Professeur Sidi MAJOR

CHAPITRE

6 Équations différentielles

Jacopo Riccati
(1676-1754)

Des maths partout !

Les équations différentielles servent à modéliser de nombreux phénomènes en physique, en biologie, en chimie, en démographie, en agriculture, … :

- La croissance d'une population ;
- L'évolution d'une population de micro-organismes ;
- L'évolution d'un système dynamique ;
- Étudier les modèles d'interaction entre espèces animales vivant dans un même espace (modèle de Lotka-Volterra) ;
- Les systèmes de drainage de l'eau ;
- …

Les notions du chapitre

Ce qu'il faut savoir

1 Introduction - Généralités

a. Notion d'équation différentielle

Définition On appelle équation différentielle toute équation entre une fonction f inconnue et ses dérivées successives f', f'', f''', … On note souvent y pour f, y' pour f', y'' pout f'', …

Exemples - Vocabulaire

Les relations suivantes où y est une fonction sont des équations différentielles :
① $y' = 2x^2$; ② $2y' - 3y = 0$; ③ $2y' - 3y = 5x$; ④ $2y'' + xy' + 3y = -x + 2$; ⑤ $y''' + y = 0$;
⑥ $2y'' - 5y' + 3y = 0$; ⑦ $2y'' - 5y' + (3x + 1)y = x^3$; ⑧ $y''' - 2y'' + 5y' - y = 3x^2 + 7x - 8$.

- Une équation différentielle est dite **d'ordre n** si le plus haut ordre de dérivation figurant dans l'équation est **n** :

①, ②, ③ sont d'ordre 1 ; ④, ⑥, ⑦ sont d'ordre 2 ; ⑤ et ⑧ sont d'ordre 3.

- Une équation différentielle est dite **homogène** (ou parfois **sans second membre**) si son second membre est nul :

①, ②, ⑤, ⑥ sont des équations différentielles homogènes tandis que les équations ③, ④, ⑦, ⑧ ne sont pas homogènes.

Prof. Sidi MAJOR

③ $2y' - 3y = 5x$ est une équation différentielle non homogène et ② $2y' - 3y = 0$ est son **équation différentielle homogène associée** (on annule le second membre).

- Toutes ces équations sont à coefficient constants sauf les équations ④ et ⑦ :

Dans ④, le coefficient de y' est x ; dans ⑦, le coefficient de y est $3x + 1$.

- Toutes ces équations sont **linéaires** c'est-à-dire que y, y', y'', … figurent dans une combinaison linéaire ; ce n'est pas le cas pour l'équation $2y''y - 3y' = 0$ où y et y'' figurent dans un produit.
- **Intégrer** (ou **résoudre**) une équation différentielle sur un intervalle ouvert I c'est déterminer toutes les solutions sur I de cette équation.
- La fonction $g : x \longmapsto e^{2x}$ est une solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ sur $\mathbb{R}$. La courbe représentative de la solution g est appelée **courbe intégrale** de cette équation différentielle. Toutes les courbes intégrales d'une même équation différentielle se déduisent les unes des autres par translations verticales.

b. Équations de types ①: $y' = f(x)$ et ②: $y'' = f(x)$

Exemples

- **Équations de type ① : $y' = f(x)$**

1. Intégrer sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' = -4x^3 + 1$.
2. Déterminer la solution g de (E) qui vérifie $g(2) = -3$.

Solution :

1. Une primitive de la fonction : $x \longmapsto -4x^3 + 1$ est la fonction : $x \longmapsto -x^4 + x$. Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont les fonctions : $x \longmapsto -x^4 + x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
2. Si g est une solution de (E) alors on a : $g(2) = -3 \iff -2^4 + 2 + k = -3 \iff k = 11$.
Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de (E) qui vérifie $g(2) = -3$ est la fonction : $x \longmapsto -x^4 + x + 11$.

- **Équations de type ② : $y'' = f(x)$**

1. Intégrer sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' = 6x$.
2. Déterminer la solution g de (E) qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = 1$.

Solution :

1. On a : $y \in (E) \iff y' = 3x^2 + k_1$ $(k_1 \in \mathbb{R}) \iff y = x^3 + k_1x + k_2$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$.
2. $\begin{cases} g(0) = 2 \\ g'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} k_2 = 2 \\ k_1 = 1 \end{cases}$

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de (E) qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = 1$ est la fonction :

$$x \longmapsto 3x^3 + x + 2.$$

Résoudre des équations de types ①: $y' = f(x)$ et ②: $y'' = f(x)$

Exemples corrigés

Énoncé 1 Classer les équations différentielles suivantes :

① $2y'' - 5y = 3$; ② $y' + 3xy = 0$; ③ $y''' + 2y'' - y = 0$; ④ $3y' - 4y = 7$

⑤ $3y'' + 2y' - 8y = 2x$; ⑥ $(x+1)y'' + y' - xy = 0$; ⑦ $2yy' + e^x y'' = 0$; ⑧ $y^2 - y' = 2x$.

Solution

① : Équation différentielle linéaire du second ordre non homogène à coefficients constants ;

② : Équation différentielle linéaire du 1er ordre homogène à coefficients variables ;

③ : Équation différentielle linéaire du 3e ordre homogène à coefficients constants ;

④ : Équation différentielle linéaire du 1er ordre non homogène à coefficients constants ;

Prof. Sidi MAJOR

⑤ : Équation différentielle linéaire du second ordre non homogène à coefficients constants ;

⑥ : Équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients variables ;

⑦ : Équation différentielle non linéaire du second ordre homogène à coefficients variables ;

⑧ : Équation différentielle non linéaire du 1er ordre non homogène à coefficients constants.

Énoncé 2 Dans chacun des cas suivants, résoudre sur l'intervalle I l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant la (ou les) condition(s) initiale(s) donnée(s) :

a. $xy' + 1 = 0$; $I =]-\infty; 0[$; $y(-e) = 2$;

b. $2y'e^{-x} = e^{x-1} + e^{x+1}$; $I = \mathbb{R}$; $y(0) = e$;

c. $y'' = 1 + \tan^2 x$; $I =]-\pi/4; \pi/4[$; $y(0) = y'(0) = 1$;

Solution

a. $xy' + 1 = 0 \Leftrightarrow y' = -1/x \Leftrightarrow y = -\ln(-x) + k$ $(k \in \mathbb{R})$ car $x < 0$.

$y(-e) = 2 \Leftrightarrow -\ln(e) + k = 2 \Leftrightarrow -1 + k = 2 \Leftrightarrow k = 3$.

Donc la solution cherchée est la fonction : $x \longmapsto 3 - \ln(-x)$.

b. $2y'e^{-x} = e^{x-1} + e^{x+1} \Leftrightarrow 2y' = (e^{x-1} + e^{x+1})e^x = e^{2x-1} + e^{2x+1} \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x-1}+e^{2x+1}}{4} + k$ $(k \in \mathbb{R})$

$y(0) = e \Leftrightarrow \dfrac{e^{-1} + e}{4} + k = e \Leftrightarrow k = \dfrac{3e - e^{-1}}{4}$

Donc la solution cherchée est la fonction : $x \longmapsto \frac{e^{2x-1}+e^{2x+1}}{4} + \frac{3e-e^{-1}}{4}$.

c. $y'' = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow y' = \tan x + k_1$ $(k_1 \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow y = -\ln(\cos x) + k_1 x + k_2$ $(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$

$y(0) = y'(0) = 1 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = 1$.

Donc la solution cherchée est la fonction : $x \longmapsto -\ln(\cos x) + x + 1$.

Applications

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle :

1. $x^3 y' + x^2 + 1 = 0$; $I =]-\infty; 0[$;
2. $y' \tan 3x + 2 = 0$; $I =]0; \pi/6[$;
3. $y'\sqrt{x} - x - 2 = 0$; $I =]0; +\infty[$;
4. $y' + 3\ln x = 0$; $I =]0: +\infty[$.

Exercice 2 Dans chacun des cas suivants, résoudre l'équation différentielle et déterminer la solution vérifiant les conditions imposées :

1. $2y'' + e^{2x} - e^{-2x} = 0$; $I = \mathbb{R}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1/2$;
2. $\sin 2x + 2y'' = 0$; $I = \mathbb{R}$; $y(0) = 2, y'(0) = -1$;
3. $y'' = (x+1)e^x$; $I = \mathbb{R}$; $y(0) = y'(0) = e$.

2 Équation différentielle du type $ay' + by = 0$ $(a \neq 0)$

a. Résolution de l'équation

Définition - Théorème. On appelle équation différentielle linéaire du 1er ordre sans second membre (homogène) à coefficients constants, toute équation de la forme $ay' + by = 0$, où a et b sont deux nombres réels avec $a \neq 0$, et l'inconnue y est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto ke^{-\frac{b}{a}x}, \quad (k \in \mathbb{R})$$

- Pour tout couple $(x_0; y_0)$ de nombres réels, l'équation différentielle $ay' + by = 0$ admet une unique solution g sur $\mathbb{R}$ telle que $g(x_0) = y_0$.

Démonstration

- Notons $S_{(E)}$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : $ay' + by = 0$.

On remarque que $S_{(E)}$ n'est pas vide puisque :

$$a\left(e^{-\frac{b}{a}x}\right)' + be^{-\frac{b}{a}x} = a\left(-\frac{b}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}x} + be^{-\frac{b}{a}x} = -be^{-\frac{b}{a}x} + be^{-\frac{b}{a}x} = 0.$$

Prof. Sidi MAJOR

Donc la fonction : $x \longmapsto e^{-\frac{b}{a}x}$ est une solution de (E).

Soit y une solution quelconque de (E). On a les équivalences suivantes $(a \neq 0, e^{\frac{b}{a}x} \neq 0)$:

$$y \in S_{(E)} \Leftrightarrow y' + \frac{b}{a}y = 0 \Leftrightarrow (y)'e^{\frac{b}{a}x} + \frac{b}{a}e^{\frac{b}{a}x}y = 0 \Leftrightarrow (y)'e^{\frac{b}{a}x} + \left(e^{\frac{b}{a}x}\right)'y = 0 \Leftrightarrow \left[e^{\frac{b}{a}x}y\right]' = 0.$$

Donc on peut en déduire que : $y \in S_{(E)} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ e^{\frac{b}{a}x}y = k$.

En conclusion les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) sont les fonctions :

$$x \longmapsto ke^{-\frac{b}{a}x}, \quad (k \in \mathbb{R}).$$

- Soient x_0 et y_0 deux nombres réels. On se propose de déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) qui satisfont $y(x_0) = y_0$. On a :

$$y(x_0) = y_0 \Leftrightarrow ke^{-\frac{b}{a}x_0} = y_0 \Leftrightarrow k = y_0e^{\frac{b}{a}x_0} \Leftrightarrow y = y_0e^{\frac{b}{a}x_0}e^{-\frac{b}{a}x} = y_0e^{-\frac{b}{a}(x-x_0)}.$$

Donc la fonction : $g : x \longmapsto y_0e^{-\frac{b}{a}(x-x_0)}$ est l'unique fonction sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $g(x_0) = y_0$.

b. Exemple d'application

Exemple

Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre des microbes est la dérivée y' de cette fonction.

On a constaté que $y'(t) = ky(t)$, où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t = 0$.

1. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = ky$ telle que $y(0) = N$.
2. Sachant qu'au bout de deux heures le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N le nombre de microbes au bout de trois heures.
3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6 400 microbes au bout de cinq heures ?

Solution

1. $y(t)$ est de la forme $y(t) = Ce^{kt}$, avec C constante réelle. $y(0) = N$ impose $C = N$.
   D'où : $y(t) = Ne^{kt}$.
2. D'après l'énoncé, $y(2) = 4N$. Donc $Ne^{2k} = 4N$, ce qui donne $e^{2k} = 4$,
   d'où : $2k = ln4$ soit $k = ln\,2$. Donc enfin $y(t) = Ne^{(\ln 2)t} = N \times 2^t$.
   Au bout de 3 heures, le nombre de microbes est $y(3) = N \times 2^3 = 8N$.
3. D'après la question 2, on a : $y(t) = N \times 2^t$. Si $y(5) = 6\,400$ alors $N \times 2^5 = 6\,400$, soit $32N = 6\,400$, et donc $N = 200$.

Résoudre une équation différentielle du type $ay' + by = 0$

Exemples corrigés

Énoncé 1 La population de la Mauritanie était de 3 millions d'habitants en 2000 et de 4,2 millions habitants en 2010. On désigne par $h(t)$ le nombre de millions d'habitants à l'instant t. On suppose que la vitesse d'accroissement de la population est proportionnelle au nombre d'habitants.
Déterminer, dans ces conditions, en quelle année la population de la Mauritanie atteindra 10 millions d'habitants ? 20 millions d'habitants ?

Solution

Il a été dit dans l'énoncé que la vitesse d'accroissement de la population est la fonction dérivée de h et que $h' = ah$ $(a \in \mathbb{R})$. Donc h est nécessairement de la forme $h(t) = ke^{at}$ $(k \in \mathbb{R})$.
D'autre part, on sait que : $h(2000) = 3$ et $h(2010) = 4{,}2$. D'où :

$$h(2000) = 3 \iff ke^{2000a} = 3 \quad \text{et} \quad h(2010) = 4{,}2 \iff ke^{2010a} = 4{,}2$$

On en déduit par division que :

$$\frac{ke^{2010a}}{ke^{2000a}} = e^{10a} = \frac{4{,}2}{3} = \frac{7}{5}.$$

D'où : $a = (1/10) \times \ln(7/5)$.

Prof. Sidi MAJOR

Scan_me

La fonction h est donc solution de $h' = ah$ avec la condition initiale $h(2000) = 3 = ke^{200}$, d'où $k = 3e^{-2000a}$, et par suite $h(t) = 3e^{-2000a} \times e^{at} = 3e^{a(t-2000)}$.
L'année t où la population de la Mauritanie atteindra 10 millions d'habitants est telle que :

$$h(t) = 10 \iff 3e^{a(t-2000)} = 10 \iff a(t-2000) = \ln(10/3) \iff t = 2000 + \frac{\ln\left(\frac{10}{3}\right)}{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{7}{5}\right)} \approx 2035{,}78.$$

Donc la population de la Mauritanie atteindra 10 millions d'habitants en l'an 2036.
De manière analogue, on montre que la population atteindra 20 millions d'habitants en l'an 2056.

Énoncé 2 On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 8x^2 - 8x$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y' - 2y = 0$.
2. Déterminer un polynôme $P(x)$ solution de (E).
3. Démontrer que l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des solutions f_k définies par : $f_k(x) = ke^{2x} - 4x^2$ où k est réel quelconque.

Solution

1. (E_1) : $y' = 2y \iff y(x) = ke^{2x}$ $(k \in \mathbb{R})$. Les solutions de (E_1) sont les fonctions : $g_k : x \longmapsto ke^{2x}$.
2. Soit P un polynôme de degré n et $S_{(E)}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E).
$$P \in S_{(E)} \iff P'(x) - 2P(x) = 8x^2 - 8x$$
Donc le polynôme P est nécessairement de degré 2, et par suite $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des nombres réels. On a $P'(x) = 2ax + b$ et donc :
$$\begin{aligned} P \in S_{(E)} &\iff P'(x) - 2P(x) = 8x^2 - 8x \iff (2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = 8x^2 - 8x \\ &\iff -2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c = 8x^2 - 8x \end{aligned}$$
Par identification des coefficients, on obtient $a = -4$, $b = c = 0$.
Donc le polynôme $P(x) = -4x^2$ est solution de l'équation différentielle (E).
3. Soit f une solution quelconque de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 8x^2 - 8x$. On a :
$$f \in S_{(E)} \iff f'(x) - 2f(x) = 8x^2 - 8x \quad ①$$
$$P \in S_{(E)} \iff P'(x) - 2P(x) = 8x^2 - 8x \quad ②$$
D'où : $$① - ② \implies (f - P)'(x) - 2(f - P)(x) = 0 \implies f - P \in S_{(E_1)}$$
Donc pour tout réel x, $f(x) - P(x) = ke^{2x}$, et par suite $f(x) = ke^{2x} - 4x^2$.
Réciproquement, on vérifie que toute fonction : $x \longmapsto ke^{2x} - 4x^2$ est solution de (E).
Donc les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions :
$$f_k : x \longmapsto ke^{2x} - 4x^2 \quad (k \in \mathbb{R}).$$

3 Équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = 0$

a. Résolution de l'équation

Prof. Sidi MAJOR

Définition - Théorème. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre homogène (sans second membre) à coefficients constants toute équation de la forme $ay'' + by' + cy = 0$, où a, b, c sont des nombres réels avec $a \neq 0$, et l'inconnue y est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

- L'équation $ar^2 + br + c = 0$, d'inconnue réelle r, est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une seule solution réelle $r = -b/2a$, et les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto (Ax + B)e^{rx}, \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

- Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, et les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}, \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, et les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ sont les fonctions :

$$x \longmapsto e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x), \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

Démonstration

a) L'équation caractéristique a deux racines réelles

On suppose que l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$ admette deux racines réelles distinctes ou confondues r_1 et r_2, c'est-à-dire que $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.
On vérifie aisément que la fonction $x \longmapsto e^{r_1x}$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \quad ay'' + by' + cy = 0.$$

On définit la fonction z telle que pour tout réel x : $y(x) = z(x)e^{r_1x}$. La fonction : $x \longmapsto z(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme rapport de deux fonctions dérivables. On obtient successivement :
$y'(x) = z'(x)e^{r_1x} + r_1z(x)e^{r_1x}$
$y''(x) = z''(x)e^{r_1x} + 2r_1z'(x)e^{r_1x} + r_1^2z(x)e^{r_1x}$
La fonction y étant solution de l'équation (E), on peut écrire en substituant dans (E) :

$$[(az''(x) + 2ar_1z'(x) + ar_1^2z(x)) + (bz'(x) + br_1z(x)) + cz(x)]e^{r_1x} = 0$$

Or pour tous réels r_1 et x, $e^{r_1x} \neq 0$ donc : $az''(x) + (2ar_1 + b)z'(x) + (ar_1^2 + br_1 + c)z(x) = 0$.
Le réel r_1 étant racine de l'équation caractéristique, on a : $ar_1^2 + br_1 + c = 0$, d'où :

$$y \text{ est solution de } (E) \iff az''(x) + (2ar_1 + b)z'(x) = 0.$$

On envisage successivement les deux cas : $\Delta = 0$ et $\Delta > 0$.

- $\Delta = 0$: Dans ce cas $r_2 = r_1 = -b/2a$, d'où $2ar_1 + b = 0$. Donc :

$$y \text{ est solution de } (E) \iff az''(x) = 0.$$

Il existe donc deux constantes A et B telles que pour tout réel x, $z(x) = Ax + B$.
La solution générale de (E) s'écrit donc $y(x) = (Ax + B)e^{r_1x}$, où A et B sont deux nombres réels quelconques et r_1 la racine double de l'équation caractéristique.

- $\Delta > 0$: La fonction z est solution de l'équation : $az''(x) + (2ar_1 + b)z'(x) = 0$

Cette équation se ramène au 1er ordre en posant $T(x) = z'(x)$; on obtient :

$$aT'(x) + (2ar_1 + b)T(x) = 0.$$

Or on sait que $2ar_1 + b = 2ar_1 - a(r_1 + r_2) = a(r_1 - r_2)$, et comme $a \neq 0$ alors :

$$aT'(x) + (2ar_1 + b)T(x) = 0 \iff T'(x) = (r_2 - r_1)T(x) \iff T(x) = Ce^{(r_2-r_1)x}, (C \in \mathbb{R}).$$

Donc $z'(x) = Ce^{(r_2-r_1)x}$, et par suite, on obtient $z(x) = Be^{(r_2-r_1)x} + A$ avec $B = C/(r_2 - r_1)$.
Comme $y(x) = z(x)e^{r_1x}$ alors les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) sont les fonctions $x \longmapsto y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$, où A et B sont deux nombres réels quelconques.

Résoudre une équation différentielle du type $ay'' + by' + cy = 0$

Exemple corrigé

Énoncé On considère l'équation différentielle ① : $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 1$.

1. Déterminer une fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 solution de ①.
2. Montrer qu'une fonction f est solution de ① si, et seulement si, la fonction $g = f - P$ est solution de l'équation différentielle ② : $y'' - 3y' + 2y = 0$.
3. Résoudre l'équation ② puis en déduire l'ensemble des solutions de ①.
4. Déterminer la solution de l'équation différentielle ① dont la courbe représentative dans le plan muni d'un repère passe par le point $A(0;1)$ et y admet une tangente horizontale.

Solution

Prof. Sidi MAJOR

1. On pose $P(x) = ax^2 + bx + c$, alors $P'(x) = 2ax + b$ et $P''(x) = 2a$.
Si P est solution de ① alors : $2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 1$ pour tout réel x.
Soit encore : $2ax^3 + (2b - 6a)x + 2a - 3b + 2c = x^2 - 1$ pour tout réel x.
Donc, par identification des coefficients, on obtient :
$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b - 6a = 0 \\ 2a - 3b + 2c = -1 \end{cases} \quad \text{soit finalement} \quad \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/2 \\ c = 5/4 \end{cases}$$
Ainsi $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$.
2. Une fonction f est solution de ① si, et seulement si, $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = x^2 - 1$.
Comme P est solution de ① alors $x^2 - 1 = P''(x) - 3P'(x) + 2P(x)$.
Alors, f est solution de ① si, et seulement si :
$$f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = P''(x) - 3P'(x) + 2P(x)$$
$$f''(x) - P''(x) - 3\big(f'(x) - P'(x)\big) + 2\big(f(x) - P(x)\big) = 0$$
$$(f - P)''(x) - 3(f - P)'(x) + 2(f - P)(x) = 0$$
$$g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 0, \text{ en posant } f - P = g.$$
Donc f est solution de ① si, et seulement si, $g = f - P$ est solution de ②.

Scan_me

3. L'équation caractéristique associée à ② est $r^2 - 3r + 2 = 0$. Elle admet deux racines réelles 1 et 2. Donc les solutions de ② sont les fonctions $g : x \longmapsto Ae^x + Be^{2x}$ (A et B constantes).
D'après la question 2, les solutions de ① sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}.$$
4. Les conditions données se traduisent par :
La courbe passe par le point $A(0;1)$ signifie que $f(0) = 1$, ce qui donne : $A + B + 5/4 = 1$.
La courbe admet, au point $A(0;1)$, une tangente horizontale signifie $f'(0) = 0$, ce qui donne :
$$A + 2B + \frac{3}{2} = 0.$$
La résolution du système $\begin{cases} A + B = -1/4 \\ A + 2B = -3/2 \end{cases}$ donne $A = 1$ et $B = -5/4$. Ainsi, la fonction est :
$$f(x) = e^x - \frac{5}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}.$$

Applications

Exercice **1.** Dans chacun des cas, déterminer la solution qui vérifie la condition donnée :

a. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad f(0) = -3, \; f'(0) = 2$.
b. $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad f(0) = 0, \; f'(0) = 6$.
c. $y'' - 4y' + 5y = 0, \quad f(0) = -1, \; f'(0) = 3$.

2. En suivant le modèle de l'exemple corrigé, résoudre les équations différentielles suivantes :
$$y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2 \quad ①$$
$$y'' + 3y' - 2y = -6x + 1 \quad ②$$
$$y'' + 3y' - 2y = 9 \quad ③$$

b) L'équation caractéristique n'a pas de racine réelle

C'est le cas où $\Delta < 0$, donc l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. Comme dans le cas où $\Delta > 0$, les fonctions définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ par $y(x) = Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(Ae^{i\beta x} + Be^{-i\beta x}\right)$ sont formellement solutions de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ quels que soient les nombres complexes A et B. Recherchons parmi ces solutions celles qui prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R}$, pour cela faisons $y(0) \in \mathbb{R}$ et $y(\pi/2\beta) \in \mathbb{R}$.

Comme $y(0) = A + B$, pour que $y(0) \in \mathbb{R}$, il faut avoir $\mathcal{Im}(A) + \mathcal{Im}(B) = 0$. De la même manière pour que $y(\pi/2\beta) = e^{\alpha\pi/2\beta}(Ai - Bi) \in \mathbb{R}$, il faut que $(A - B)i \in \mathbb{R}$ autrement dit $A - B \in i\mathbb{R}$, ce qui se traduit par $\mathcal{Re}(A) = \mathcal{Re}(B)$. En combinant les deux conditions trouvées, on obtient $B = \overline{A}$, et donc $y(x) = e^{\alpha x}\left(Ae^{i\beta x} + \overline{A}e^{-i\beta}\ \right) = e^{\alpha x}\left(Ae^{i\beta x} + \overline{Ae^{i\beta x}}\right) = 2e^{\alpha x}\mathcal{Re}\left(Ae^{i\beta x}\right)$.

On sait que :

$$\mathcal{Re}\left(Ae^{i\beta x}\right) = \mathcal{Re}\left[\left(\mathcal{Re}(A) + i\mathcal{Im}(A)\right)(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right] = \mathcal{Re}(A)\cos\beta x - \mathcal{Im}(A)\sin\beta x$$

D'où : $y(x) = e^{\alpha x}(2\mathcal{Re}(A)\cos\beta x + (-2)\mathcal{Im}(A)\sin\beta x)$

C'est-à-dire $y(x) = e^{\alpha x}(\lambda\cos\beta x + \mu\sin\beta x)$ avec $\lambda = 2\mathcal{Re}(A)$ et $\mu = (-2)\mathcal{Im}(A)$, CQFD.

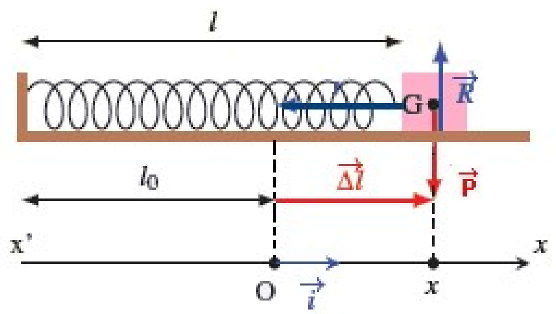
- Une autre démonstration de ce même cas sera développée dans la rubrique « **APPROFONDISSEMENTS** » de ce chapitre.

Prof. Sidi MAJOR

b. Exemple d'application : oscillateur mécanique libre

Énoncé : Un solide S de centre d'inertie G, de masse m, fixé à un ressort de raideur k coulissant sur une tige horizontale. On désigne par $x(t)$ la position de G dans le repère $(O; \vec{\imath})$ à l'instant t, O étant la position de G à l'équilibre.

On écarte S de sa position d'équilibre et on le lâche en lui donnant une vitesse initiale. L'unité de longueur est le mètre et l'unité de temps est la seconde. On néglige les forces de frottements : on dit que S est un oscillateur mécanique libre.



Démontrer que l'équation horaire du mouvement de G est de la forme :

$$x(t) = X_{max}\cos(\omega t + \varphi)$$

avec X_{max}, ω et φ des réels à déterminer.

Solution : Le solide S de centre d'inertie G est soumis à trois forces :

Son poids $\vec{P}$, la réaction $\vec{R}$ de la tige sur laquelle il coulisse et la tension $\vec{T}$ du ressort.

D'après le théorème du centre d'inertie, on a : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\overrightarrow{\gamma(t)}$, où $\overrightarrow{\gamma(t)}$ est son vecteur accélération à l'instant t. Or $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$; donc $\vec{T} = m\overrightarrow{\gamma(t)}$.

D'autre part, on sait que $\overrightarrow{\gamma(t)} = x''(t)\vec{\imath}$ et $\vec{T} = -kx(t)\vec{\imath}$, d'où l'égalité : $-kx(t) = mx''(t)$.

On en déduit que le mouvement de l'oscillateur est régi par l'équation différentielle :

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1).$$

Cette équation est de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ dont l'équation caractéristique $r^2 + \omega^2 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $i\omega$ et $-i\omega$ avec $\omega = \sqrt{k/m}$. Donc les solutions de l'équation (1) sont les fonctions $x :\ t \longmapsto A\cos\omega t + B\sin\omega t$, où A et B sont des réels.

On a : $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right)$

Il existe un angle φ tel que $\cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin\varphi = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$, et par suite :

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}(\cos\omega t \,.\cos\varphi - \sin\omega t\,.\sin\varphi) = X_{max}\cos(\omega t + \varphi).$$

Étudier le mouvement d'un oscillateur mécanique amorti

Exemple corrigé

Énoncé Un solide S de centre d'inertie G, de masse m, fixé à un ressort de raideur k coulissant sur une tige horizontale. On désigne par $x(t)$ la position de G dans le repère $(O;\ \vec{\imath})$ à l'instant t, O étant la position de G à l'équilibre.

On écarte S de sa position d'équilibre et on le lâche en lui donnant une vitesse initiale. L'unité de longueur est le mètre et l'unité du temps est la seconde.

Le mouvement de S est amorti par des frottements dont force est proportionnelle à la vitesse du mobile, le coefficient de proportionnalité f de cette force étant tel que $f^2 < 4mk$.

1. Justifier que l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur mécanique est :
$$x'' + \frac{f}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0.$$
2. Démontrer que l'équation horaire du mouvement de G est de la forme $x(t) = \lambda e^{\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$.

Solution

Prof. Sidi MAJOR

1. On désigne par $\vec{F}$ la force de frottement ; on a : $\vec{F} = -fx'(t)\vec{\imath}$.
D'après le théorème du centre d'inertie, on a : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F} = m\overrightarrow{\gamma(t)}$.
Or, on sait que $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$, $\vec{T} = -kx(t)\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{\gamma(t)} = x''(t)\vec{\imath}$, on en déduit donc que l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur mécanique amorti est :
$$x'' + \frac{f}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0 \quad (E).$$
2. L'équation caractéristique de (E) est :
$$r^2 + \frac{f}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$
dont le discriminant vaut $\Delta = (f^2 - 4mk)/m^2 < 0$, et donc l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées :
$$-\frac{f}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4mk - f^2}}{2m}.$$
Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $x : t \longmapsto e^{\alpha t}(A\cos\omega t + \sin\omega t)$ avec :
$$\alpha = -\frac{f}{2m}\ ; \quad \omega = \frac{\sqrt{4mk - f^2}}{2m}.$$
Or on sait déjà transformer l'expression $A\cos\omega t + \sin\omega t$ en la forme $\lambda\cos(\omega t + \varphi)$, d'où finalement $x(t) = \lambda e^{\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$.

Applications

Exercice 1. Dans chacun des cas, déterminer la solution qui vérifie la condition donnée :

a. $4y'' - 4y' + y = 0, \quad f(0) = -3,\ f'(0) = 2.$

b. $y'' - 5y' + 6y = 0, \quad f(0) = 0,\ f'(0) = 6.$

c. $y'' - 4y' + 5y = 0, \quad f(0) = -1,\ f'(0) = 3.$

2. En suivant le modèle de l'exemple corrigé, résoudre les équations différentielles suivantes :
$$y'' + 2y' + y = x^2 + 2x - 2 \quad (1)$$
$$y'' + 3y' - 2y = -6x + 1 \quad (2)$$
$$y'' + 3y' - 2y = 9 \quad (3)$$

Prof. Sidi MAJOR _ MAURITANIE