Au Nom de Dieu Le Clément et Le Très Miséricordieux

République Islamique de Mauritanie *Honneur – Fraternité – Justice*

Lycée Privé AL KARAMA

BACCALAUREAT BLANC N°2

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

1ère Partie : On considère la fonction f définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

On admet que : $\forall t \geq 0,\ 2e^{\frac{t}{2}} \geq t+2$ et $\forall t \geq 0,\ 0 < f(t) \leq \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{t}{4}}$.

On définit sur $[e^{-2}, +\infty[$, la fonction F par $F(x) = \int_0^{lnx} f(t)dt$.

1) *Montrer que F est dérivable sur $[e^{-2}, +\infty[$, et que $F'(x) = \sqrt{\frac{2+lnx}{x^3}}$.*
2) *Calculer $F(1)$ et en déduire que $\forall x \in [e^{-2}, +\infty[$, on a : $F(x) = \int_1^x \sqrt{\frac{2+lnt}{t^3}}dt$.*
3) *Montrer que $\forall x \geq 1,\ 0 \leq F(x) \leq 4\sqrt{2}$.*
4) *a. Montrer que $\forall t \in [e^{-2}, 1]$, on a : $0 \leq \sqrt{2+lnt} \leq \sqrt{2}$.*
   b. En déduire que $\forall x \in [e^{-2}, 1]$, on a : $2\sqrt{2}(1-e) \leq F(x) \leq 0$.
5) *Donner enfin un encadrement de $F(x)$ pour $x \in [e^{-2}, +\infty[$.*

2ème Partie : On considère la suite U définie par : $U_n = \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!} \int_{-2}^{-1} (x+2)^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$.

1) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq U_n \leq e \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!}$.*
2) *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{2n+1}$.*
3) *En déduire que U converge vers une limite que l'on précisera.*
4) *Pour tout entier naturel non nul n, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k \cdot k!}{(2k+1)!}$.*
   a. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = -2\sqrt{e} \cdot \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+3)!} + U_n$.*
   b. *En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{U_0 - U_n}{2\sqrt{e}}$.*
   c. *Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{F(e^{-1}) - F(e^{-2})}{2\sqrt{e}}$.*

EXERCICE 2 : Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes les unes des autres.

Question 1 :

a) *Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation diophantienne : $109x - 226y = 1$.*
b) *Déterminer les couples $(a; b)$ d'entiers naturels tels que :*
   $a > b$, $a^2 + b^2 = 801$ *et* $PPCM(a; b) = 120$.

Question 2 :

a) *Soit $x \in \mathbb{Q}$. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n \in \mathbb{Z}$. En écrivant $x = \frac{p}{q}$ avec p et q des entiers premiers entre eux, montrer que $x \in \mathbb{Z}$.*
b) *Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe m et n premiers entre eux tels que $a^m = b^n$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^n$ et $b = c^m$.*

Question 3 :

a) *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que les entiers* $a_i = i.n! + 1$ *pour* $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ *sont deux à deux premiers entre eux.*

b) *En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infini.*

Question 4 :

Soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe toujours un nombre premier strictement compris entre n *et* $n! + 2$. *On pourra raisonner par l'absurde.*

Question 5 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $F_n = 1 + 2^{2^n}$; *les nombres* F_n *sont appelés nombres de Fermat. On considère deux entiers distincts* m *et* n *et on suppose par exemple que* $m > n$. *Soit* $k = m - n$ *et* $a = 2^{2^n}$. *Le but de la question est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.*

a) *Montrer que* $F_m = a^{2^k} + 1$.

b) *Montrer que* :

$$\sum_{i=0}^{2^k-1} (-a)^i = -\frac{F_m - 2}{F_n}$$

c) *En déduire que* F_n *divise* $F_m - 2$ *puis que* F_n *et* F_m *sont premiers entre eux.*

d) *Conclure.*

EXERCICE 3

$ABCD$ *est un carré de centre* O *tel que* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *et* S_1 *est la similitude directe de centre* C *qui transforme* D *en* A.

1) *Déterminer l'angle et le rapport de* S_1.

2) B' *est l'image de* B *par* S_1.

   a. *Montrer que* $S_1(DB) = (AB)$.

   b. *Montrer que* $(CB') \perp (OC)$ *et construire* B'

3) S_2 *est la similitude directe telle que* $S_2(A) = B$ *et* $S_2(O) = A$.

   a. *Déterminer et construire* $B_1 = S_2(C)$.

   b. *Déterminer l'angle et le rapport de* S_2.

   c. *En déduire que* $S_2 \circ S_1$ *est une homothétie dont on déterminera le rapport.*

4) *Posons* $E = D * C$; *la droite* (AE) *coupe* (DB) *en* I ; *on note* Ω *le centre de* S_2.

   a. *montrer que* I, C *et* B_1 *sont alignés.*

   b. *Montrer que* Ω *appartient au cercle passant par* A *et* B *et tangent à* (AC).

   c. *Montrer que* Ω *appartient au cercle de diamètre* $[OB]$; *construire alors* Ω.

EXERCICE 4 : Les deux parties sont indépendantes

1ère Partie

On donne la parabole (P) *d'équation :* $y = 2x^2 - 3x + 5$ *dans un repère orthonormé.*

1) *Déterminer le paramètre* p, *le sommet* S, *le foyer* F *et la directrice* (D) *de* (P). *Tracer la parabole* (P).

2) *Soit $M(x_0, y_0)$ un point de (P) autre que S. Trouver l'équation de la tangente et de la normale en M à (P).*
3) *Cette tangente et cette normale coupent l'axe focal en T et N respectivement.*
   a. *Montrer que le sommet S est le milieu de $[HT]$, où H désigne le projeté orthogonal de M sur l'axe focal.*
   b. *Montrer que F est le milieu de $[TN]$.*
4) *Montrer que la longueur de la sous*-normale HN est égale à p.

2ème *Partie*

Soit m un nombre réel différent de 1 et de 3. On considère la famille de coniques (C_m) d'équation dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $\frac{x^2}{m-1} + \frac{y^2}{m-3} = 1$.

1) *Étudier suivant les valeurs de m la nature des courbes (C_m).*
2) *On considère le point $A\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$.*
   a. *Montrer qu'une ellipse (E) et une hyperbole (H) de la famille de coniques (C_m) passent par le point A et calculer les valeurs correspondantes de m.*
   b. *Préciser les longueurs des demi-axes de (E) et (H) et montrer que (E) et (H) ont les mêmes foyers.*
   c. *Sous quel angle (E) et (H) se coupent-elles ?*
3) *Soit $M(x, y)$ un point quelconque de l'ellipse (E) et soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.*
   a. *Exprimer OM^2 en fonction de θ.*
   b. *En déduire que si M et N sont deux points de (E) tels que (OM) et (ON) soient perpendiculaires alors la quantité $\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$ est constante et que la droite (MN) reste tangente à un cercle fixe que l'on caractérisera (On rappelle que dans un triangle ABC rectangle en A, la hauteur AH issue de A vérifie : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$).*

FIN