Équations différentielles

Toute équation entre une fonction f inconnue et ses dérivées successives

Équation différentielle linéaire du 1er ordre

Définition

Une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants sans second membre est toute équation de la forme :

$$\boldsymbol{ay' + by = 0}\text{, avec } a \neq 0 \text{ et } b \in \mathbb{R}.$$

Elle se ramène à la forme : $\boldsymbol{y' = -\frac{b}{a}y}$.

Résolution

- *L'ensemble des solutions de l'équation :* $\boldsymbol{ay' + by = 0}$ *est :*

$$\boldsymbol{\mathcal{S} = \left\{ f_k(x) = ke^{-\frac{b}{a}x}, \text{où } k = cte \text{ réelle} \right\}}$$

- ***Condition initiale :*** *Pour* x_0 *et* y_0 *fixés dans* $\mathbb{R}$, *il existe une seule solution f telle que* $f(x_0) = y_0$. *Elle est définie par :*

$$\boldsymbol{f(x) = y_0 e^{-\frac{b}{a}(x - x_0)}}$$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle : $2y' - 5y = 0$.

Déterminer la solution f vérifiant $f(-2) = 3$.

Corrigé

L'équation s'écrit aussi : $y' = \frac{5}{2}y$. *Donc les solutions de cette équation sont les fonctions f définies sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = ke^{\frac{5}{2}x}$, *où k est une constante réelle.*

On a : $f(-2) = 3 \Leftrightarrow ke^{-5} = 3 \Leftrightarrow k = 3e^5$.

D'où : $f(x) = 3e^5 e^{\frac{5}{2}x} = 3e^{\frac{5}{2}(x+2)}$.

Jacopo Riccati (1676 – 1754)

Jacopo Riccati est un mathématicien et physicien italien, très connu notamment pour ses travaux en hydraulique qui aidèrent à construire des digues le long des canaux de Venise et donc à prévenir les inondations. Ces travaux en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre.

Il est aussi le père de Vincenzo Riccati et de Giordano Riccati, qui poursuivirent et développèrent ses travaux.

Équation différentielle linéaire du 2ème ordre

Définition

Une équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants sans second membre est toute équation de la forme : $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$, *avec* $a \neq 0$ *et* $b, c \in \mathbb{R}$.

Remarques : *Toute combinaison linéaire de deux solutions est aussi une solution.*

L'équation $\boldsymbol{ar^2 + br + c = 0}$ *est l'équation caractéristique de l'équation différentielle.*

Résolution

Les solutions de $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$ *s'expriment à l'aide des racines* r_1 *et* r_2 *de son équation caractéristique* $ar^2 + br + c = 0$.

- *Si* $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac} > 0$ *alors* r_1 *et* r_2 *sont réelles et :* $\boldsymbol{\mathcal{S} = \{\lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \text{où } \lambda, \mu \text{ ctes réelles}\}}$.
- *Si* $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$ *alors* $r_1 = r_2$ *réel et :* $\boldsymbol{\mathcal{S} = \{(\lambda x + \mu)e^{r_1 x}, \text{où } \lambda, \mu \text{ ctes réelles}\}}$.
- *Si* $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac} < 0$ *alors* r_1 *et* r_2 *complexes conjuguées :* $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ *et :*

$$\boldsymbol{\mathcal{S} = \{e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x), \text{où } \lambda, \mu \text{ ctes réelles}\}}.$$

Conditions initiales : *Dans tous les cas, il existe une seule solution f, vérifiant les deux conditions :*

$$f(x_0) = y_0 \text{ et } f'(x_1) = y_1 (x_0, y_0, x_1, y_1 \text{ étant des réels})$$

Exemples

Résoudre :

$$\boldsymbol{4y'' - 4y' + y = 0}$$

avec $\boldsymbol{f(0) = -3}$ ***et*** $\boldsymbol{f'(0) = 2}$.

Corrigé

Eq. caract. : $4r^2 - 4r + 1 = 0$. *Elle admet une solution double* $r = \frac{1}{2}$.

Donc l'intégrale générale est :

$$f(x) = (\lambda x + \mu)e^{\frac{1}{2}x}$$

On sait que :

$$f'(x) = \lambda e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}(\lambda x + \mu)e^{\frac{1}{2}x} = \ldots$$

Donc les conditions initiales :

$$f(0) = -3 \text{ et } f'(0) = 2$$

donne : $\mu = -3$ *et* $\frac{\mu}{2} + \lambda = 2$ *soit finalement :* $\mu = -3$ *et* $\lambda = \frac{7}{2}$.

Donc : $f(x) = \left(\frac{7}{2}x - 3\right)e^{\frac{1}{2}x}$.

Résoudre :

$$\boldsymbol{y'' - 5y' + 6y = 0}$$

avec $\boldsymbol{f(0) = 0}$ ***et*** $\boldsymbol{f'(0) = 6}$.

Corrigé

Eq. caract. : $r^2 - 5r + 6 = 0$. *Elle admet deux solutions réelles 2 et 3.*

Donc l'intégrale générale de l'équation différentielle est :

$$f(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$$

avec λ *et* μ *des constantes réelles.*

Les conditions initiales donnent :

$$\mu = 6 \text{ et } \lambda = -6.$$

Enfin :

$$f(x) = -6e^{2x} + 6e^{3x}.$$

Résoudre :

$$\boldsymbol{y'' - 4y' + 5y = 0}$$

avec $\boldsymbol{f(0) = -1}$ ***et*** $\boldsymbol{f'(0) = 3}$.

Corrigé

Eq. caract. : $r^2 - 4r + 5 = 0$. *Elle admet deux solutions complexes conjuguées* $2 + i$ *et* $2 - i$.

Donc l'intégrale générale de l'équation différentielle est :

$$f(x) = e^{2x}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$$

avec λ *et* μ *des constantes réelles.*

Les conditions initiales donnent :

$$\mu = 5 \text{ et } \lambda = -1.$$

Enfin :

$$f(x) = e^{2x}(-\cos x + 5 \sin x).$$