

2^eme bac blanc (Décembre 2021)
Épreuves de mathématiques

Sachez bien que :

« Le seul endroit où la réussite vient avant le travail c'est dans le dictionnaire ».

Exercice 1

Soit m un nombre complexe distinct de 1 .

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E_m): $z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0$.

1. a. Vérifier que le discriminant de l'équation (E_m) vaut $\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2$.
b. Résoudre alors l'équation (E_m).
c. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles le produit des solutions de (E_m) est égale à 1 .
2. On pose $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$.
Dans le cas $m = e^{i\alpha}$ avec $\pi/2 < \alpha < \pi$, écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points M , M_1 et M_2 d'affixes respectives m , z_1 et z_2 .
a. Déterminer l'ensemble des points M tels que les points M , M_1 et M_2 sont alignés.
b. Déterminer le centre Ω et l'angle β de la rotation R d'écriture complexe : $z' = 1 - iz$.
c. Démontrer que le nombre $(z_2 - z_1)/(z_2 - m)$ est imaginaire pur si et seulement si :
$$\operatorname{Re}(m) + \operatorname{Im}(m) = 1$$

d. En déduire l'ensemble des points M tels que les points Ω , M , M_1 et M_2 sont cocycliques.

Exercice 2

On considère la suite u définie sur \mathbb{N} par :

- La donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 ,
- La relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

On se propose de calculer l'expression des termes de cette suite par une méthode matricielle.

Pour tout entier naturel n , on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$X_{n+1} = A \times X_n, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- b. Justifier que pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n \times X_0$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- a. Déterminer la matrice P^{-1} et $P^{-1} \times A \times P$.
- b. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}$$

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n , u_0 et u_1 .
4. Existe-t-il des valeurs de u_0 et u_1 pour lesquelles la suite u converge ? Si oui, donner la valeur de la limite.

Exercice 3

1. On considère l'équation (E) : $11x - 7y = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

- a. Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) vérifiant l'égalité $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple.
- b. En déduire une solution particulière de (E).
- c. Résoudre l'équation (E).
- d. Dans le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite D : $11x - 7y - 5 = 0$.

Déterminer le nombre de points de la droite \mathcal{D} dont les coordonnées sont des entiers compris entre 0 et 50 .

2. On considère l'équation (F) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que si le couple (x, y) est solution de l'équation (F) , alors $x^2 = 2y^2 \pmod{5}$.

b. Soient x et y des entiers relatifs, recopier et compléter les deux tableaux suivants :

$x \equiv \dots \pmod{5}$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \dots \pmod{5}$					

$y \equiv \dots \pmod{5}$	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv \dots \pmod{5}$					

c. En déduire que si (x, y) est solution de (F) alors x et y sont des multiples de 5 .

d. Démontrer alors que l'équation (F) n'a pas de solution.

Exercice facultatif

On considère quatre villes V_1, V_2, V_3, V_4 dans un pays où le trafic aérien est encore très réduit : il existe seulement un vol direct de V_1 vers V_2 et vers V_4 , de V_2 vers V_3 , de V_3 vers V_1 et vers V_4 , de V_4 vers V_2 .

- 1) Dessiner le graphe décrivant ces vols.
- 2) Écrire la matrice M associée à ce graphe. On prendra les villes dans l'ordre de leur numérotation.
- 3) Donner, à l'aide de la calculatrice, M^2, M^3 et $M + M^2 + M^3$.
- 4) Existe-t-il au moins un vol de chaque ville V_i vers chaque ville V_j , avec $i \neq j$, comportant au plus deux escales ? Expliquer.

Eh oui, à chacun ses règles de calcul !!!

