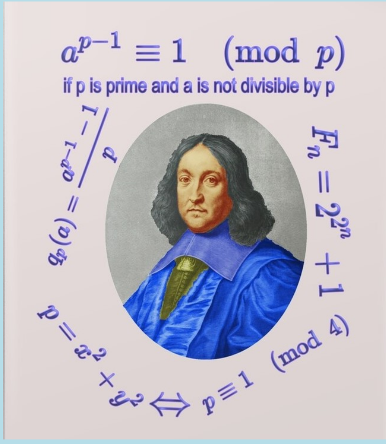
CHAPITRE

8 Analyse combinatoire

Des maths partout !

L'analyse combinatoire est une branche des mathématiques qui étudie comment compter les objets. Elle est utilisée :

- En théorie des probabilités ;
- En génétique pour décompter les nucléotides dans des chaînes de séquence d'ADN ;
- En théorie des graphes ;
- Dans plusieurs autres domaines ;
- Etc.



Pierre de Fermat (1607-1665)

Les notions du chapitre

1. Les principes de dénombrement : le modèle du tirage
2. La factorielle – Propriété des coefficients binomiaux
3. Le triangle de Pascal et ses applications

A l'origine de l'analyse combinatoire

On peut retenir que l'analyse combinatoire s'est développée au cours du 17e siècle au moment où certains mathématiciens s'intéressaient aux jeux de hasard. Parmi les nombreux mathématiciens qui ont contribué au développement de la combinatoire, on peut citer Blaise Pascal, Léonard Euler, Pierre de Fermat, Bernoulli, Huygens.

1 Les principes de dénombrement : le modèle du tirage

Dans ce chapitre, on ne fait pas recours à la théorie des ensembles, on se base plutôt sur la notion intuitive d'un ensemble déjà acquise par l'élève durant son cursus.
Toutes les formules combinatoires du cours seront déduites de l'étude d'un même exemple assez simple.

a. Trois modalités de tirages

Problème Un sac contient 7 boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 7.
Expérience : On tire 3 boules de ce sac.
Question : Quel est le nombre de tirages possibles ?

Remarques

A la question « Quel est le nombre de tirages possibles ? » on peut donner des réponses différentes du fait qu'on n'a pas précisé de quelle manière les boules seront tirées du sac.

En effet, tirer 3 boules du sac peut se réaliser de trois manières différentes :

❶ **Tirage successif avec remise (TSAR) :**
Les boules sont tirées **une à une** en remettant à chaque fois dans le sac la boule tirée avant le prochain tirage.
Dans ce cas, il y a un **ordre** dans le tirage des boules et la possibilité de **répétition** c'est-à-dire que la même boule peut être tirée plus d'une fois.

❷ **Tirage successif sans remise (TSSR) :**
Les boules sont tirées **une à une** sans les remettre dans le sac.
Dans ce cas, il y a un **ordre** dans le tirage des boules mais pas de possibilité de **répétition** c'est-à-dire que la même boule ne peut être tirée plus d'une fois.

❸ **Tirage simultané (TS) :**
Les 3 boules sont tirées en un seul coup.
Dans ce cas, il n'y a ni **ordre**, ni possibilité de **répétition**.

Deux principes de comptage

Les deux principes suivants jouent un rôle fondamental en combinatoire :

Principe d'addition :
Soit deux ensembles A et B contenant respectivement m et n éléments et tels que : $A \cap B = \emptyset$. Alors l'ensemble $A \cup B$ contient $m + n$ éléments.
Par exemple le nombre d'élèves dans une classe est $f + g$ si f est le nombre de filles et g le nombre de garçons.

Principe de multiplication :
Soit deux ensembles A et B contenant respectivement m et n éléments. Alors l'ensemble $A \times B$ contient $m \cdot n$ éléments.
Par exemple, si on dispose de 7 cahiers de 100 pages chacun, alors le nombre total de pages est $7 \cdot 100 = 700$.

b. Le dénombrement des tirages

❶ Tirage successif avec remise (TSAR)

Ordre et répétition

Les tirages	$1^{ère}$ boule		$2^{ème}$ boule		$3^{ème}$ boule		
Nombre de tirages	**7**	$\times$	**7**	$\times$	**7**	=	7^3

Généralisation Soient n et p deux entiers naturels.
Il y a n^p manières de tirer successivement avec remise p objets parmi n objets.
Un tel tirage correspond à un p-uplet appelé une **p-liste** parmi n éléments.

Exemple

Combien peut-on former d'entiers naturels de 5 chiffres en utilisant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9?
Réponse : Il y a au total 9 chiffres. Dans l'écriture d'un nombre, on tient compte de l'ordre du chiffre et un même chiffre peut se répéter. Donc le nombre d'entiers de 5 chiffres que l'on peut ainsi former est $9^5 = 59\,049$.

Dénombrer des p-listes – Utiliser un diagramme de Venn

Exemples corrigés

Énoncé 1. Ali possède 5 boubous, 7 pantalons et 10 chemises. :
De combien de façons peut-il s'habiller ?
2. Dans un groupe de 80 lycéens, 55 d'entre eux pratiquent le football, 33 pratiquent la course et 16 ne pratiquent aucun de ces deux sports. Déterminer le nombre de lycéens qui pratiquent le football et ne pratiquent pas la course.

Solution

1. Ali a 5 choix pour un boubou et pour chaque choix d'un boubou, il a 7 choix possibles pour prendre un pantalon. Il a donc $\mathbf{5 \times 7 = 35}$ choix d'un boubou **et** d'un pantalon. Pour chaque choix d'un boubou **et** d'un pantalon, il a aussi 10 choix d'une chemise. Donc par **le principe multiplicatif**, Ali peut s'habiller de $\mathbf{35 \times 10 = 350}$ façons.

2. On note F l'ensemble des lycéens qui pratiquent le football et C l'ensemble de ceux qui pratiquent la course. Ainsi, on a :

$$\mathrm{Card(F) = 55 \text{ et } Card(C) = 33.}$$

Schématisons cette situation par un diagramme de Venn . D'après les données :

$$\mathrm{Card(F \cup C) = 80 - 16 = 64}$$

Si A est un ensemble fini alors on note $\mathrm{Card(A)}$ le nombre d'éléments de A et on lit cardinal de A. Ainsi :

$$\mathbf{Card\{2,7,5\} = 3}$$
$$\mathbf{Card\phi = 0}$$

Si A et B sont deux ensembles finis alors :

$$\mathbf{Card(A \cup B) = Card(A) + Card\ (B) - Card(A \cap B)}$$

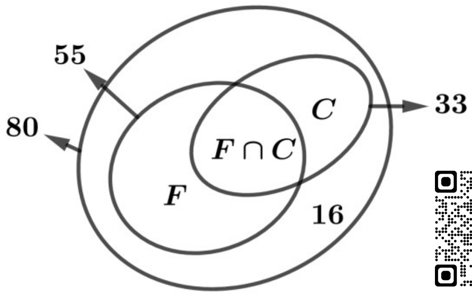
(Formule de Poincaré)

C'est-à-dire qu'il y a 64 lycéens qui pratiquent le sport (football ou course ou les deux à la fois).

On sait que :
$\mathrm{Card(F \cup C) = Card(F) + Card(C) - Card(F \cap C)}$
Soit encore :
$\mathrm{Card(F \cap C) = Card(F) + Card(C) - Card(F \cup C)}$
$\mathrm{Card(F \cap C) = 55 + 33 - 64 = 24}$
Donc pour déterminer le nombre de lycéens qui pratiquent le football et ne pratiquent pas la course, il suffit de calculer :

$$\mathrm{Card(F) - Card(F \cap C) = 55 - 24 = 31}$$

Donc la réponse est 31 lycéens qui pratiquent le football sans pratiquer la course.



Scan_me

Applications

Exercice 1. 1. Un opérateur de téléphones mobiles adopte une numérotation à huit chiffres commençant par le chiffre 4. Quelle est sa capacité maximale ?
2. La plaque d'immatriculation des véhicules en Mauritanie est constituée de 4 chiffres suivis de 2 lettres puis d'un code de 00 à 12 (13 codes). Combien de véhicules peuvent être immatriculées selon ce système ?

Exercice 2. Dans une classe de 7^{e} D, on a fait un devoir dans chacune des trois matières de base (SN, Math et PC). On a remarqué que 2 élèves n'ont pas obtenu la moyenne dans chacune des trois matières, seulement 3 élèves ont obtenu la moyenne dans les trois matières, 17 ont obtenu la moyenne en SN parmi lesquels 4 ont eu la moyenne en Math et 2 en PC, 19 ont obtenu la moyenne en math dont 5 ont eu la moyenne en PC et finalement 13 ont obtenu la moyenne en PC.
Déterminer le nombre d'élèves de cette classe (Faire un diagramme de Venn).

Scan_me

Ce qu'il faut savoir

❷ Tirage successif sans remise (TSSR)

Ordre et sans répétition

Les tirages	1ère boule		2ème boule		3ème boule		
Nombre de tirages	**7**	×	**6**	×	**5**	**=**	**210**

Généralisation Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

Il y a $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$ manières de tirer successivement sans remise p objets parmi n objets. Un tel tirage s'appelle un **arrangement** de p éléments parmi n. On note $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1)$ (p facteurs).

Exemple

Combien peut-on former d'entiers naturels de 5 chiffres, **tous distincts**, en utilisant les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9?

Réponse : Il y a au total 9 chiffres. Dans l'écriture d'un nombre, on tient compte de l'ordre du chiffre mais dans ce cas avec la précision que les chiffres doivent être **tous distincts** on comprend qu'aucun chiffre ne peut se répéter. Donc le nombre d'entiers de 5 chiffres tous distincts que l'on peut ainsi former est $A_9^5 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15\,120$.

❸ Tirage simultané (TS)

Sans ordre et sans répétition

Si par exemple, on tire simultanément les trois boules numérotées ①, ② et ③ alors ce même tirage peut être obtenu de 6 manières possibles en tirant les boules successivement et sans remise :

①-②-③ ; ①-③-① ; ②-①-③ ; ②-③-① ; ③-①-② ; ③-②-①

Ainsi le nombre de tirages simultanés de 3 boules parmi 7 est donné par :

$$\frac{A_7^3}{3 \times 2 \times 1} = \frac{210}{6} = 35$$

Généralisation Soient n et p deux entiers naturels tels que $1 \leq p \leq n$.

Il y a $\frac{A_n^p}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$ manières de tirer simultanément p objets parmi n objets.

Un tel tirage s'appelle une **combinaison** de p éléments parmi n. On note :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$$

Exemples

① Quel est le nombre de mains de 5 cartes dans un jeu de 11 cartes? (une main de 5 cartes est un tirage simultané de 5 cartes)

Réponse :

$$C_{11}^5 = \frac{A_{11}^5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 462.$$

② Une urne contient 14 boules dont 8 rouges et 6 jaunes. On tire simultanément 5 boules de l'urne. Combien de tirages amènent 3 boules rouges et 2 boules jaunes ?

Réponse :

On fait semblant d'avoir deux urnes séparées : l'une contenant 8 boules rouges et l'autre 6 boules jaunes. On tire 3 boules de la 1ère urne et 2 boules de la 2ème urne. Pour chaque tirage de 3 boules rouges, on peut lui faire associer tous les tirages de 2 boules jaunes, et donc c'est le principe multiplicatif qui s'applique :

$$C_8^3 \times C_6^2 = \frac{A_8^3}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{A_6^2}{2 \times 1} = 56 \times 15 = 840.$$

Utiliser les formules combinatoires : le modèle de tirages

Exemples corrigés

Énoncé

1. Sur Youtube, les vidéos sont identifiées par un code de 11 caractères alphanumériques (26 lettres majuscules, 26 lettres minuscules et 10 chiffres). Combien de vidéos différentes peut-on ainsi identifier ?

2. Dans une classe de 7ᵉ D, il y a 20 filles et 14 garçons.

a. Combien de délégations différentes de 5 élèves peut-on former avec des élèves de cette 7ᵉ D ?

b. Reprendre la question **a.** en supposant que la délégation est :

① Composée uniquement de filles ;

② Composée uniquement de garçons ;

③ Mixte (au moins une fille et au moins un garçon).

3. De combien de façons peut-on placer 4 dossiers différents dans 15 casiers différents ?

a. A raison d'un dossier par casier ; **b.** Quel que soit le nombre de dossiers par casier.

Solution

1. Il y a 26 lettres majuscules, 26 lettres minuscules et 10 chiffres, soit 62 caractères alphanumériques (c'est-à-dire lettre ou chiffre). Donc chacun des 11 caractères d'un code possède 62 possibilités. D'où le nombre de vidéos qui peuvent être codées sur Youtube est :

$$62^{11} \cong 5{,}2 \times 10^{19} = (52 \times 10^{9}) \times 10^{9} = 52 \text{ milliards de milliards (!!!).}$$

2. Il importe de préciser qu'il n'y a ni ordre, ni possibilité de répétition. Donc il s'agit de combinaisons.

a. $C_{34}^{5} = \mathbf{278\,256}$ délégations différentes.

b. ① Le nombre de délégations composées uniquement de filles : écarter les garçons et choisir 5 élèves parmi les 20 filles. Donc le nombre de délégations est : $C_{20}^{5} = 15\,504$.

② Le nombre de délégations composées uniquement de garçons : mettre les filles à l'écart et choisir 5 élèves parmi les 14 garçons. Donc le nombre de délégations est : $C_{14}^{5} = 2\,002$.

③ Le nombre de délégations mixtes :

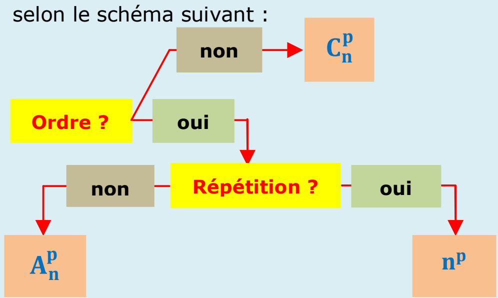
$$C_{34}^{5} - C_{20}^{5} - C_{14}^{5} = 278\,256 - 15\,504 - 2\,002 = \mathbf{260\,750}$$

Le tirage comme modèle de référence

Toute question de dénombrement peut être ramenée à un tirage en se posant les deux questions :

Y a-t-il un ordre ? Y a-t-il répétition ?

selon le schéma suivant :



3. L'écriture d'un nombre suppose toujours l'ordre de position des chiffres.

a. « A raison d'un dossier par casier » laisse sous-entendre qu'il n'y a pas de répétition : le 1ᵉʳ dossier a 15 possibilités, le 2ᵉᵐᵉ a 14 possibilités, et ainsi de suite … . Donc la réponse est :

$$A_{15}^{4} = 15 \times 14 \times 13 \times 12 = 32\,760$$

b. « Quel que soit le nombre de dossiers par casier » signifie que chaque dossier a 15 possibilités d'être placé dans un casier. Donc la réponse est : $15^{4} = \mathbf{50\,625}$.

Applications

Exercice Combien de nombres de quatre (4) chiffres peut-on former, à partir des chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, dans chacun des cas suivants :

1. Les chiffres peuvent se répéter ?
2. Les chiffres ne peuvent pas se répéter ?
3. Les chiffres peuvent se répéter et les nombres formés sont divisibles par 5 ?
4. Tous les chiffres sont impairs et ne peuvent pas se répéter ?

Ce qu'il faut savoir

2 La factorielle – Propriétés des coefficients binomiaux

Définition. Par convention, on pose $0! = 1$ et $1! = 1$ (lire factorielle de 0, factorielle de 1),

Pour tout entier naturel $n \geq 2$: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n \times (n-1)!$

Ainsi : $2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 3 \times 2! = 6$, $4! = 4 \times 3! = 24$, $5! = 5 \times 4! = 120$.

Réécriture de A_n^p :

Pour tous entiers n et p $(0 \leq p \leq n)$:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Réécriture de C_n^p :

Pour tous entiers n et p $(0 \leq p \leq n)$:

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

après avoir convenu que : $A_n^0 = C_n^0 = 1$.

Justifications

On sait que :

$$A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}_{\text{p facteurs} \searrow \text{à partir de n}}$$

$$= \frac{n \times (n-1) \ldots \times (n-p+1) \times (n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

On a aussi :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{1 \times 2 \times \ldots \times p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Remarque

On justifie l'égalité $0! = 1$ en remarquant que : $A_n^n = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-n+1) = n!$ et d'autre part comme :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

Alors pour la commodité du calcul, il a été convenu de prendre : $0! = 1$.

Propriétés.

Formule de Pascal :

Pour tous entiers n et p $(1 \leq p+1 \leq n)$:

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

Symétrie des coefficients :

Pour tous entiers n et p $(0 \leq p \leq n)$:

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Démonstrations

- Un sac contient $n+1$ boules dont une seule est rouge et toutes les autres noires. On tire simultanément $p+1$ boules. Alors :

$$\underbrace{C_{n+1}^{p+1}}_{\substack{\text{nombre total} \\ \text{des} \\ \text{tirages}}} = \underbrace{C_n^p}_{\substack{\text{nombre de tirages} \\ \text{contenant la} \\ \text{boule rouge}}} + \underbrace{C_n^{p+1}}_{\substack{\text{nombre de tirages ne} \\ \text{contenant pas} \\ \text{la boules rouge}}}$$

- En tirage simultané, il y a autant de manières de tirer p boules parmi n que de laisser $n-p$ boules dans le sac, d'où :

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Calculer sur les coefficients binomiaux C_n^p et A_n^p et la notation (!)

Exemple corrigé

Énoncé

A. 1. Simplifier les expressions suivantes :

a. $\frac{21!}{18!}$; b. $\frac{8!-7!}{7!}$; c. $\frac{7!\times 5!}{6!\times 4!}$; d. $\frac{(n-3)!}{n!}$

2. En utilisant la notation factorielle, donner une autre écriture des nombres suivants :

a. $5\times 6\times 7\times 8$; b. $n(n^2-1)$; c. $2\times 4\times 6\times \ldots\times 2n$

3. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $C_n^2 = 36$.

B. Dans un jeu de 32 cartes, combien peut-on former de mains de 8 cartes contenant :

1. 3 piques exactement ? **2.** 2 piques et 2 carreaux exactement ?

3. 1 roi et 1 trèfle exactement ? **4.** Au plus 2 rois ? **5.** Au moins 3 dames ?

Solution

A. 1.

a. $\frac{21!}{18!} = \frac{21\times 20\times 19\times 18!}{18!} = 21\times 20\times 19$; b. $\frac{8!-7!}{7!} = \frac{8\times 7!-7!}{7!} = \frac{(8-1)\times 7!}{7!} = 7$

c. $\frac{7!\times 5!}{6!\times 4!} = \frac{7.6!.5.4!}{6!\,4!} = 7.5 = 35$; d. $\frac{(n-3)!}{n!} = \frac{(n-3)!}{n(n-1)(n-2)(n-3)!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$

2. a. $5.6.7.8 = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{1.2.3.4} = \frac{8!}{4!}$; b. $n(n^2-1) = \frac{(n-2)!\,(n-1)n(n+1)}{(n-2)!} = \frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

3. On a :

$$C_n^2 = 36 \iff \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 36 \iff \frac{n(n-1)}{2} = 36 \iff n^2-n-72=0 \iff n=-8 \text{ ou } n=9$$

Comme n est un entier naturel alors la valeur qui convient est $n = 9$.

B. 1. Tirer 3 cartes parmi les 8 piques et 5 cartes parmi les 24 cartes restantes :

$$C_8^3\times C_{24}^5 = 56\times 42\,504 = 2\,380\,224$$

2. Tirer 2 piques parmi 8, 2 carreaux parmi 8 et 4 autres cartes parmi 16 :

$$C_8^2\times C_8^2\times C_{16}^4 = 28\times 28\times 1\,820 = 1\,426\,880$$

3. On remarque que si tire le roi de trèfle alors on a un roi et une carte de trèfle :

$$\underbrace{C_1^1}_{\text{le roi de trèfle}} \times \underbrace{C_{21}^7}_{\text{7 cartes autres que les trèfles et les rois}} + \underbrace{C_3^1}_{\text{un autre roi}} \times \underbrace{C_7^1}_{\text{une carte de trèfle autre que le roi}} \times \underbrace{C_{21}^6}_{\text{6 cartes parmi les 21 restantes}} = 1\,255\,824$$

4. « Au plus 2 rois » signifie 0 roi <u>ou</u> 1 roi <u>ou</u> 2 rois :

$$\underbrace{C_{28}^8}_{\text{0 roi}} + \underbrace{C_{28}^7\times C_4^1}_{\text{1 roi}} + \underbrace{C_{28}^6\times C_4^2}_{\text{2 rois}} = 10\,104\,705$$

5. « Au moins 3 dames » signifie 3 dames <u>ou</u> 4 dames :

$$\underbrace{C_{28}^5\times C_4^3}_{\text{3 dames}} + \underbrace{C_{28}^4\times C_4^4}_{\text{4 dames}} = 413\,595$$

Applications

Exercice

A. Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une main de 5 cartes. Quel est le nombre de mains :

1. Contenant un as et deux cœurs ?

2. Contenant deux rois et deux valets ?

3. Contenant au moins un as ?

B. Le conseil d'administration d'une société, composé de 14 membres dont 8 hommes et 6 femmes, veut élire un bureau de 7 membres dont 3 sont des femmes.

1. Combien de bureaux peut-on ainsi former ?

2. Combien de bureaux peut-on former si on sait que Madame A refuse de siéger aux mêmes bureaux que Monsieur B ?

3. De combien de manières peut-on élire 3 personnes parmi les 14 membres de conseil pour les postes de président, secrétaire et comptable ?

3 Le triangle de Pascal et ses applications

a. La formule du binôme de Newton

Théorème. Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

Exemples - Remarques

- La formule du binôme de Newton se démontre par récurrence sur n.
- En posant $x = a$ et $b = 1$, on trouve :

$$(x+1)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^k x^k + \cdots + C_n^n x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$$

Pour $x = 1$, on obtient :

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^k + \cdots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Pour $x = -1$, on obtient :

$$1 - C_n^1 + C_n^2 + \cdots + (-1)^k C_n^k + \cdots + (-1)^n C_n^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$$

- Le coefficient du x^3y^7 dans le développement de $(2x-5y)^{10}$:
  Le terme x^3y^7 doit figurer dans le monôme $C_{10}^3 (2x)^3(-5y)^7 = (-2^3 \times 5^7 \times C_{10}^3)x^3y^7$.
  Donc le coefficient de x^3y^7 est $-2^3 \times 5^7 \times C_{10}^3$.

b. Le triangle de Pascal

Résultat. Les coefficients C_n^k peuvent être calculés de proche en proche en utilisant la formule de Pascal. Ainsi, on obtient le tableau suivant appelé triangle de Pascal :

		Valeurs de k							
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**...**
Valeurs de n	**0**	1							
	1	1	1						
	2	1	2	1					
	3	1	3	3	1				
	4	1	**4**	**6**	4	1			
	5	1	5	**10**	10	5	1		
	6	1	6	**15**	20	**15**	6	1	
	...								

$$C_4^1 + C_4^2 = C_5^2$$

$$C_6^2 = C_6^4$$

Exemples d'utilisation

Le triangle de Pascal permet, entre autres, de trouver les coefficients dans le développement du binôme de Newton :

$(a+b)^0 = \mathbf{1}$

$(a+b)^1 = \mathbf{1}.a + \mathbf{1}.b$

$(a+b)^2 = \mathbf{1}.a^2 + \mathbf{2}.ab + \mathbf{1}.b^2$

$(a+b)^3 = \mathbf{1}.a^3 + \mathbf{3}.a^2b + \mathbf{3}.ab^2 + \mathbf{1}.b^3$

$(a+b)^4 = \mathbf{1}.a^4 + \mathbf{4}.a^3b + \mathbf{6}.a^2b^2 + \mathbf{4}.ab^3 + \mathbf{1}.b^3$

$(a+b)^5 = \mathbf{1}.a^5 + \mathbf{5}.a^4b + \mathbf{10}.a^3b^2 + \mathbf{10}.a^2b^3 + \mathbf{5}.ab^4 + \mathbf{1}.b^5$

$(a+b)^6 = \mathbf{1}.a^6 + \mathbf{6}.a^5b + \mathbf{15}.a^4b^2 + \mathbf{20}.a^3b^3 + \mathbf{15}.a^2b^4 + \mathbf{6}.ab^5 + \mathbf{1}.b^6$

Dénombrer des anagrammes – Raisonner par méthode combinatoire

Exemple corrigé

Énoncé

1. On appelle anagramme d'un mot tout mot (ayant ou non un sens) qui s'écrit avec les mêmes lettres que le premier mot en respectant les occurrences (les répétitions) des lettres.
Exemple : les anagrammes du mot **BAC** sont les mots **BCA**, **ABC**, **ACB**, **CAB** et **CBA**.
Quel est le nombre d'anagrammes du mot « **SUCCESSIF** » ?
2. Pour chacune des formules suivantes, imaginer une situation combinatoire qui permet de la démontrer :
   a. Pour tous entiers p et n tels que $2 \leq p \leq n-2$:
   $$C_n^p = C_{n-2}^{p-2} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p$$
   b. Pour tous entiers n, m et p tels que $p \leq m$ et $p \leq n$:
   $$C_m^0 C_n^p + C_m^1 C_n^{p-1} + C_m^2 C_n^{p-2} + \cdots + C_m^p C_n^0 = C_{m+n}^p$$

Solution

1. Le mot « SUCCESSIF » s'écrit avec 9 lettres. Si toutes les 9 lettres étaient distinctes deux à deux alors le nombre d'anagrammes serait égal à :
$$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362\,880$$
Si on numérote les lettres **S** et les lettres **C**, on aura à déterminer le nombre d'anagrammes du mot : « $\mathbf{S_1UC_1C_2ES_2S_3IF}$ » qui est en fait $9! = 362\,880$. Or la permutation des lettres $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$, $\mathbf{S_3}$ ne change pas le mot, comme la permutation des lettres $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ et il y a $\mathbf{3! = 6}$ façons de permuter les lettres $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$, $\mathbf{S_3}$ et $\mathbf{2! = 2}$ façons de permuter les lettres $\mathbf{C_1}$, $\mathbf{C_2}$ alors on peut déduire que le nombre d'anagrammes du mot « **SUCCESSIF** » est :
$$\frac{9!}{3! \times 2!} = \frac{362\,880}{12} = 30\,240.$$

2. On va imaginer une situation pour chacune des deux formules :
   a. Un sac contient n boules dont 1 est rouge et 1 jaune. On en tire simultanément p boules. Alors :
   $$\underbrace{C_n^p}_{\text{nbre total de tirages}} = \underbrace{C_{n-2}^{p-2}}_{\substack{\text{nbre de tirages}\\ \text{amenant la rouge}\\ \text{et la jaune}}} + \underbrace{2\,C_{n-2}^{p-1}}_{\substack{\text{nbre de tirages}\\ \text{amenant une seule}\\ \text{des deux boules}}} + \underbrace{C_{n-2}^{p}}_{\substack{\text{nbre de tirages}\\ \text{n'amenant pas la rouge}\\ \text{et la jaune}}}$$
   b. Un sac contient m boules rouges et n boules jaunes. On en tire simultanément p boules. Alors :
   $$\underbrace{C_{m+n}^p}_{\text{nbre total de tirages}} = \underbrace{C_m^0 \times C_n^p}_{\substack{\text{nbre de tirages}\\ \text{amenant}\\ \text{0 rouge et p jaunes}}} + \underbrace{C_m^1 \times C_n^{p-1}}_{\substack{\text{nbre de tirages}\\ \text{amenant}\\ \text{1 rouge et p−1 jaunes}}} + \cdots + \underbrace{C_m^p \times C_n^0}_{\substack{\text{nbre de tirages}\\ \text{amenant}\\ \text{p rouges et jaune}}}$$

Applications

Exercice

A. On lance 8 fois une pièce de monnaie. Combien existe-t-il de façons différentes :
1. d'obtenir 5 fois la face « arabe » ?
2. de ne pas obtenir 5 fois la face « arabe » ?

B. Dénombrer les anagrammes du mot « MISSISSIPPI ».

C. Imaginer une situation combinatoire pour démontrer la formule :
$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$$