Le chapitre en bref

Prof. Sidi MAJOR

❶ Les principes de base

1. Principe additif

Si A et B sont deux ensembles contenant respectivement m et n éléments et tels que :

$$A \cap B = \emptyset$$

alors l'ensemble $A \cup B$ contient $m + n$ éléments.

2. Principe multiplicatif

Si A et B sont deux ensembles contenant respectivement m et n éléments alors l'ensemble $A \times B$ contient $m \cdot n$ éléments.

3. Formule de Poincaré

On note $\mathrm{card}(X)$ le nombre d'éléments de l'ensemble fini X.

Si A et B sont deux ensembles finis alors :

$$\mathrm{Car}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

❷ Le modèle des tirages

Problème :
Un sac contient n boules indiscernables au toucher numérotés de 1 à n. On tire p boules de ce sac.
Question : Nombre N de tirages possibles ?

Il existe trois types de tirages :

1. Tirage successif avec remise (TSAR) :

Ordre – Répétition

$$N = n^p$$

Un tel tirage est une p-liste.

2. Tirage successif sans remise (TSSR) :

Ordre – Sans répétition

$$N = A_n^p = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$$

Un tel tirage est un arrangement de p parmi n.

3. Tirage simultané (TSim) :

Sans ordre – Sans répétition

$$N = C_n^p = \frac{A_n^p}{1 \times 2 \times \ldots \times p}$$

Un tel tirage est une combinaison de p parmi n.

❸ La notation factorielle

On convient que : $0! = 1$; $1! = 1$

Pour tout entier $n \geq 2$:

$$n! = n \times (n-1)!$$

Ainsi, on a :

$$2! = 2 \times 1! = 2$$
$$3! = 3 \times 2! = 6$$
$$4! = 4 \times 3! = 24$$
$$5! = 5 \times 4! = 120$$

❺ Réécriture de C_n^p et A_n^p

En adoptant les conventions :

$$A_n^0 = C_n^0 = 1$$

on démontre que pour $0 \leq p \leq n$:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad ; \quad C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Symétrie

Pour $0 \leq p \leq n$:

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

La formule de Pascal

Pour $0 \leq p \leq n-1$:

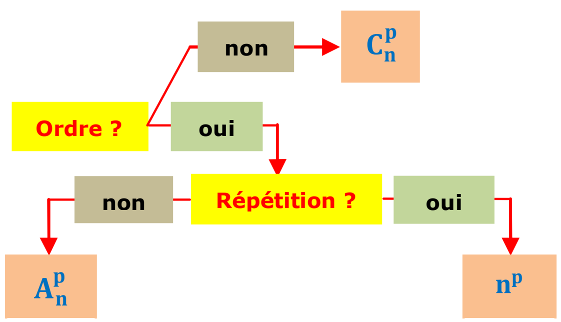
$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

❻ Le tirage comme modèle de référence

Toute question de dénombrement peut être ramenée à un tirage en se posant les deux questions :

Y a-t-il un ordre ? Y a-t-il répétition ?

selon le schéma suivant :



❼ Formule du binôme de Newton

On démontre par récurrence que :
$\forall a, b \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Les coefficients du développement de $(a+b)^n$ peuvent être donnés par le triangle de Pascal :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1

$$C_4^2 + C_4^3 = C_5^3$$