Devoir - Classe 7eC (Juin 2021)
Mathématiques

Exercice 1

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1 + 2 + \ldots + n$. Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.
Le but de cet exercice est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier. On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1. Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
2. a. Montrer que le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2 + n - 2p^2 = 0$.
   b. En déduire que le nombre $1 + 2 + \ldots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n + 1)^2 - 8p^2 = 1$

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne $x^2 - 8y^2 = 1$, où x et y désignent deux entiers relatifs.

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).
2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2. Déterminer la matrice A^{-1}, puis exprimer x et de y en fonction de x' et y'.
3. Démontrer que $(x\,;\,y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'\,;\,y')$ est solution de (E).
4. On considère les suites définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$, et pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$
   On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de n.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n;\,y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au but de l'exercice

À l'aide des parties A, B, C, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2021 qui est le carré d'un entier.

Exercice 2

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec x et y des réels, et M le point d'affixe z dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\,\vec{u},\vec{v})$.

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre $Z = |z^2| + z^2 - 2(z + \overline{z}) + 4i(z - \overline{z}) + 2$.
2. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\mathcal{Re}(Z) = 0$.
   a. Montrer que $\mathcal{P}$ est une parabole dont on précisera le foyer F et la directrice D.
   b. Vérifier que $A(3, 1)$ est un point de $\mathcal{P}$ et écrire une équation de la tangente T à $\mathcal{P}$ en A.
   c. Tracer $\mathcal{P}$ et T.
3. Soit A' le projeté orthogonal de A sur D. La droite T coupe l'axe focal de $\mathcal{P}$ en B. Montrer que les droites (AF) et (BA') sont parallèles.
4. Indiquer sur la figure les points de la parabole $\mathcal{P}$ tels que $\mathcal{Im}(Z) \leq 0$.

Exercice 3

Dans le plan orienté, on considère le carré direct $ABCD$ de centre O. On note $I = A * B$ et par $J = A * D$.

Partie A

1. Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui envoie D en A et J en I.
2. a. Caractériser f.
   b. Montrer que $f(A) = B$.
3. Posons $g = S_{(AI)} \circ f$. Montrer que g est un déplacement que l'on précisera.

Partie B

Soit S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.

1. Donner le rapport et l'angle de S.
2. a. Préciser $S[(BC)]$ et $S[(BD)]$. En déduire $S(B)$.
   b. Montrer que $S(A) = J$.
3. Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω, I, B et C sont cocycliques.
4. a. Montrer que $S \circ S$ est une homothétie que l'on précisera.
   b. En déduire que Ω, B, J sont alignés.
   c. Construire alors Ω.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (e^{-x} - 1)^2$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O; \vec{i}, \vec{j})$du plan (unité : 2cm).

1. a. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-x})$.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
2. a. Tracer (C).
   b. Calculer, en cm^2, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations
   $$y = 0, \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = 1.$$
3. a. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b. Tracer dans le même repère la courbe (C') de la fonction réciproque f^{-1} de f.
   c. Calculer en cm^2, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (C), $C')$ et les droites d'équations :
   $$x = 1 \text{ et } y = 1.$$
4. a. Montrer que : $\forall x \in [0, 1[$, $f^{-1}(x) = -ln(1 - \sqrt{x})$.
   b. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[$ et déterminer la dérivée $(f^{-1})'(x)$.
5. On pose $I_\alpha = \int_\alpha^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x} - x} dx$ où α est un réel de $]0, 1[$.
   a. Montrer que $I_\alpha = 2\ln 2 - 2f^{-1}(\alpha)$.
   b. Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} I_\alpha$.

Exercice 5

On pose :

$$\begin{cases} f_0(x) = e^{-x} \\ f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}, \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On note F_n la primitive de f_n sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en zéro.

1. Calculer $F_0(x)$.
2. a. Montrer que : $\forall x \in [0, 1]$, on a : $0 \leq f_n(x) \leq 1/n!$
   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq F_n(1) \leq 1/n!$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(1)$.
3. a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $f_{n+1}(x) = F_n(x) - F_{n+1}(x)$.
4. Soit la somme S_n définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k(1).$$
   a. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n = 1 - \frac{1}{e} - F_n(1).$$
   b. En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = e - 1 - eF_n(1).$$
   c. Calculer alors :
   $$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right).$$