$3^{\text{ème}}$ bac blanc (7 avril 2021)

Épreuves de mathématiques

Sachez bien que :

« Le seul endroit où la réussite vient avant le travail c'est dans le dictionnaire ».

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(\mathbf{E})$ suivante : $\mathbf{z^3 - 2(\sqrt{3} + i)\,z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i = 0}$.

1. a. Montrer que l'équation $(\mathbf{E})$ admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
   b. Résoudre $(\mathbf{E})$ dans $\mathbb{C}$.
   c. Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de $(\mathbf{E})$.
2. Soit $\boldsymbol{\alpha}$ un réel et $(\mathbf{E}_{\alpha})$ l'équation : $\mathbf{z^3 - 2e^{i\alpha}(\sqrt{3} + i)\,z^2 + 4e^{2i\alpha}(1 + i\sqrt{3})z - 8ie^{3i\alpha} = 0}$.
   a. Démontrer que $(\mathbf{ze^{-i\alpha}})$ est solution de $(\mathbf{E})$ si et seulement si $\mathbf{z}$ est solution de $(\mathbf{E}_{\alpha})$.
   b. En déduire les solutions de l'équation $(\mathbf{E}_{\pi})$ suivante :
   $$\mathbf{z^3 + 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z + 8i = 0}$$
   c. Représenter dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O};\ \vec{\mathbf{u}},\vec{\mathbf{v}})$ les images des solutions des équations $(\mathbf{E})$ et $(\mathbf{E}_{\pi})$ et vérifier qu'elle sont les sommets d'un polygone régulier.

Exercice 2

Soit, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $(\mathbf{E})$: $\mathbf{35x - 96y = 1}$.

1. Justifier que l'équation $(\mathbf{E})$ admet des solutions.
2. Vérifier que le couple $(\mathbf{11}, \mathbf{4})$ est une solution particulière de $(\mathbf{E})$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(\mathbf{E})$.
4. Soit, dans $\mathbb{N}$, l'équation $(\mathbf{F})$: $\mathbf{x^{35} \equiv 2\ [97]}$ et soit $\mathbf{x}$ une solution de $(\mathbf{F})$.
   a. Montrer que $\mathbf{97}$ est premier et que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{97}$ sont premiers entre eux.
   b. Montrer que $\mathbf{x^{96} \equiv 1\ [97]}$.
   c. Déduire que $\mathbf{x \equiv 2^{11}\ [97]}$.
   d. Montrer que si $\mathbf{x \equiv 2^{11}\ [97]}$ alors $\mathbf{x}$ est une solution de $(\mathbf{F})$.
   e. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathbf{F})$ est l'ensemble des entiers de la forme $\mathbf{11 + 97k}$ où $\mathbf{k} \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

On cherche à modéliser l'évolution au cours du temps de deux populations d'animaux : le renard et le campagnol (un animal qui constitue l'essentiel du régime alimentaire du renard).

Pour tout entier naturel $\mathbf{n}$, on note $\mathbf{a_n}$ la population des renards, et $\mathbf{b_n}$ la population des campagnols (donnée en milliers) à la fin du n-ième mois. On suppose que l'on a, pour tout $\mathbf{n}$:

$$\begin{cases} \mathbf{a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}4b_n} \\ \mathbf{b_{n+1} = -0{,}025a_n + 1{,}05b_n} \end{cases} \quad ①$$

1. Donner une interprétation des coefficients $\mathbf{0{,}8}$ et $\mathbf{1{,}05}$ dans le contexte de l'exercice.
2. On suppose tout d'abord que la population initiale de chaque espèce est de $\mathbf{90}$ renards et $\mathbf{30\,000}$ campagnols. Soit $\mathbf{a_0 = 90}$ et $\mathbf{b_0 = 30}$.
   a. Calculer $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{b_1}$ puis $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{b_2}$.

b. A l'aide d'un tableur, on a calculé les valeurs de a_n et b_n pour $n = 10, 20, 40, 50, 80$ **et** 100 :

n	20	50	80	100
a_n	$51,5503812$	$50,0118306$	$50,0000903$	$50,0000035$
b_n	$25,1937977$	$25,0014788$	$25,0000113$	$25,0000004$

Que constate-t-on ? Interpréter ces résultats.

3. Nous allons expliquer le comportement des deux suites grâce au calcul matriciel :

a. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Écrire le système ① sous la forme d'une égalité matricielle $U_{n+1} = A \times U_n$, où A est une matrice carrée d'ordre 2.

b. Démontrer que pour tout n, on a $U_n = A^n \times U_0$. A l'aide d'une calculatrice, on a trouvé :
$A^{20} = \begin{pmatrix} -0,2816 & 2,5633 \\ -0,1602 & 1,3204 \end{pmatrix}$, $A^{50} = \begin{pmatrix} -0,3329 & 2,6658 \\ -0,1666 & 1,3332 \end{pmatrix}$, $A^{100} = \begin{pmatrix} -0,3333 & 2,6666 \\ -0,1666 & 1,3333 \end{pmatrix}$.
Que constate-t-on ?

c. Posons $P = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

d. Calculer $D = P^{-1} \times A \times P$, puis montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

e. En déduire que, en prenant $a_0 = 90$ et $b_0 = 30$, pour tout n : $\begin{cases} a_n = 50 + 40 \times 0,85^n \\ b_n = 25 + \ \ 5 \times 0,85^n \end{cases}$.
Étudier le comportement de ces deux suites, et comparer avec les résultats obtenus à la question 2.b. Interpréter ce qui se passe à long terme.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$, et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
   b. Montrer que la droite D d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe$(\mathcal{C}_f)$.
   c. Préciser la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $(+\infty)$ puis tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
2. Soit F la fonction définie sur $[0, \pi/2[$ par :

$$F(x) = \int_1^{1+\tan x} \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}.$$

   a. Montrer que F est dérivable sur $[0, \pi/2[$ et que $F'(x) = 1$.
   b. En déduire que $F(x) = x$ et que :

$$\int_1^2 \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \frac{\pi}{4}.$$

3. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^2 f(x)dx = 2\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2}dx.$$

   b. Vérifier que pour tout réel x on a :

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 2} = 1 + \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

   c. Calculer, alors en unités aire, l'aire du domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = 2$.

Exercice 5

Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{e^x - e^{-x}}}{\mathbf{e^x + e^{-x}}}.$$

On note $\mathbf{C}$ la courbe représentative de $\mathbf{f}$ dans un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$.

Partie A

1. a. Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$.
   b. Montrer que le point de $\mathbf{C}$ d'abscisse $\mathbf{0}$ est un point d'inflexion.
   c. Construire $\mathbf{C}$ et la tangente à $\mathbf{C}$ en son point d'abscisse $\mathbf{0}$.
2. Soit $\boldsymbol{\lambda}$ un réel positif. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$ de la partie du plan limitée par les droites $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{y} = \mathbf{1}$ et la courbe $\mathbf{C}$. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\boldsymbol{\lambda})$.
3. a. Montrer que $\mathbf{f}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle $\mathbf{I}$ que l'on précisera. On appelle $\mathbf{g}$ la réciproque de $\mathbf{f}$.
   b. Justifier la dérivabilité de $\mathbf{g}$ sur $\mathbf{I}$.
   c. Montrer : $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f'(x)} = \mathbf{1} - \mathbf{f^2(x)}$. Donner $\mathbf{g'(x)}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{I}$.
4. Déterminer $\mathbf{g(x)}$ pour $\mathbf{x} \in \mathbf{I}$ et en déduire la valeur de : $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{1-x^2}}$.

Partie B

$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, on pose $\mathbf{I_n(x)} = \int_0^x [\mathbf{f(t)}]^{\mathbf{n}}\, \mathbf{dt}$ (Remarque $[\mathbf{f(t)}]^0 = \mathbf{1}$)

1. a. Justifier l'existence de $\mathbf{I_n(x)}$ puis calculer $\mathbf{I_0(x)}$ et $\mathbf{I_1(x)}$.
   b. Montrer que $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, on a : $\mathbf{I_{n+2}(x)} = \mathbf{I_n(x)} - \frac{1}{n+1}\left(\mathbf{f(x)}\right)^{n+1}$.
   c. En déduire alors que $\forall \mathbf{p} \geq \mathbf{1}, \forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, on a :

$$\mathbf{I_{2p}(x)} = \mathbf{x} - \left[\mathbf{f(x)} + \frac{1}{3}(\mathbf{f(x)})^3 + \cdots + \frac{1}{2p-1}(\mathbf{f(x)})^{2p-1}\right]$$

$$\mathbf{I_{2p+1}(x)} = \ln\left(\frac{\mathbf{e^x + e^{-x}}}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}(\mathbf{f(x)})^2 + \cdots + \frac{1}{2p}(\mathbf{f(x)})^{2p}\right]$$

2. a. Montrer que $\forall \mathbf{p} \in \mathbb{N}, \forall \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, on a : $\mathbf{0} \leq \mathbf{I_{2p}(x)} \leq \mathbf{x}[\mathbf{f(x)}]^{2p}$.
   b. En déduire que la suite $\left(\mathbf{I_{2p}(x)}\right)$ est convergente pour tout réel $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ et calculer sa limite.
   c. En utilisant les questions précédentes, calculer :

$$\lim_{p \to +\infty} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2p-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2p-1}\right].$$

Fin