Évaluation (mars 2024)

Épreuve de mathématiques – Durée : 4 heures

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathbf{O};\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}})$. On désigne par :

- $(\mathbf{P})$ la courbe d'équation : $\mathbf{y^2-2\sqrt{3}y-2x=0}$;
- $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $\mathbf{O}$ et de rayon $\mathbf{2}$;
- $\mathbf{F}$ un point de $(\mathcal{C})$ distinct du point $\mathbf{A(-2;0)}$.

1. Déterminer la nature de $(\mathbf{P})$ et ses éléments caractéristiques. Construire $(\mathbf{P})$.

2. Justifier que la parabole de foyer $\mathbf{F}$ et de directrice $\mathbf{\Delta : x=-2}$ passe par le point $\mathbf{O}$.

3. Dans cette question, on se propose de déterminer l'ensemble $(\mathcal{E})$ des sommets des paraboles de directrice $\mathbf{\Delta : x=-2}$ et de foyer un point du cercle $(\mathcal{C})$ distinct de $\mathbf{A(-2;0)}$.
Soit $\mathbf{M(x;y)}$ un point de $(\mathcal{E})$ et $\mathbf{F(a;b)}$ le foyer de la parabole de sommet $\mathbf{M}$ et de directrice la droite $\mathbf{\Delta : x=-2}$.

a. Déterminer $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ en fonction de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$.

b. En déduire que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont liés par la relation :

$$(\mathbf{x+1})^2+\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{4}}=\mathbf{1}$$

c. Conclure.

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $\mathbf{ABCD}$ de centre $\mathbf{O}$ (càd $(\overrightarrow{\mathbf{OA}},\overrightarrow{\mathbf{OB}})=\mathbf{\pi/2}\ [\mathbf{2\pi}]$).
Soit $\mathbf{P}$ un point du segment $[\mathbf{BC}]$ distinct de $\mathbf{B}$. On note $\mathbf{Q}$ l'intersection de $(\mathbf{AP})$ avec $(\mathbf{CD})$.
La perpendiculaire $\mathbf{\Delta}$ à $(\mathbf{AP})$ passant par $\mathbf{A}$ coupe $(\mathbf{BC})$ en $\mathbf{R}$ et $(\mathbf{CD})$ en $\mathbf{S}$.

1. Faire une figure (prendre $(\mathbf{BC})$ horizontale sur la feuille).

2. Soit $\mathbf{r}$ la rotation de centre $\mathbf{A}$ et d'angle $\mathbf{\pi/2}$.

a. Préciser l'image de la droite $(\mathbf{BC})$ par $\mathbf{r}$.

b. Déterminer les images de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{P}$ par $\mathbf{r}$.

c. Quelle est la nature des triangles $\mathbf{RAQ}$ et $\mathbf{PAS}$?

3. On note $\mathbf{N}$ le milieu du segment $[\mathbf{PS}]$ et $\mathbf{M}$ celui du segment $[\mathbf{QR}]$. Soit $\mathbf{s}$ la similitude directe de centre $\mathbf{A}$, d'angle $\mathbf{\pi/4}$ et de rapport $\sqrt{\mathbf{2}}/\mathbf{2}$.

a. Préciser les images des points $\mathbf{R}$ et $\mathbf{P}$ par $\mathbf{s}$.

b. Quel est le lieu géométrique du point $\mathbf{N}$ quand $\mathbf{P}$ décrit le segment $[\mathbf{BC}]$ privé de $\mathbf{B}$?

c. De ce qui précède, déduire que les points $\mathbf{M}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{D}$ sont alignés.

Exercice 3

Soit la fonction $\mathbf{f}$ définie sur $[\mathbf{0};+\boldsymbol{\infty}[$ par : $\begin{cases}\mathbf{f(0)=0}\\ \mathbf{f(x)=-x^2+x^2\ln x} & \mathbf{si}\ \ \mathbf{x}>0\end{cases}$ et $\mathcal{C}_\mathbf{f}$ sa courbe représentativedans un repère orthonormé $(\mathbf{O},\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}})$.

1. a. Étudier la continuité de $\mathbf{f}$ en $\mathbf{0}$.

b. Calculer $\mathbf{\lim_{x\to 0}}\left[\left(\mathbf{f(x)-f(0)}\right)/(\mathbf{x-0})\right]$. Interpréter graphiquement cette limite.

2. a. Déterminer $\mathbf{f'(x)}$ pour $\mathbf{x}>0$, calculer $\mathbf{\lim_{x\to+\infty} f(x)}$ et dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$.

b. Calculer $\mathbf{\lim_{x\to+\infty}}[\mathbf{f(x)/x}]$ et en donner une interprétation graphique.

c. Construire la courbe $\mathcal{C}_\mathbf{f}$ après avoir précisé son intersection avec l'axe des abscisses.

3. a. En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$\mathbf{I} = \int_{\sqrt{e}}^{e} \mathbf{x^2 \ln x \, dx}.$$

b. Soit $\mathbf{D}$ le domaine plan du graphique dont l'aire, en unités d'aire, vaut

$$\mathbf{A} = \int_{\sqrt{e}}^{e} (\mathbf{x^2 - x^2 \ln x})\, \mathbf{dx}$$

Définir $\mathbf{D}$ par une phrase et hachurer $\mathbf{D}$ sur le graphique.

4. Soit $\mathbf{g}$ la restriction de $\mathbf{f}$ à l'intervalle $[\sqrt{e}; +\infty[$.

a. Justifier que $\mathbf{g}$ est une bijection de $[\sqrt{e}; +\infty[$ vers un intervalle $\mathbf{J}$ à préciser. On note $\mathbf{g^{-1}}$ sa réciproque.

b. Sans faire de calculs, préciser la valeur de $\lim_{x\to+\infty}[g^{-1}(x)/x]$ puis en donner une signification graphique.

Exercice 4

On a représenté ci-dessous dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction $\mathbf{f}$ solution de l'équation différentielle (E) : $\mathbf{y'' - 2y' + y = x - 2}$.

→ La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ en $(+\infty)$;

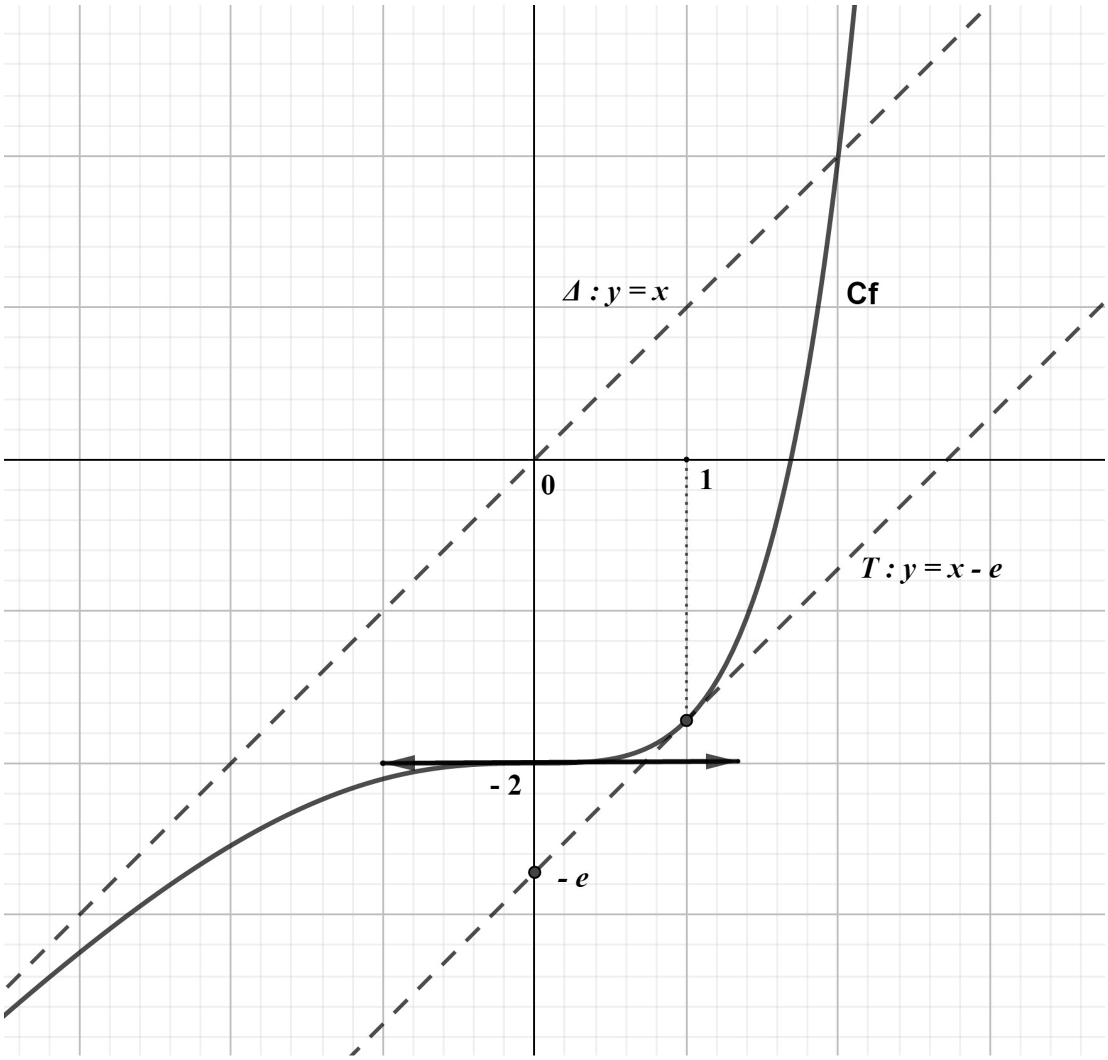
→ La droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $(-\infty)$.

1. Par lecture graphique :

a. Donner $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(1)$

b. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - x]$, $\lim_{x\to+\infty}[f(x)/x]$

c. Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$.



Prof. Sidi Major

2. **a.** Résoudre l'équation différentielle $(\mathbf{E'})$: $\mathbf{y'' - 2y' + y = 0}$.
   b. Déterminer les réels $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ pour que la fonction $\mathbf{h(x) = ax + b}$ soit solution de $(\mathbf{E})$.
   c. En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E})$.
3. **a.** Montrer que pour tout réel $\mathbf{x}$, la fonction $\mathbf{f}$ est donnée par $\mathbf{f(x) = (x - 2)e^x + x}$.
   b. Soit $\mathbf{D}$ le domaine plan limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, la droite $\mathbf{T}$ et les droites verticales d'équations $\mathbf{x = 0}$ et $\mathbf{x = 2}$. Reproduire le graphique en hachurant le domaine $\mathbf{D}$.
   c. Sans utiliser l'intégration par parties, calculer l'aire de $\mathbf{D}$.
4. Discuter graphiquement l'existence et le nombre de solutions de l'équation : $\mathbf{x = 2 + me^{-x}}$, où $\mathbf{m}$ est un paramètre réel.

Fin

Barème : 5 points par exercice

Bonus (2 points)

On se propose de démontrer qu'il n'existe pas de polynôme $\mathbf{P}$ tel que pour tout entier naturel $\mathbf{n}$, on ait : $\mathbf{P(n) = ln(n!)}$.
Procédons par l'absurde : on suppose qu'un tel polynôme existe.

1. Exhiber deux racines de $\mathbf{P}$. Calculer $\mathbf{P(2)}$.
2. Justifier l'existence d'un polynôme $\mathbf{Q}$ tel que :
$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \qquad \mathbf{P(n) = n(n-1)Q(n)}$$
3. Démontrer que :
$$\forall \mathbf{n} \geq \mathbf{2}, \qquad \mathbf{Q(n)} = \frac{\mathbf{P(n)}}{\mathbf{n(n-1)}} \leq \frac{\mathbf{ln(n)}}{\mathbf{n-1}}$$
   En déduire la limite de $\mathbf{Q(n)}$ quand $\mathbf{n}$ tend vers $+\infty$ puis que :
$$\mathbf{deg}\,(\mathbf{P}) < 2$$
4. Conclure.