Les méthodes sont les habitudes de l'esprit et les économies de la mémoire.

Rivaroll

Exercices corrigés

Prof. Sidi MAJOR

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a. $\mathbf{4y' + 3y = 0}$ **b.** $\mathbf{y \ln 5 - y' = 0}$

c. $\mathbf{\frac{1}{5}y + \frac{1}{3}y' = 0}$ **d.** $\mathbf{y\sqrt{3} = y'}$

Corrigé

a. $4y' + 3y = 0 \iff y' = -\frac{3}{4}y$, donc :

$$f_k(x) = ke^{-\frac{3}{4}x}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

b. $y \ln 5 - y' = 0 \iff y' = (\ln 5)y$, donc :

$$f_k(x) = ke^{(\ln 5)x} = k\left(e^{\ln 5}\right)^x = k \times 5^x, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

c. $\frac{1}{5}y + \frac{1}{3}y' = 0 \iff y' = -\frac{3}{5}y$, donc :

$$f_k(x) = ke^{-\frac{3}{5}x}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

d. $y\sqrt{3} = y' \iff y' = (\sqrt{3})y$, donc :

$$f_k(x) = ke^{(\sqrt{3})x}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a. $\mathbf{9y^2 = (y')^2}$ **b.** $\mathbf{(y')^2 - 2yy' = 0}$

c. $\mathbf{y'' = 3y}$ **d.** $\mathbf{2y''' + 5y'' = 0}$

Corrigé

a. $9y^2 = (y')^2 \iff 9y^2 - (y')^2 = 0 \iff (3y - y')(3y + y') = 0 \iff y' = 3y$ ou $y' = -3y$.

Donc les solutions sont les fonctions de la forme :

$$f_k(x) = ke^{3x},\ k \in \mathbb{R} \text{ ou } g_k(x) = ke^{-3x},\ k \in \mathbb{R}$$

b. $(y')^2 - 2yy' = 0 \iff y'(y' - 2y) = 0 \iff y' = 0$ ou $y' = 2y$

Donc les solutions sont les fonctions de la forme :

$$f_k(x) = k,\ k \in \mathbb{R} \text{ (fonctions constantes) ou } g_k(x) = ke^{2x},\ k \in \mathbb{R}$$

c. $y' = 3y$, les solutions sont les fonctions de la forme : $f_k(x) = ke^{3x}$, $k \in \mathbb{R}$

d. $2y''' + 5y'' = 0$ s'écrit $2(y'')' + 5y'' = 0$. Donc on peut poser $z = y''$ et l'équation devient : $\begin{cases} 2z' + 5z = 0 \\ z = y'' \end{cases}$

$$2z' + 5z = 0 \iff z' = -\frac{5}{2}z$$

Les solutions de l'équation $2z' + 5z = 0$ sont les fonctions $f_k(x) = ke^{-\frac{5}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$ et donc on détermine les solutions de $2y''' + 5y'' = 0$ en primitivant deux fois les fonctions $f_k(x) = ke^{-\frac{5}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Ainsi, on a : $y' = \text{Prim}\left(ke^{-\frac{5}{2}x}\right) = -\frac{2}{5}ke^{-\frac{5}{2}x} + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, et donc :

$$y = \text{Prim}\left(-\frac{2}{5}ke^{-\frac{5}{2}x} + C_1\right) = \frac{4}{25}ke^{-\frac{5}{2}x} + C_1x + C_2$$

Enfin, les solutions de l'équations $2y''' + 5y'' = 0$ sont les fonctions de la forme :

$$h(x) = C_0e^{-\frac{5}{2}x} + C_1x + C_2, \text{ avec } C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant la condition initiale donnée :

a. $(E) : y' - 3y = 0$ **et** $y(0) = 2$

b. $(E) : 3y' + y = 0$ **et** $y(1) = e$

c. $(E) : y' + y\ln 2 = 0$ **et** $y(1) = 1$

d. $(E) : y' = y$ **et** $y(1) = -1$

Prof. Sidi MAJOR

Corrigé

a. $y' - 3y = 0$, donc les solutions sont les fonctions de la forme :

$$f_k(x) = ke^{3x}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

La condition initiale $y(0) = 2$ se traduit par $f_k(0) = 2$ soit $ke^{3\times 0} = k = 2$. Donc la solution cherchée est :

$$g(x) = 2e^{3x}$$

b. $3y' + y = 0 \iff y' = -\frac{1}{3}y$, donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$f_k(x) = ke^{-\frac{1}{3}x}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

La condition initiale $y(1) = e$ se traduit par $f_k(1) = e$ soit $ke^{-\frac{1}{3}} = e$ et par suite on trouve $k = ee^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{4}{3}}$.

La solution cherchée est donc :

$$g(x) = e^{\frac{4}{3}} \times e^{-\frac{1}{3}x} = e^{\frac{4-x}{3}}.$$

Les questions **c.** et **d.** se traitent de la même façon.

Exercice 4

Le plan est muni du repère (O, I, J). Déterminer la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $2f' + 5f = 0$ et dont la courbe représentative admet en son point d'abscisse (-1) une tangente parallèle à la droite d'équation : $y + x = 0$.

Corrigé

On a :

$$2f' + 5f = 0 \iff f' = -\frac{5}{2}f$$

Donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = ke^{-\frac{5}{2}x}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

On sait que la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse (-1) a pour coefficient directeur $f'(-1)$. Donc la condition se traduit par $f'(-1) = -1$ car le coefficient directeur de la droite d'équation $y + x = 0$ est égal à (-1).

On a :

$$\begin{cases} f'(-1) = -1 \\ 2f'(-1) + 5f(-1) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où : } f(-1) = 2/5$$

Donc :

$$f(-1) = \frac{2}{5} \iff ke^{-\frac{5}{2}\times(-1)} = \frac{2}{5}$$

Soit :

$$ke^{-\frac{5}{2}\times(-1)} = \frac{2}{5} \iff ke^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

Et enfin :

$$k = \frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}}$$

La solution cherchée est donc :

$$f(x) = \frac{2}{5}e^{-\frac{5}{2}(x+1)}$$

Exercice 5

Résoudre sur ℝ les équations différentielles suivantes :

a. $\mathbf{y'' - 4y = 0}$ **b.** $\mathbf{y'' + 16y = 0}$

c. $\mathbf{2y'' - y' - 6y = 0}$ **d.** $\mathbf{y'' - 4y' + 13y = 0}$

e. $\mathbf{y'' + 3y' = 0}$ **f.** $\mathbf{y'' - 6y' + 9y = 0}$

Prof. Sidi MAJOR

Corrigé

a. $\boldsymbol{y'' - 4y = 0}$

L'équation caractéristique est $r^2 - 4 = 0$ qui admet deux solutions réelles $r_1 = 2$ et $r_2 = (-2)$. Donc les solutions de l'équation différentielle en question sont les fonctions définies sur ℝ par :

$$f(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{-2x}; \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

b. $y'' + 16y = 0$

L'équation caractéristique est $r^2 + 16 = 0$c'est-à-dire$r^2 - (4i)^2 = 0$ qui admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = 4i$ et $(r_2 = -4i)$. Donc les solutions de l'équation différentielle en question sont les fonctions définies sur ℝ par :

$$f(x) = \lambda \cos 4x + \mu \sin 4x\,; \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

c. $\boldsymbol{2y'' - y' - 6y = 0}$

L'équation caractéristique est $2r^2 - r - 6 = 0$ qui admet deux solutions réelles $r_1 = 2$ et $r_2 = 3/2$. Donc les solutions de l'équation différentielle en question sont les fonctions définies sur ℝ par :

$$f(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{\frac{3}{2}x}; \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

d. $\boldsymbol{y'' - 4y' + 13y = 0}$

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 13 = 0$ qui admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = 2 + 3i$ et $r_2 = 2 - 3i$. Donc les solutions de l'équation différentielle en question sont les fonctions définies sur ℝ par :

$$f(x) = e^{2x}(\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x); \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

e. $\boldsymbol{y'' + 3y' = 0}$

L'équation caractéristique est $r^2 + 3r = 0$ qui admet deux solutions réelles $r_1 = 0$ et $r_2 =-3$. Donc les solutions de l'équation différentielle en question sont les fonctions définies sur ℝ par :

$$f(x) = \lambda + \mu e^{-3x}; \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

f. $\boldsymbol{y'' - 6y' + 9y = 0}$

L'équation caractéristique est $r^2 - 6r + 9 = 0$ qui admet une seule solution $r = 3$. Donc les solutions de l'équation différentielle en question sont les fonctions définies sur ℝ par :

$$f(x) = (\lambda x + \mu)e^{3x}; \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6

Dans chacun des cas, résoudre sur ℝ l'équation différentielle (E) et déterminer la solution vérifiant les conditions initiales données :

a. (E) : $\mathbf{y'' + 2y' + y = 0}$ $\mathbf{y(0) = -1}$ **et** $\mathbf{y'(0) = 0}$

b. (E) : $\mathbf{y'' + 16y = 0}$ $\mathbf{y(0) = 0}$ **et** $\mathbf{y'(0) = -1}$

c. (E) : $\mathbf{y'' + 2y' - 3y = 0}$ $\mathbf{y(0) = 3}$ **et** $\mathbf{y'(0) = 0}$

d. (E) : $\mathbf{y'' + y' + y = 0}$ $\mathbf{y(0) = -1}$ **et** $\mathbf{y'(0) = \sqrt{3}}$

Corrigé

a. $\boldsymbol{y'' + 2y' + y = 0}$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ qui admet une seule solution $r = -1$. Donc les solutions de l'équation différentielle en question sont les fonctions définies sur ℝ par : $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{-x}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \lambda e^{-x} - (\lambda x + \mu)e^{-x}$ et donc les conditions initiales se traduisent comme suit :

$$y(0) = -1 \iff \mu = -1 \text{ et } y'(0) = 0 \iff \lambda - \mu = 0$$

Et ainsi : $\lambda = \mu = -1$ et la solution cherchée est donc : $f(x) = (-1 - x)e^{-x}$.

b. $\boldsymbol{y'' + 16y = 0}$

D'après la question b. de l'exercice 5, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions définies sur ℝ par :

$$f(x) = \lambda \cos 4x + \mu \sin 4x\,; \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On a : $f'(x) = -4\lambda \sin 4x + 4\mu \cos 4x$ et donc les conditions initiales peuvent être traduites comme suit :

$$y(0) = 0 \iff \lambda = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \iff 4\mu = 0$$

Donc la seule fonction qui répond à la question est $f(x) = 0$.

c. $\boldsymbol{y'' + 2y' - 3y = 0}$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r - 3 = 0$ qui admet deux solutions réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$ Donc les solutions de l'équation différentielle en question sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On a : $f'(x) = \lambda e^x - 3\mu e^{-3x}$ et donc les conditions initiales s'écrivent :

$$y(0) = 0 \iff \lambda + \mu = 0 \text{ et } y'(0) = -1 \iff \lambda - 3\mu = -1$$

Ce qui donne le système : $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - 3\mu = -1 \end{cases}$ dont la solution est $(\lambda;\, \mu) = \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ et enfin la solution cherchée est

$$f(x) = -\frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-3x}.$$

Prof. Sidi MAJOR

d. La question peut être traitée de manière analogue.

Exercice 7

On considère l'équation différentielle $(\mathbf{E})$: $\boldsymbol{y' - 2y = 8x^2 - 8x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(\mathbf{E_1})$: $\boldsymbol{y' - 2y = 0}$.

2. déterminer un polynôme $\mathbf{P(x)}$ solution de $(\mathbf{E})$.

3. Démontrer que l'ensemble des solutions de $(\mathbf{E})$ sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des solutions $\mathbf{f_k}$ définies par :

$$\boldsymbol{f_k(x) = ke^{2x} - 4x^2} \text{ où } \boldsymbol{k} \text{ est réel quelconque.}$$

Corrigé

1. (E_1) : $y' - 2y = 0 \iff y' = 2y$ et donc les solutions de (E_1) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_k(x) = ke^{2x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $P(x)$ un polynôme de degré n.

$$P(x) \in S_{(E)} \iff P'(x) - 2P(x) = 8x^2 - 8x$$

Donc le polynôme $P(x)$ est forcément de degré 2 et par suite on peut l'écrire sous la forme :

$$P(x) = ax^2 + bx + c.$$

On a : $P'(x) = 2ax + b$ et donc :

$$P \in S_{(E)} \iff P'(x) - 2P(x) = 8x^2 - 8x \iff (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = 8x^2 - 8x$$
$$\iff -2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c = 8x^2 - 8x$$

Par identification des coefficients, on obtient : $\begin{cases} -2a = 8 \\ 2a - 2b = -8 \\ b - 2c = 0 \end{cases}$

Ce qui donne : $a = -4,\ b = c = 0$ et par suite $P(x) = -4x^2$.

3. Soit f une solution quelconque de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 8x^2 - 8x$.

$$f \in S_{(E)} \iff f'(x) - 2f(x) = 8x^2 - 8x \quad (1)$$

On a aussi : $P'(x) - 2P(x) = 8x^2 - 8x \quad (2)$

D'où : $(1) - (2) \iff [f'(x) - 2f(x)] - [P'(x) - 2P(x)] = (8x^2 - 8x) - (8x^2 - 8x) = 0$

Soit enfin : $(f - P)'(x) - 2(f - P)(x) = 0$ c'est-à-dire $f - P \in S_{(E_1)}$.

En conclusion :

$f \in S_{(E)} \iff f - P \in S_{(E_1)}$ et par suite les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = ke^{2x} - 4x^2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8

Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1. $\mathbf{y'' + 2y' - 3y = 9}$;

2. $\mathbf{y'' + 2y' - 3y = -6x + 1}$;

3. $\mathbf{y'' + 2y' - 3y = -9x^2 - 3x + 18}$.

Corrigé

1. $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{y'' + 2y' - 3y = 9}$
   - L'équation différentielle homogène (sans second membre) associée est (E_1): $y'' + 2y' - 3y = 0$
     Son équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$ admet deux solutions réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$. Donc les solutions de (E_1) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
     $$g(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
   - Recherche d'une solution particulière de (E) :
     Le second membre étant constant, cherchons s'il existe une fonction constante $y(x) = c$ solution de l'équation (E).
     On a : $c'' + 2c' - 3c = 9 \iff -3c = 9 \iff c = -3$ car $c'' = c' = 0$.
     Donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
     $$f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x} - 3; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Prof. Sidi MAJOR

$$\boxed{\text{Rappel : } SG(E) = SG(E_1) + SP(E)}$$

2. $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{y'' + 2y' - 3y = -6x + 1}$
   - L'équation différentielle homogène (sans second membre) associée est :
     $$(E_1): \ y'' + 2y' - 3y = 0$$
     Son équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$ admet deux solutions réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$. Donc les solutions de (E_1) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
     $$g(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
   - Recherche d'une solution particulière de (E) :
     Le second membre étant une fonction polynôme du 1er degré, cherchons s'il existe une fonction $y(x) = ax + b$ solution de l'équation (E).
     On a : $(ax + b)'' + 2(ax + b)' - 3(ax + b) = -6x + 1 \iff -3ax + 2a - 3b = -6x + 1$.
     D'où : $a = 2$, $b = 1$ et par suite la fonction h définie par $h(x) = 2x + 1$ est une solution particulière de l'équation (E). Donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
     $$f(x) = \lambda e^x + \mu e^{-3x} + 2x + 1; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$
3. $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{y'' + 2y' - 3y = -9x^2 - 3x + 18}$: chercher une solution particulière P de (E) de la forme :
   $$P(x) = ax^2 + bx + c.$$
   Le reste de la question est laissé à titre d'exercice.

Exercice 9

Le plan est muni du repère $(\mathbf{O}, \mathbf{I}, \mathbf{J})$.

1. **Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\boldsymbol{E})$:**
   $$\mathbf{y'' - 3y' + 2y = 0}.$$
2. **Quelle est la solution de $(\boldsymbol{E})$ dont la courbe représentative $(\boldsymbol{\mathcal{C}})$ admet au point d'abscisse $\mathbf{0}$ la même tangente que la courbe $(\boldsymbol{\mathcal{C}'})$ représentative de la fonction $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{e}^{\mathbf{3x}}$.**

Corrigé

1. Résolution de l'équation $\boldsymbol{y'' - 3y' + 2y = 0}$.
   L'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$ admet 2 solutions réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.
   Donc l'intégrale générale de l'équation différentielle est :
   $$g(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Les courbes représentatives $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ ont même tangente au point d'abscisse 0 si, et seulement si, on a :
   $$f(0) = g(0) \ \text{ et } \ f'(0) = g'(0) \ \text{ où } \ f(x) = e^{3x}$$
   D'où le système : $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + 2\mu = 3 \end{cases}$ car $f'(x) = 3e^{3x}$ et $g'(x) = \lambda e^x + 2\mu e^{2x}$
   Ce qui donne $\lambda = -1$ et $\mu = 2$ et par conséquent la fonction cherchée est :
   $$g(x) = -e^x + 2e^{2x}.$$

Exercice 10

Une personne malade est placée sous perfusion c'est-à-dire injection continue d'un antibiotique.
A l'instant $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$, la quantité $\boldsymbol{Q}(\mathbf{0})$ d'antibiotique présente dans le sang du malade est nulle.

Le débit de la perfusion, c'est-à-dire la quantité injectée par minute est un réel $A > 0$ exprimé en milligrammes par minute (mg/mn). On désigne par $Q(t)$ la quantité exprimée en milligrammes (mg) d'antibiotique dans le sang du malade, à l'instant t, exprimé en minutes (min).
On suppose que la fonction Q est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;\, +\infty[$ et qu'il existe un réel $k > 0$ tel que la fonction Q vérifie l'équation différentielle (E) : $y' = A - ky$.

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E).
b. En tenant compte de la condition initiale, déterminer $Q(t)$ en fonction de t, A et k.
c. Quel est le sens de variation de la fonction Q ? Déterminer la limite de Q en $(+\infty)$. Interpréter.

2. a. On sait qu'au bout d'une heure, la quantité d'antibiotique présente dans le sang est la moitié de sa valeur limite. Montrer qu'alors :

$$k = \frac{\ln 2}{60}.$$

Prof. Sidi MAJOR

b. On souhaite obtenir une quantité limite de 80 mg d'antibiotique dans le sang du malade.
Donner l'arrondi d'ordre 2 du débit A que l'on doit alors établir.
c. Déterminer, en heures et minutes, le temps nécessaire pour que la quantité d'antibiotique présente dans le sang du malade ait atteint, à un milligrammes près, sa valeur limite.

Corrigé

1. a. L'équation différentielle (E) est de la forme $y' = ay + b$. Ses solutions sont toutes les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ce^{-kt} + \frac{A}{k}; \quad avec\ c \in \mathbb{R}.$$

b. Sachant que $Q(0) = 0$, on a :

$$c + \frac{A}{k} = 0$$

D'où :

$$c = -\frac{A}{k}.$$

Donc :

$$Q(t) = -\frac{A}{k}e^{-kt} + \frac{A}{k} = \frac{A}{k}(1 - e^{-kt}).$$

c. La fonction Q est dérivable et pour tout réel t :

$$Q(t) = -\frac{A}{k}(-ke^{-kt}) = Ae^{-kt} > 0$$

Donc la fonction Q est strictement croissante sur $[0;\, +\infty[$.
D'autre part, on a : $\lim_{t\to+\infty} e^{-kt} = 0$, et donc :

$$\lim_{t\to+\infty} Q(t) = \frac{A}{k}.$$

Interprétation :
La quantité d'antibiotique dans le sang augmente au cours du temps et tend vers une valeur limite finie constante égale à A/k.

2. a. On prend la minute comme l'unité de temps :

$$Q(60) = \frac{A}{k}(1 - e^{-60k}) = \frac{A}{2k} \Leftrightarrow 1 - e^{-60k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-60k} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{60}.$$

b. La valeur limite est donnée par :

$$\frac{A}{k} = \frac{60A}{\ln 2}.$$

On souhaite que cette quantité soit égale à 80 mg. Donc :

$$\frac{60A}{\ln 2} = 80 \Leftrightarrow A = \frac{80}{60} \times \ln 2 = \frac{4}{3}\ln 2$$

Soit, au centième près : $A = 0{,}92$ mg/min.

c. La valeur limite est atteinte à 1 mg près lorsque $Q(t) = 79$.
On sait que $A/k = 80$, d'où :

$$Q(t) = 80\left(1 - e^{\frac{\ln}{60}t}\right) = 79 \Leftrightarrow 1 - e^{\frac{\ln 2}{60}t} = \frac{79}{80} \Leftrightarrow e^{\frac{\ln 2}{60}t} = \frac{1}{80} \Leftrightarrow t = 60 \times \frac{\ln 80}{\ln 2} = 379{,}3 \text{ min}$$

Donc il faut environ 6h 19 min pour que la quantité limite soit atteinte à 1 mg près.

Exercice 11

Une *exsanguino-transfusion* peut se schématiser de la façon suivante : un récipient R contient un liquide L dans lequel se trouve une substance S dont on veut diminuer la concentration. Le volume de R est de p litres (genre le corps humain …) et la concentration initiale de S est de a gramme par litre dans L.

1. *Première méthode (le modèle continu) :*
   On injecte dans R de manière continue du liquide L ne contenant pas la substance S et on prélève simultanément la même quantité de mélange par un tuyau de sortie de sorte que le volume de liquide dans R reste constant. Les tuyaux d'arrivée et de sortie ont des débits de d litres par heure.
   On note $m(t)$ la quantité de S dans L au bout du temps t et $C(t)$ sa concentration.

   a. Montrer que $m(t+h)-m(t)=-dhC(t)$; en déduire que $m'(t)=-dC(t)$ puis que :
   $$C'(t)=-\frac{d}{p}C(t)(E).$$
   b. Démontrer que l'unique solution de (E) est :

   Prof. Sidi MAJOR
   $$C(t)=a.exp\left(-\frac{d}{p}t\right).$$
   c. Au bout de combien de temps la concentration de S est-elle inférieure à $5\ \%$ de sa valeur initiale ?
   d. Cette méthode permet-elle d'éliminer complètement S ?
2. *Deuxième méthode (le modèle discret) :*
   Toutes les minutes on prélève dans R un pourcentage fixe q de mélange que l'on remplace par la même quantité de L ne contenant pas S. A la minute n on appelle m_n la masse de S restant dans R et C_n sa concentration.
   a. Exprimer en fonction de n et des autres paramètres la masse Δm_n de S prélevée à la minute n.
   b. Exprimer m_{n+1} en fonction de m_n puis C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire C_n en fonction des paramètres n, a, p et q.
   c. Au bout de combien de minutes la concentration de S est-elle inférieure à $5\ \%$ de sa valeur initiale ?
   d. En posant $n=60t$ donner une expression de C_n. Comparer au résultat du 1.

Corrigé

1. *Première méthode (le modèle continu) :*
   On note $m(t)$ la quantité de S dans L au bout du temps t et $C(t)$ sa concentration.
   a. Pendant la durée h la quantité m de S passe de $m(t)$ à $m(t+h)$; la différence entre les deux est ce qui est sorti pendant ce laps de temps, soit
   Volume sorti x *concentration* = *débit* x *temps* x *concentration*,

   On a donc bien $m(t+h)-m(t)=-dhC(t)$; divisons tout par h :
   $$\frac{m(t+h)-m(t)}{h}=-dC(t)$$
   Passons à la limite quand h tend vers 0 : $m'(t)=-dC(t)$.
   Par ailleurs à un instant t donné on a :
   $$m(t)=pC(t)\quad\Rightarrow\quad m'(t)=pC'(t)=-dC(t)$$
   D'où :
   $$C'(t)=-\frac{d}{p}C(t)$$
   b. D'après le cours, on a :
   $$C(t)=k.exp\left(-\frac{d}{p}t\right)$$
   comme $C(0)=a$, on en déduit que $k=a$ et puis :
   $$C(t)=a.exp\left(-\frac{d}{p}t\right)$$
   c. On cherche t de sorte que $C(t)\le 0{,}05a$:
   $$C(t)\le 0{,}05a\quad\Leftrightarrow\quad a.exp\left(-\frac{d}{p}t\right)\le 0{,}05a$$
   $$\Leftrightarrow\quad exp\left(-\frac{d}{p}t\right)\le 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{d}{p}t \leq \ln 0{,}05$$
$$\Leftrightarrow \quad t \geq -\frac{p\ln 0{,}05}{d}$$

d. Pour éliminer complètement S il faudrait que $C(t)$ s'annule à un moment, ce qui est impossible.Mais au bout d'un certain temps la quantité restante de S devient tellement faible que l'on peut considérer qu'il n'y en a plus.

2. *Deuxième méthode (le modèle discret) :*
Toutes les minutes on prélève dans R un pourcentage fixe q de mélange que l'on remplace par la même quantité de L ne contenant pas S.

a. At $= 0$ on a : $m_0 = ap$, à $t = 1$ on a : $m_1 = m_0 - qm_0 = ap(1-q)$, puis de minute en minute on multiplie par$1-q$, ce qui donne$m_n = ap(1-q)^n$.

b. Il ressort de la question précédente que :
$$m_{n+1} = (1-q)m_n \ ; \quad C_{n+1} = (1-q)C_n$$
Quant à la concentration, elle vaut :
$$C_n = \frac{1}{p}m_n(t) = a(1-q)^n.$$

c. On a :
$$C_n < 0{,}05C_0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-q)^n < 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad n.\ln(1-q) < \ln 0{,}05 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln 0{,}05}{\ln(1-q)}.$$
Donc après $T = E(\ln(0{,}05)\,/\ln(1-q)) + 1$ minutes, la concentration devient inférieure à $5\,\%$ de sa valeur intiale.

d. Avec $n = 60t$, on a$C_n = a(1-q)^{60} \ = a.exp(60t\ln(1-q)) = a.\exp\,(kt)$ où $k = 60\ln(1-q) = \ln(1-q)^{60}$
Pour que les deux modèles soient semblables il faut donc que :
$$\ln[(1-q)^{60}] = -\frac{d}{p}$$
ou encore :

Prof. Sidi MAJOR

$$q = 1 - exp\left(-\frac{d}{60p}\right)$$
Application numérique : $p = 5\,l$, $d = 0{,}1\,l/mn$, on a alors $q = 0{,}03\,\%$, pour le premier cas t supérieur à 150 mn, pour le deuxième cas n supérieur à 8987 secondes, soit t supérieur à 150 mn.

Uniquement pour la Terminale C

Exercice 12

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = x^2e^x$.

1. **Montrer qu'il existe une solution particulière z de la forme $z(x) = P(x).e^x$ où P est un polynôme du troisième degré.**
2. **On pose $u = y - z$. Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, $u'' + u' - 2u = 0$.**
3. **En déduire l'intégrale générale de l'équation (E).**

Corrigé

Soit l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = x^2e^x$.

1. Montrer qu'il existe une solution particulière z de la forme $z(x) = P(x).e^x$ où P est un polynôme du 3e degré.
Posons $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
$$z \in S_{(E)} \quad \Leftrightarrow \quad z'' + z' - 2z = x^2e^x$$
Or, on sait que : $z'(x) = P'(x).e^x + P(x).e^x$
$$z''(x) = P''(x).e^x + P'(x).e^x + P'(x).e^x + P(x).e^x = P''(x).e^x + 2P'(x).e^x + P(x).e^x$$

D'où : $z'' + z' - 2z = x^2e^x \Leftrightarrow P''(x).e^x + 3P'(x).e^x = x^2e^x$

$\Leftrightarrow P''(x) + 3P'(x) = x^2$ car $e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Or on sait que : $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ et $P''(x) = 6ax + 2b$ et donc :

$$(6ax + 2b) + 3(3ax^2 + 2bx + c) = x^2$$

Soit : $9ax^2 + (6a + 6b)x + (2b + 3c) = x^2$ et en procédant à une identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} 9a = 1 \\ 6a + 6b = 0. \\ 2b + 3c = 0 \end{cases}$$

On trouve facilement :

$$a = \frac{1}{9}, \qquad b = -\frac{1}{9}, \qquad c = \frac{2}{27}, \qquad d \in \mathbb{R}.$$

Enfin : $P(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{27}x$ en prenant $d = 0$.

Prof. Sidi MAJOR

2. On pose $u = y - z$. Montrons que $y \in S_{(E)} \Leftrightarrow u'' + u' - 2u = 0$.
   On a : $y = u + z$ et $y \in S_{(E)} \Leftrightarrow y'' + y' - 2y = x^2e^x$.
   Or $y' = u' + z'$ et $y'' = u'' + z''$, d'où : $y \in S_{(E)} \Leftrightarrow (u'' + z'') + (u' + z') - 2(u + z) = x^2e^x$
   D'autre part, on sait que $z'' + z' - 2z = x^2e^x$, ce qui nous amène à l'égalité : $u'' + u' - 2u = 0$.
3. L'équation $u'' + u' - 2u = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + r - 2 = 0$ qui admet deux solutions réelles $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Donc les solutions de l'équation différentielle $u'' + u' - 2u = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   Donc d'après la question 2, les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
   $$y(x) = u(x) + z(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{27}x\right)e^x; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 13

1. On considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - xy' + y = 0$.

a. Soit z une fonction deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$. Démontrer que xz est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de l'équation (E') : $xz' = A$ $(A \in \mathbb{R})$.

b. Résoudre (E') puis (E).

2. Résoudre par la même méthode sur $]-\infty; 0[$:

$$y' = \frac{x + y}{x}.$$

Corrigé

1. a. On a :

$$xz \in S_{(E)} \Leftrightarrow x^2(xz)'' - x(xz)' + xz = 0$$

Or on sait, la variable étant x, que

$$(xz)' = z + xz'$$
$$(xz)'' = (z + xz')' = z' + z' + xz'' = 2z' + xz''$$

Donc :

$$x^2(xz)'' - x(xz)' + xz = x^2(2z' + xz'') - x(z + xz') + xz = x^3z'' + x^2z' = x^2(xz'' + z')$$

D'où :

$$xz \in S_{(E)} \Leftrightarrow x^2(xz'' + z') = 0$$

Comme $x \in]0; +\infty[$ alors $x^2 \neq 0$ et par suite :

$$xz \in S_{(E)} \Leftrightarrow xz'' + z' = 0$$

D'autre part, on remarque que $xz'' + z' = (xz')'$ et par conséquent :

$$xz \in S_{(E)} \Leftrightarrow (xz')' = 0 \Leftrightarrow xz' = A; \quad A \in \mathbb{R}.$$

b. Résolution de l'équation (E) :

On vient de démontrer l'équivalence : $xz \in S_{(E)} \Leftrightarrow z \in S_{(E')}$.

Or, x étant strictement positif, on sait que :

$$xz' = A \Leftrightarrow z' = \frac{A}{x} \Leftrightarrow z = A\ln x + B; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par:

$$f(x) = xz = Ax\ln x + Bx; \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2. On a :

$$y' = \frac{x+y}{x} \iff xy' - y = x \iff \frac{xy' - x'y}{x^2} = \frac{1}{x} \iff \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{x}$$

D'où, x étant dans $]-\infty; 0[$:

$$y = x\ln(-x) + Ax; \ \ A \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14

Soit E l'ensemble des fonctions numériques f deux fois dérivables sur $]0; +\infty[$ telles que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \ x^2 f''(x) - xf'(x) - 3f(x) = 0 \ .$$

1. **Soit f une fonction numérique deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et g la fonction définie par :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(e^x).$$

Montrer que : $f \in E \iff \forall x \in \mathbb{R}, \ g''(x) - 2g'(x) - 3g(x) = 0.$

2. **a. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = 0.$** Prof. Sidi MAJOR

b. En déduire l'ensemble E.

Corrigé

1. Établissement de l'équivalence $f \in E \iff g''(x) - 2g'(x) + 3g(x) = 0$:

La fonction g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction $x \mapsto e^x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $]0; +\infty[$ et f est deux fois dérivable sur cet intervalle.

De l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}, \ g(x) = f(e^x)$, on tire :

$$g'(x) = e^x f'(e^x)$$
$$g''(x) = e^x f'(e^x) + (e^x)^2 f''(e^x) = g'(x) + (e^x)^2 f''(e^x)$$

Donc :

$$g''(x) - g'(x) = (e^x)^2 f''(e^x)$$

On sait que : $f \in E \iff \forall x \in]0; +\infty[, \ x^2 f''(x) = xf'(x) - 3f(x) = 0$, d'où en remplaçant x par $e^x > 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^x)^2 f''(e^x) = e^x f'(e^x) - 3f(e^x)$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R},, \quad g''(x) - g'(x) = g'(x) - 3g(x)$$

Soit finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},, \quad g''(x) - 2g'(x) - 3g(x) = 0.$$

2. **a.** Résolution de l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = 0$:

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r - 3 = 0$ dont les solutions sont (-1) et 2. Donc l'intégrale générale de l'équation différentielle $y'' - 2y' - 3y = 0$ est : $x \mapsto Ae^{-x} + Be^{3x}, \ A, B \in \mathbb{R}.$

b. Déduction de E :

D'après les questions précédentes, on sait que :

$f \in E \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) - 2g'(x) - 3g(x) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(e^x) = Ae^{-x} + Be^{3x}; \ A, B \in \mathbb{R}.$

La fonction f n'étant définie que sur $]0; +\infty[$ et que e^x décrit $]0; +\infty[$ alors on peut conclure par aménagement de la variable et tenant compte de l'égalité $e^{-x} = 1/e^x$ que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f(x) = \frac{A}{x} + Bx^3; \ \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Exercice 15

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et a un réel donné. Soit l'équation différentielle :

$$(E): \ y' + ay = \frac{f}{u}$$

où u est la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \ u(x) = e^{ax}$.

1. **Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.**
Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $(yu)' = f$.
2. **En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :**

$$x \ \mapsto \ e^{-ax}\int_0^x f(t)dt + \alpha e^{-ax}.$$

3. **Résoudre les équations différentielles :**
   - **a.** $y' + 2y = e^{-2x}$
   - **b.** $y' - y = (x^2 + 2x - 3)e^x$
   - **c.** $y' + ay = e^{bx}$
   où b est un réel non nul $(a + b \neq 0)$

Corrigé

1. Établissement de l'équivalence $y \in S_{(E)} \iff (yu)' = f$:

On a : $(yu)' = f \iff y'u + yu' = f$, et comme $u'(x) = ae^{ax} = au(x)$ alors :

$$(yu)' = f \iff y'u + ayu = f \iff y' + ay = \frac{f}{u}.$$

Prof. Sidi MAJOR

2. Déduction des solutions de (E) :

Selon la question précédente, y est une solution de (E) si, et seulement si, yu est une primitive de f.
Soit F la primitive de f qui s'annule en 0. On sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = \int_0^x f(t)dt$$

Donc y est une solution de (E) si, et seulement si, il existe un réel α tel que $yu = F + \alpha$, c'est-à-dire :

$$y = \frac{F}{u} + \frac{\alpha}{u}.$$

Donc les solutions de (E) sont les fonctions définies par :

$$x \longmapsto e^{-ax}\int_0^x f(t)dt + \alpha e^{-ax}; \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

3. a. Résolution de l'équation $y' + 2y = e^{-2x}$:

L'équation différentielle $y' + 2y = e^{-2x}$ peut s'écrire sous la forme :

$$y' + ay = \frac{f}{u}$$

avec $a = 2$, $u(x) = e^{2x}$ et $f(x) = 1$. Donc les solutions sont les fonctions :

$$x \longmapsto e^{-2x}\int_0^x dt + \alpha e^{-2x} = xe^{-2x} + \alpha e^{-2x}; \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

b. Résolution de l'équation $y' - y = (x^2 + 2x - 3)e^x$:

L'équation différentielle $y' - y = (x^2 + 2x - 3)e^x$ peut s'écrire sous la forme :

$$y' + ay = \frac{f}{u}$$

avec $a = -1$, $u(x) = e^{-x}$ et $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Donc les solutions sont les fonctions :

$$x \longmapsto e^x\int_0^x (t^2 + 2t - 3)dt + \alpha e^x = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right)e^x + \alpha e^x; \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

c. Résolution de l'équation $y' + ay = e^{bx}$:

L'équation différentielle $y' + ay = e^{bx}$ peut s'écrire sous la forme :

$$y' + ay = \frac{f}{u}$$

avec $u(x) = e^{ax}$ et $f(x) = e^{(a+b)x}$. Donc les solutions sont les fonctions :

$$x \longmapsto e^{-ax}\int_0^x e^{(a+b)t}dt + \alpha e^{-ax} = \frac{1}{a+b}e^{bx} + \alpha e^{-ax}; \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 16

1. **Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y = 0$ ①.**
2. **On considère la fonction g deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction f telle que :**

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = x.g\left(\frac{1}{x}\right)$$

Montrer que f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f''(x)$ en fonction de $g''(1/x)$.

3. **On considère l'équation différentielle : $y'' = -\frac{1}{x^4}.y$ ②**

Montrer que la fonction g est solution de ② si et seulement si f est solution de l'équation ①.

4. **En déduire les solutions de ② sur $]0, +\infty[$ puis sur $]-\infty, 0[$.**
5. **Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale $I = \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$.:**

Corrigé

1. Résolution de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$ ① :

L'équation caractéristique étant $r^2 + 1 = 0$ (deux solutions complexes i et $-i$) alors les solutions de l'équation ① sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $y(x) = A\cos x + B\sin x$; où $A, B \in \mathbb{R}$.

2. La fonction f peut s'écrire, pour tout réel x non nul, $f(x) = x.g \circ h(x)$ où $h(x) = 1/x$. Comme les fonctions $x \longmapsto g(x)$, $x \longmapsto h(x)$ et $x \longmapsto x$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^*$ alors f l'est aussi sur $\mathbb{R}^*$.
D'autre part, on a :

$$f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)g'\left(\frac{1}{x}\right) = g\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}g'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)g\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}g'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)g''\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc finalement :

$$f''(x) = \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)$$

Prof. Sidi MAJOR

3. Soit g une solution de ② c'est-à-dire que :

$$g''(x) = -\frac{1}{x^4}g(x).$$

Comme $f(x) = xg(1/x)$ alors :

$$f''(x) = \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^3}\left(-x^4 g\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -xg\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f''(x) + f(x) = 0$, et donc f est solution de ①.
Réciproquement : Soit f une solution de ①, et soit g la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right).$$

On sait que dans ces conditions, on a :

$$f''(x) = \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \frac{1}{x^3}g''\left(\frac{1}{x}\right) + xg\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g''\left(\frac{1}{x}\right) = -x^4 g\left(\frac{1}{x}\right)$$

et par suite la fonction g est solution de ②.

4. Résolution de l'équation différentielle ② :
On sait déjà que toute solution f de l'équation ① est de la forme : $f(x) = A\cos x + B\sin x$, $A, B \in \mathbb{R}$, et que toute solution g de l'équation ② est liée à une solution f de l'équation ① par la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$$

Soit en remplaçant x par $1/x$:

$$g(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = x\left[A\cos\left(\frac{1}{x}\right) + B\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

5. Calcul de l'intégrale I :
On pose pour $x > 0$:

$$g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a :

$$g'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \ ; \qquad g''(x) = -\frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc :

$$g''(x) = -\frac{1}{x^3}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^4}\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{1}{x^4}g(x)$$

On remarque donc que :

$$I = \int_{1/\pi}^{2/\pi} -g''(x)dx = [-g'(x)]_{1/\pi}^{2/\pi} = \left[\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]_{1/\pi}^{2/\pi} = \pi - 1.$$

𝔈xercice 17

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions f deux fois dérivables sur $]0;\,+\infty[$ telles que :

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Prof. Sidi MAJOR

1. Soit f un élément de $\mathcal{F}$ et g la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(e^x)$.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$: $x^2 f''(x) + f(x) = 0$.

b. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) : $y'' - y' + y = 0$.

2. Déterminer alors l'ensemble $\mathcal{F}$.

ℭorrigé

1. Soit f un élément de $\mathcal{F}$ et x un réel strictement positif.

a. On a : $f'(x) = f(1/x)$ et par suite :

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $f'(1/x) = f(x)$ alors :

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} f(x)$$

Finalement : $x^2 f''(x) + f(x) = 0$.

b. Soit x un réel. On a : $g(x) = f(e^x)$, et donc : $g'(x) = e^x f'(e^x)$, et par suite :

$$g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(x)$$

Comme $x^2 f''(x) + f(x) = 0$ alors $e^{2x} f''(e^x) + f(e^x) = 0$, et par suite :

$$g''(x) = e^x f'(e^x) - f(e^x) = g'(x) - g(x)$$

Donc g est solution de l'équation (E) : $y'' - y' + y = 0$.

Résolution de l'équation (E) :

L'équation caractéristique de l'équation différentielle (E) est $r^2 - r + 1 = 0$. Elle admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \quad ; \quad r_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Donc les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right) e^{\frac{x}{2}} \ ; \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Détermination de l'ensemble $\mathcal{F}$:

Soit f un élément de $\mathcal{F}$. D'après la question 1, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(e^x)$ est une solution de l'équation différentielle (E).

On pose $e^x = X$; on sait que $X > 0$ et $x = \ln X$. Ainsi, on a :

$$\forall X \in\,]0;\,+\infty[, \qquad f(X) = g(\ln X)$$

Soit encore :

$$\forall X \in\,]0;\,+\infty[, \qquad f(X) = \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln X\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln X\right)\right) e^{\frac{\ln X}{2}} \ ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$\forall X \in\,]0;\,+\infty[, \qquad f(X) = \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln X\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln X\right)\right) \sqrt{X} \ ; \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Or on sait que :

$$\forall x \in\,]0;\,+\infty[, \qquad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$$

En prenant $x = 1$ dans cette dernière égalité, on obtient $f'(1) = f(1)$, ce qui donne :

$$\mu = \lambda\sqrt{3}$$

Donc les éléments de $\mathcal{F}$ sont les fonctions f définies sur $]0;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda\left(\sqrt{3} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln x\right)\right) \sqrt{x}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

.