertu de la croissance de la fonction **exp**, on a :

- $\mathbf{e^x = 1 \iff x = 0}$;
- $\mathbf{e^x > 1 \iff x > 0}$;
- $\mathbf{e^x < 1 \iff x < 0}$.

Limites usuelles

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dérivée de la composée e^u

Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I alors la fonction :

$$\mathbf{e^u}: x \longrightarrow \mathbf{e^{u(x)} = \exp[u(x)]}$$

est dérivable sur I et :

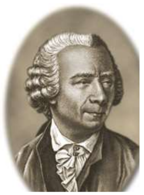
$$\left[e^{u(x)}\right]' = \mathbf{u'(x).\,e^{u(x)}}$$

Conséquences :

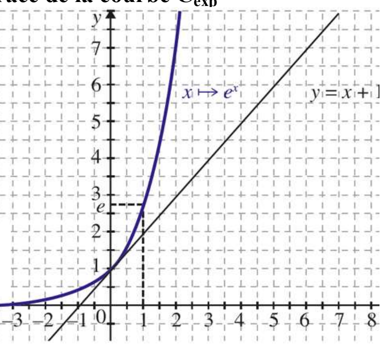
* Les fonctions u et e^u varient dans le même sens ;

* $\mathrm{Prim}[u'.e^u] = e^u + k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)

Tracé de la courbe C_{exp}



Leonhard Euler
(1707-1783)



Définition et conséquences directes

La fonction **logarithme népérien**, notée **ln**, peut être définie comme la fonction réciproque de la fonction « **exp** ».

Ainsi, on a :

$$\mathbf{ln}:]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = \ln(x) \text{ tel que } e^y = x$$

On a : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Conséquences importantes :

- La fonction **ln** est strict. croissante sur $]0; +\infty[$;
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{\ln(e^x) = x}$;
- $\forall x \in]0; +\infty[$, $\mathbf{e^{\ln(x)} = x}$;
- **ln** est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(\mathbf{ln})'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété fondamentale

La fonction **ln** compense l'effet de la fonction **exp** :

$$\forall x > 0, \forall y > 0, \mathbf{\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)}$$

Ainsi :

- **ln** transforme un **produit** en une **somme** ;
- **ln**transforme donc une **S.G** en une **S.A** ;

Logarithme
Exponentielle

Propriétés algébriques

Découlent de celles de l'**exp** :

$\forall x, y \in]0; +\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$, on a :

- $\mathbf{\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)}$;
- $\mathbf{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$;
- $\mathbf{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$;
- $\mathbf{\ln(x^r) = r.\ln(x)}$;
- $\mathbf{\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)}$.

Limites aux bornes de $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Équations et Inéquations

- $\mathbf{\ln(x) = 0 \iff x = 1}$;
- $\mathbf{\ln(x) > 0 \iff x > 1}$;
- $\mathbf{\ln(x) < 1 \iff 0 < x < 1}$;
- $\mathbf{\ln(x) = \ln(y) \iff x = y}$;
- $\mathbf{\ln(x) < \ln(y) \iff 0 < x < y}$.

Limites usuelles (à connaître par cœur)

Croissance comparée :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln x = 0$$

Taux d'accroissement en 1 :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Dérivée de la composée $\ln(u)$

Si la fonction u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction :

$$\ln(u): x \longrightarrow \ln[u(x)]$$

est dérivable sur I et :

$$[\ln(u)]'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Dérivées formelles :

- ① $[\ln(uv)]' = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$; ② $\left[\ln\left(\frac{u}{v}\right)\right]' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$
- ③ $[\ln(u^r)]' = r \times \frac{u'}{u}$; ④ $[\ln(\sqrt{u})]' = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$.

Tracé de la courbe $C_{\ln}$

John Néper
(1550-1617)