Quelques problèmes de synthèse

Problème 1

On considère les fonctions f et F définies $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 1$$

$$F(x) = (e-1)e^x - x - \frac{3}{2}.$$

1. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

2. Étudier les fonctions f et F, tracer leurs courbes respectives $\mathcal{C}$ et Γ (On précisera leur position relative).

3. Soit $x > 0$, justifier l'existence d'un réel c de $[x, x+1]$ tel que l'on ait :

$$f(c) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$

en déduire que : $F(\mathbb{R}_+) \subset f(\mathbb{R}_+)$.

4. On considère la suite (c_n) définie par $f(c_n) = \int_n^{n+1} f(t)dt$ et la suite (δ_n) :

$$\delta_n = c_n - n.$$

a. Montrer que la suite (δ_n) est bornée.

b. En utilisant les courbes $\mathcal{C}$ et Γ, représenter les points M_0, M_1, M_2 d'abscisses c_0, c_1 et c_2.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$e - 1 - \frac{1}{2e^n} = e^{\delta_n} - \frac{\delta_n}{e^n}.$$

d. Montrer que (δ_n) admet une limite finie ℓ à déterminer.

e. Pour tout x de $\mathbb{R}$, calculer :

$$F(x) - f(x+1).$$

En déduire que Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une transformation simple à déterminer.

Problème 2 (inédit)

Soit f l'application du plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $12z' = 5z - i\bar{z} + 12 + 36i$.

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x', y' sont des réels.
Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

2. Montrer que f admet un unique point invariant Ω.

3. Soit h_1 et h_2 les homothéties de même centre Ω et de rapports respectifs $1/2$ et $1/3$.

a. Déterminer l'ensemble D_1 des points M du plan tels que : $h_1(M) = f(M)$.

b. Déterminer l'ensemble D_2 des points M du plan tels que : $h_2(M) = f(M)$.

c. Déterminer un point A sur D_1 et un point B sur D_2 tels que le triplet $(\Omega; \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ soit un repère orthonormé direct du plan.

4. a. Déterminer l'expression analytique de f dans le nouveau repère $(\Omega; \overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$.

b. Montrer que pour tous points M, N du plan, on a :

$$d(f(M), f(N)) \leq \frac{1}{2} d(M, N)$$

où $d(X, Y) = XY$ désigne la distance entre les points X et Y.

c. On se donne un point fixé M_0 et on définit les points M_n par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = f(M_n)$.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad d(\Omega, M_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \times d(\Omega, M_0)$$

d. Quelle est la limite de la suite de terme général $d(\Omega, M_n)$?

5. On définit les deux suites numériques u et v par les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{5}{12}u_n - \dfrac{1}{12}v_n + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 6 \\ v_{n+1} = -\dfrac{1}{12}u_n + \dfrac{5}{12}v_n + 3 \end{cases}$$

Étudier la convergence des suites u et v.

Problème 3

Partie A : On considère la fonction f définie sur $[-2, +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}.$$

Prouver que : $\forall t \geq 0,\ 2e^{\frac{t}{2}} \geq t + 2$ et $\forall t \geq 0,\ 0 < f(t) \leq \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{t}{4}}$.

On pourra admettre ces deux résultats dans le cas où on n'arrive pas à les établir définitivement.

On définit sur $[e^{-2}, +\infty[$, la fonction F par $F(x) = \int_0^{\ln x} f(t)dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $[e^{-2}, +\infty[$, et que :

$$F'(x) = \sqrt{\frac{2 + \ln x}{x^3}}.$$

2. Calculer $F(1)$ et en déduire que $\forall x \in [e^{-2}, +\infty[$, on a :

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{\frac{2 + \ln t}{t^3}} dt.$$

3. Montrer que $\forall x \geq 1,\ 0 \leq F(x) \leq 4\sqrt{2}$.

4. a. Montrer que $\forall t \in [e^{-2}, 1]$, on a : $0 \leq \sqrt{2 + \ln t} \leq \sqrt{2}$.

b. En déduire que $\forall x \in [e^{-2}, 1]$, on a : $2\sqrt{2}(1 - e) \leq F(x) \leq 0$.

5. Donner enfin un encadrement de $F(x)$ pour $x \in [e^{-2}, +\infty[$.

Partie B : On considère la suite U définie par :

$$U_n = \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!} \int_{-2}^{-1} (x+2)^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq U_n \leq e \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!}.$$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

3. En déduire que U converge vers une limite que l'on précisera.

4. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k \cdot k!}{(2k+1)!}.$$

a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = -2\sqrt{e} \cdot \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+3)!} + U_n.$$

b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{U_0 - U_n}{2\sqrt{e}}.$$

c. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{F(e^{-1}) - F(e^{-2})}{2\sqrt{e}}.$$

Problème 4

Soit f la fonction définie sur le domaine $D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{2^t}{x+t} dt$$

1. Étude de f en (-1) et en 0 :

a. Montrer que $\forall x < -1$ et $\forall t \in [0,1]$, on a :

$$\frac{2^t}{x+t} \leq \frac{1}{x+t}.$$

b. Montrer que $\forall x < -1$, on a :

$$f(x) \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

En déduire la valeur de :

$$\lim_{x \to (-1)^-} f(x).$$

c. Montrer que $\forall x > 0$ et $\forall t \in [0,1]$, on a :

$$\frac{2^t}{x+t} \geq \frac{1}{x+t}.$$

Montrer alors que :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

2. Montrer que $\forall x < -1$ et $\forall t \in [0,1]$, on a : $|x+t| \geq -(1+x)$.

3. En déduire que $\forall x < -1$:

$$|f(x)| \leq \frac{-1}{(x+1)\ln 2}.$$

Calculer alors la valeur de la limite :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x).$$

4. Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

5. Soit $x \in D$ et F une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{-x\}$ de la fonction définie par :

$$\varphi : \ t \longmapsto \frac{2^t}{x+t}$$

a. Donner en fonction de F une primitive de la fonction définie par : $t \longmapsto -\varphi(-x+t)$.

b. En déduire que :

$$f(x) = \int_x^{x+1} \varphi(-x+t)\, dt.$$

c. Conclure que :

$$f(x) = 2^{-x} u(x) \ \text{ avec } \ u(x) = \int_x^{x+1} \frac{2^t}{t} dt.$$

d. Vérifier que :

$$\forall x \in D, \qquad u'(x) = \frac{2^{x+1}}{x+1} - \frac{2^x}{x}$$

puis en déduire que :

$$f'(x) = -(\ln 2)f(x) + \frac{x-1}{x(x+1)}.$$

e. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2^t}{(x+t)^2}\,dt = -f'(x).$$

f. Dresser le tableau de variations de f et tracer l'allure de la courbe de f.

Problème 5 (inédit)

A tout nombre réel strictement positif x, on associe les deux suites (w_n) et (t_n) définies par :

$$\begin{cases} w_0 = x \ \ et \ \ w_{n+1} = \sqrt{w_n} \\ t_n = 2^n(w_n - 1) \end{cases}$$

1. Pour $x \geq 1$,

a. Montrer que la suite (w_n) est minorée par 1 et décroissante.

b. Établir que :

$$\forall n \geq 1, \qquad |w_n - 1| \leq \frac{1}{2}|w_{n-1} - 1|.$$

(On utilisera l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $k:\ t \mapsto \sqrt{t}$ sur l'intervalle $[1, x]$).

En déduire la limite de la suite (w_n).

2. Pour $0 < x \leq 1$, montrer que la suite (w_n) est croissante et convergente vers 1.

3. a. Exprimer (w_n) et (t_n) en fonction de (w_{n+1}) puis établir :

$$\forall n \geq 0, \qquad t_n - t_{n+1} = 2^n(w_n - 1)^2.$$

En déduire que la suite (t_n) est décroissante.

b. Pour $x \geq 1$, établir que (t_n) est convergente.

c. Soient (w_n) et (t_n) les deux suites associées à x et (w'_n) et (t'_n) les deux suites associées au réel $1/x$.

Montrer que :

$$① \quad \forall n \geq 0, \qquad t'_n = \frac{-t_n}{w_n}$$

En déduire que, dans le cas où $0 < x \leq 1$, la suite (t_n) est également convergente.

4. Pour tout réel strictement positif x, on note $f(x)$ la limite de la suite (t_n).

a. Établir que :

$$f(1) = 0\,; \ \ \forall x > 0, f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

(On pourra utiliser ①)

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \qquad \frac{t_n}{w_n} \leq f(x) \leq 0 \quad ②$$

(On pourra utiliser la monotonie de la suite (t_n))

En déduire que :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq x - 1 \quad ③$$

c. Si les suites associées à x sont (w_n) et (t_n) et à y, (w'_n) et (t'_n) et à xy, (W_n) et (T_n), établir que :

$$W_n = w_n \times w'_n \quad \text{et} \quad T_n = w'_n \times t_n + t'_n.$$

En déduire que :

$$\forall x > 0,\ \forall y > 0,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

5. a. Soit x un réel tel que $x > 0$ et h un réel tel que $x + h > 0$.

Établir que :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

c. En utilisant ③, déterminer la limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Reconnaître alors la fonction f.

Problème 6

Soit p un entier naturel, $p \geq 2$, et $a_1, a_2, \ldots, a_p$ une famille de p nombres réels tels que :

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p.$$

Partie A

Étant donné un entier naturel n, $n \geq a_p$, on considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(E) : \ a_1^x + a_2^x + \cdots + a_p^x = n^x.$$

1. Pour k entier, $1 \leq k \leq p$, on considère la fonction :
$$g_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$x \to \left(\frac{a_k}{n}\right)^x$$
Étudier ses variations sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et étudier sa limite en $+\infty$.
2. Soit f_n la somme des fonctions g_k, pour k compris entre 1 et p.
Préciser le sens de variation de f_n ainsi que sa limite en $+\infty$.
3. En déduire que l'équation (E) admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}_+$.

Partie B

Pour chaque $n > a_p$, on note x_n la solution de l'équation (E). On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \geq r}$, où r est le plus petit entier strictement supérieur à a_p.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq r$ et tout réel $x \geq 0$, on a :
$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$
En déduire que la suite (x_n) est décroissante.

2. Soit c un réel strictement positif quelconque. Montrer que, pour chacun des entiers k, $1 \leq k \leq p$, la suite de terme général $v_n = \left(\frac{a_k}{n}\right)^c$ est convergente. Quelle en est sa limite ?

3. Déduire de la question précédente que la suite de terme général $f_n(c)$ est convergente. Quelle en est sa limite ?

4. Montrer qu'il existe un entier m tel que $0 < f_m(c) < 1$. En déduire que, pour tout $n \geq m$, on a : $x_n < 0$.

5. Déduire de ce qui précède que la suite $(x_n)_{n \geq r}$ admet 0 pour limite.

6. Montrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} x_n . \ln n = p.$$

Problème 7

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{3}$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

1. Étudier f et construire $(\mathcal{C})$.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi]$ vers un intervalle I que l'on précisera. Soit g sa réciproque.

b. Étudier la continuité et la dérivabilité de g sur I, puis construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de g dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

3. a. Montrer que $(\mathcal{C})$ coupe la droite $\Delta : y = x$ en un seul point d'abscisse $x_0 \in]0, \pi/2[$.

b. Calculer, en fonction de x_0, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par les deux axes du repère et les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Partie B : On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in]0, x_0[\\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in [0, \pi/2]$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{2n} < x_0 < U_{2n+1}$.

2. Montrer que :

$$\forall x \in [0, \pi], \qquad |f(x) - x_0| \leq \frac{2}{3}|x - x_0|$$

3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |U_n - x_0| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - x_0|$$

puis que la suite (U_n) converge vers un réel que l'on déterminera.

4. Pour tout entier naturel n, on définit la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}(U_k - x_0)$$

a. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (-1)^{k+1}(U_k - x_0) > 0$$

b. Montrer que (S_n) est une suite strictement croissante.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n| \leq 3|U_0 - x_0|$, et conclure à propos de la convergence de (S_n).

Partie C : Pour tout réel x de l'intervalle $]0, \pi[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^{f(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

$$G(x) = \int_0^{f(x)} \frac{t\,dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

1. a. Montrer que F et G sont définies et dérivables sur $]0, \pi[$, puis calculer $F'(x)$ et $G'(x)$.

b. Exprimer alors $F(x)$ et $G(x)$ en fonction de x.

2. Pour tout réel α de l'intervalle $]0, 1[$, on pose :

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

$$J(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{t\,dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

$$K(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

a. Calculer $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ en fonction de $g(\alpha)$ puis en déduire le calcul des limites suivantes :

$$\lim_{\alpha \to 1^-} I(\alpha) \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \to 1^-} J(\alpha).$$

b. Pour $x \in]-1/3, 1[$, on pose : $\varphi(x) = x\sqrt{(1-x)(1+3x)}$

Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout x de $]-1/3, 1[$, on ait :

$$\varphi'(x) = \frac{a + bx + cx^2}{\sqrt{(1-x)(1+3x)}}.$$

En déduire $K(\alpha)$ en fonction de $I(\alpha)$, $J(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ puis calculer :

$$\lim_{\alpha \to 1^-} K(\alpha).$$

3. Pour tout nombre réel α de l'intervalle $]0, 1[$, on pose :

$$L(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sqrt{(1-t)(1+3t)}\,dt.$$

Exprimer $L(\alpha)$ en fonction de $\varphi(\alpha)$, $J(\alpha)$ et $K(\alpha)$. En déduire :

$$\lim_{\alpha \to 1^-} L(\alpha).$$

Problème 8(bac Mauritanie 1998)

A l'extérieur d'un triangle direct non rectangle OAB, on construit trois carrés : $AONP$, $OBCU$ et $BATI$ de centres respectifs J, H et L.

On suppose que les angles $(\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OA}),(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OU})$ et $(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB})$ ont pour mesure $+\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Le but de l'exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration décrite ci-dessus.

<u>N.B.</u> : Il est demandé de faire une figure pour chacune des parties.

Partie A : Propriétés d'orthogonalité et d'égalité de distances

a. On munit le plan d'un repère orthonormé direct dans lequel les points B et N ont pour affixes respectives b et n.

- **a.** Quelles sont les affixes a et u des points A et U ?
- **b.** Montrer que les droites (AU) et (BN) sont perpendiculaires et que $AU = BN$. Quelles conclusions similaires peut-on exhiber de la configuration ?
- **c.** Soit G le point tel que $OUGN$ soit un parallélogramme. En déduire que le triangle GCP est rectangle isocèle.

b. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{GN}$ et r le quart de tour direct de centre O.

- **a.** Déterminer l'image de G par $r\circ t$.
- **b.** Soit C' le symétrique de C par rapport à B. Démontrer que r transforme C' en C. Quelle est l'image de B par $r\circ t$?
- **c.** En déduire que les droites (AC) et (GB) sont perpendiculaires et que $AC = GB$.

Partie B : Propriétés d'alignement et de concours

1. Soit Q le point d'intersection des droites (BP) et (AC), et t' la translation de vecteur $\overrightarrow{TA}$.

- **a.** Quelles sont les images, par la translation t', des hauteurs du triangle TOI ?
- **b.** En déduire que (OQ) est la hauteur issue du sommet O du triangle OAB.
- **c.** Montrer que les points G, O et Q sont alignés (on pourra utiliser le résultat de A-2.c.)

2. Soit K_1 le point d'intersection des droites (AU) et (BN). Soient s et s' les deux similitudes directes de centre O, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angles respectifs $+\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}$.

- **a.** Déterminer $s(B)$, $s(N)$, $s'(A)$ et $s'(U)$.
- **b.** On définit les deux points K' et K'' par : $K' = s(K_1)$ et $K'' = s'(K_1)$
  Montrer que les triangles directs $K_1K'O$ et K_1OK'' sont isocèles rectangles en K_1 et que $K'\in(CP)$ et $K''\in(CP)$.
- **c.** En déduire que les droites (AU), (BN) et (CP) sont concourantes.
- **d.** Montrer que les droites (OK_1) et (PC) sont les bissectrices de l'angle des droites (BN) et (AU).

3. a. Montrer que les points O, K_1, A, N d'une part, et K_1, A, L, B d'autre part, sont cocycliques. Quels sont les centres des cercles auxquels appartiennent respectivement ces points ?

b. Calculer $2(\overrightarrow{K_1O},\overrightarrow{K_1L})$. On pourra écrire : $(\overrightarrow{K_1O},\overrightarrow{K_1L}) = (\overrightarrow{K_1O},\overrightarrow{K_1A}) + (\overrightarrow{K_1A},\overrightarrow{K_1L})$.
Que peut-on en conclure ?

4. On admet que :

- Les droites (OT), (BP) et (IN) sont concourantes en un point noté K_3.
- Les droites (AC), (OI) et (UT) sont concourantes en un point noté K_2.

Montrer que les droites (OK_1), (AK_2) et (BK_3) sont concourantes au point K, orthocentre du triangle HJL.

Problème 9

Partie A : Dans tout ce paragraphe, $\mathbf{x}$ désigne un nombre réel et $\mathbf{t}$ une variable réelle.

1. En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que l'on a :

$$\int_0^x te^t dt = xe^x - \int_0^x e^t dt.$$

En déduire, par un calcul de l'intégrale $\int_0^x (x-t)e^t dt$, que :

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)e^t dt.$$

2. On considère l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrer l'égalité :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt.$$

3. Démontrer, par récurrence sur $\mathbf{n}$, la formule :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

4. On pose $\varepsilon_n(x) = \frac{1}{x^n}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$.

Montrer que :

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon_n(x) = 0.$$

Partie B : On pose :

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \ , \quad I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \ , \quad J_n = \int_{-1}^0 (1+t)^n e^t dt$$

1. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, on pose $H = ae + b + ce^{-1}$.

Dans les deux premières questions, on suppose : $|a| + |c| \neq 0$.

a. Montrer que :

$$n!\,H = n!\,[aP_n(1) + b + cP_n(-1)] + aI_n + (-1)^{n+1}cJ_n.$$

b. Montrer que :

$$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{e(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite de $h(n) = aI_n + (-1)^{n+1}cJ_n$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Soit $Q_n = n!\,H - h(n)$.

Montrer qu'il existe deux entiers rationnels $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k'}$ tels que :

$$n!\,P_n(1) = 1 + kn \quad \text{et} \quad n!\,P_n(-1) = (-1)^n + k'n.$$

En déduire que Q_n est, pour tout entier $\mathbf{n}$, un entier, et que le nombre $Q_n - [a + (-1)^n c]$ est un multiple de $\mathbf{n}$.

2. a. Prouver que, si $\mathbf{H}$ est nul, alors $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ sont nuls.

b. En déduire qu'il n'existe aucune équation du second degré à coefficients rationnels dont une racine soit égale à $\mathbf{e}$.

Problème 10

On pose $E =]1, +\infty[$ et pour tout $x \in E$:

$$A(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$$

Partie A

1. Démontrer que $\mathbf{A}$ est définie sur $\mathbf{E}$.

2. Démontrer que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{E}$, on a : $\ln x \leq x - 1$.

3. a. Démontrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$, $A(x) \geq \ln(x - 1)$.

b. Démontrer que pour tout $x \in]1, 2]$, $A(x) \leq \ln(x - 1)$.

c. Déduire de ce qui précède les limites de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{1}$ et en $+\infty$.

4. Étudier le sens de variation de $\mathbf{A}$ et dresser son tableau de variations.

Partie B

1. a. Démontrer que pour tout $x \in E$, on a :

$$A(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln^2 t}.$$

b. En déduire que pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$A(x) \geq \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2}.$$

2. a. Démontrer que pour tout $x \in E$, on a :

$$A(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \frac{x}{\ln^2 x} - \frac{2}{\ln^2 2} + 2\int_2^x \frac{dt}{\ln^3 t}$$

b. Montrer que tout $x \in E$, on a :

$$\int_2^x \frac{dt}{\ln^3 t} = \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^t}{t^3} dt.$$

c. En déduire que pour tout $x \in E$, on a :

$$A(x) = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \frac{x}{\ln^2 x} - \frac{2}{\ln^2 2} + 2\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^t}{t^3} dt$$

3. a. Étudier pour $t \in]0, +\infty[$ les variations de la fonction :

$$t \longmapsto \varphi(t) = \frac{e^t}{t^3}.$$

b. Démontrer que pour tout $x \in [e^3, +\infty[$, on a :

$$\int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{e^t}{t^3} dt \leq \int_{\ln 2}^{3} \frac{e^t}{t^3} dt + (\ln x - 3)\frac{x}{\ln^3 x}$$

4. a. Déduire de ce qui précède que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} . A(x) = 1$$

b. Donner l'allure de la courbe (Γ) représentant la fonction $\mathbf{A}$.

Partie C : On suppose dans cette partie que $x \in [2, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$x_k = 2 + k\frac{x - 2}{n} \quad \text{et} \quad U_n(x) = \frac{x - 2}{n} . \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\ln(x_k)}$$

1. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \in [\![0, n - 1]\!]$, on a :

$$\frac{x - 2}{n} . \frac{1}{\ln(x_{k+1})} \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{x - 2}{n} . \frac{1}{\ln(x_k)}$$

2. En déduire que :

$$0 \leq U_n(x) - A(x) \leq \frac{x - 2}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}\right)$$

3. En utilisant la question précédente, quelle est la plus petite valeur de $\mathbf{n}$ telle que $U_n(x)$ soit une valeur approchée par excès de $A(x)$ à 10^{-1} près pour tout $x \in [2, 10]$.

Partie D

1. Démontrer que l'équation $A(x) = \frac{1}{x}$ a une unique solution α et que $\alpha \in]2, +\infty[$.

2. a. Démontrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$A(x) \geq \frac{x-2}{\ln x}$$

b. En intégrant par parties, démontrer que :

$$\forall x \in E, \qquad A(x) = x\ln(\ln x) - 2\ln(\ln 2) - \int_2^x \ln(\ln t)dt$$

c. En déduire que pour tout $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$\frac{x-2}{\ln x} \leq A(x) \leq x.\ln\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)$$

d. Déduire de ce précède que : $2,3 < \alpha < 2,4$.

Problème 11 (bac Mauritanie 1994)

Dans tout l'exercice, le plan est supposé muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

Partie A

Soit a un paramètre réel et T_a l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que l'on ait $z' = bz$ où b est le nombre complexe défini par :

$$b = \frac{1}{2} + ia$$

1. Prouver que T_a est une similitude directe. Donner son centre et son rapport.

2. Montrer qu'il existe une unique valeur a_0 de a pour laquelle T_a est une homothétie. Déterminer les éléments caractéristiques de cette homothétie.

3. Montrer qu'il existe deux valeurs a_1 et a_2 du paramètre a pour lesquelles T_{a_1} et T_{a_2} sont des isométries. Vérifier que : $T_{a_1} = T_{a_2}^{-1}$. On pose : $R = T_{a_1} = T_{a_2}^{-1}$.

4. Montrer que les isométries R et R^{-1} laissent globalement invariant tout triangle équilatéral centré en O.

Partie B

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = i$.
On désigne par I, J et K les points dont les affixes sont les solutions de cette équation, I et J d'ordonnées positives et K d'ordonnée négative. Soient I_1, J_1 et K_1 les images respectives de I, J et K par T_a.

2. Donner les affixes des points I_1, J_1 et K_1 en fonction de a. En déduire que $I_1 \in (JK)$, $J_1 \in (IK)$ et $K_1 \in (IJ)$ et cela pour toute valeur de a.

3. Montrer que si a décrit $\mathbb{R}$ alors le milieu du segment $[J_1K_1]$ décrit une droite que l'on déterminera.

4. Soit I_2 l'image de I_1 par T_a.

a. Montrer que les coordonnées de I_2 sont : $\begin{cases} x = -a \\ y = a^2 - \frac{1}{4} \end{cases}$

b. Reconnaître alors l'ensemble Σ des points I_2 quand le paramètre a décrit $\mathbb{R}$.

c. Montrer que la dérivée $d(\overrightarrow{OI_2})/da$ du vecteur $\overrightarrow{OI_2}$ par rapport à a et le vecteur $\overrightarrow{J_1K_1}$ sont colinéaires et que la droite (J_1K_1) est tangente à Σ.

Partie C

On fixe a et on pose pour n entier : $T_a^0 = Id$ et $T_a^{n+1} = T_a \circ T_a^n$.
Soit D le point de coordonnées $(0; -1)$ et on pose $D_n = T_a^n(D)$.

1. Calculer l'affixe z_n de D_n en fonction de b et prouver que :

$$z_n = \left(\frac{-1}{2\cos\mu}\right)^n e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+n\mu\right)}$$

où μ est une mesure de l'angle de la similitude T_a.
Quelles sont les valeurs de μ pour lesquelles la suite $(|z_n|)$ est décroissante ?

2. Calculer :

$$\left\|\overrightarrow{D_nD_{n+1}}\right\| \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{p=0}^{n}\left\|\overrightarrow{D_pD_{p+1}}\right\|$$

3. Comment faut-il choisir μ pour que la suite (S_n) admette une limite finie quand n tend vers $+\infty$? Donner la valeur de cette limite dans le cas où $\mu = \frac{3\pi}{4}$.

Problème 12

Partie A

1. a. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y' = 2y + 2$.

b. Soit l'équation différentielle (E') : $y' = y + 2e^{-x}$.
Montrer que f est une solution de (E') si et seulement si g définie par $g(x) = e^{x}f(x)$ est solution de (E).

c. Déterminer alors les solutions de (E').

2. a. Montrer que $f(x) = e^{x} - e^{-x}$ est la solution de (E') qui s'annule en 0.

b. Dresser le tableau de variations de f.

c. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

d. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} et expliciter l'expression de $f^{-1}(x)$.

3. Soit la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$H(x) = \int_0^{f(x)} \sqrt{4 + t^2}\,dt.$$

a. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $H'(x)$.

b. En que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$H(x) = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) + 2x.$$

c. En intégrant par parties, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{f(x)} \frac{t^2}{\sqrt{4 + t^2}}\,dt.$$

Partie B

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F_n(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{f(x)}} (1 + \ln t)^n\,dt.$$

1. Calculer $F_1(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F_1(x)$.

2. a. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$F_{n+1}(x) = \frac{1}{f(x)}\left[1 - \ln f(x)\right]^{n+1} - (n+1)F_n(x).$$

b. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)}\left[1 - \ln f(x)\right]^n = 0.$$

c. Montrer par récurrence que la fonction F_n admet une limite finie non nulle L_n lorsque x tend vers $+\infty$.

d. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_n = (-1)^n.e.n!$

Problème 13

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n e^{-nx}$. On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction $\mathbf{f_n}$.

b. Déterminer les positions relatives des courbes $\mathbf{C_n}$ et $\mathbf{C_{n+1}}$.

2. a. Tracer $\mathbf{C_1}$ et $\mathbf{C_2}$ en précisant les demi-tangentes à l'origine.

b. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe $\mathbf{C_1}$ et les droites : $\mathbf{x = 0}$ et $\mathbf{x = n}$.

c. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Partie B : Pour tout $\mathbf{x \geq 0}$ et pour tout $\mathbf{n \geq 1}$, on pose :

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt.$$

1. Montrer que pour tout $\mathbf{t \geq 0}$, on a : $0 \leq f_1(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$.

2. a. Montrer alors que, pour tout nombre réel $\mathbf{t \geq 0}$ et tout entier $\mathbf{n \geq 1}$, on a :

$$0 \leq f_n(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}.$$

b. En déduire que, pour tout nombre réel $\mathbf{x \geq 0}$ et pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$, on a :

$$0 \leq F_n(x) \leq 2.$$

Partie C : Pour tout réel $\mathbf{u \geq 0}$ et pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$, on pose :

$$G_n(u) = \int_0^u t^n e^{-t}dt.$$

1. a. Montrer que pour tout entiers $\mathbf{n \geq 2}$:

$$G_n(u) = -u^n e^{-u} + nG_{n-1}(u).$$

b. En déduire que pour tout entier $\mathbf{n \geq 2}$:

$$G_n(u) = -n!\,e^{-u}\sum_{p=2}^{n}\frac{u^p}{p!} + n!\,G_1(u).$$

2. Montrer alors que pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$:

$$\lim_{u\to+\infty} G_n(u) = n!$$

3. a. Montrer que, pour tout réel $\mathbf{x \geq 0}$ et pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$, on a : $G_n'(nx) = n^n f_n(x)$ ($\mathbf{f_n}$ étant la fonction définie dans la partie A).

b. Montrer alors que pour tout réel $\mathbf{x \geq 0}$ et pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$, on a :

$$F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}}G_n(nx).$$

c. En déduire la valeur de :

$$\lim_{x\to+\infty} F_n(x).$$

Problème 14

Soit $\mathbf{n}$ un entier naturel et $\mathbf{F_n}$ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$F_n(x) = \int_1^x \frac{(\ln t)^n}{t^4}dt \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad F_0(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^4}.$$

Partie A

1. a. Montrer que $\mathbf{F_n}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $F_n'(x)$.

b. En déduire le sens de variation de $\mathbf{F_n}$ suivant la parité de $\mathbf{n}$.

2. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, on a :

$$F_{n+1}(x) = -\frac{(\ln x)^{n+1}}{3x^3} + \frac{n+1}{3}F_n(x).$$

b. Expliciter $F_0(x)$ puis $F_1(x)$ pour $x > 0$.

c. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{F_n}$ admet une limite finie si $\mathbf{x}$ tend vers $+\infty$.

On note :

$$L_n = \lim_{x\to+\infty} F_n(x)$$

Montrer que :

$$\mathbf{L_n} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{3^{n+1}}}.$$

3. On suppose que $\mathbf{n}$ est pair.

a. Montrer que pour $\mathbf{0} < \mathbf{t} \leq \mathbf{1}$, on a :

$$\frac{(\ln t)^n}{t^4} \geq \frac{(\ln t)^n}{t}.$$

b. En déduire que pour $\mathbf{x} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, on a :

$$F_n(x) \leq \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$$

Calculer alors $\lim_{x\to 0^+} F_n(x)$ lorsque $\mathbf{n}$ est pair.

4. On suppose que $\mathbf{n}$ est impair.

a. Montrer que pour $\mathbf{0} < \mathbf{t} \leq \mathbf{1}$, on a :

$$\frac{(\ln t)^n}{t^4} \leq \frac{(\ln t)^n}{t}.$$

b. En déduire que pour $\mathbf{x} \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, on a :

$$F_n(x) \geq \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$$

Calculer alors $\lim_{x\to 0^+} F_n(x)$ lorsque $\mathbf{n}$ est impair.

5. Dresser le tableau de variation de $\mathbf{F_n}$ si $\mathbf{n}$ est pair et si $\mathbf{n}$ est impair.

Partie B

1. Pour $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{x} > 0$, on pose :

$$G_n(x) = \int_0^{\ln x} t^n e^{-3t} dt.$$

a. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[, \quad F_n(x) = G_n(x)$.

b. En déduire que pour tout $\mathbf{x} \geq \mathbf{1}$, on a :

$$0 \leq F_n(x) \leq \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}.$$

c. Calculer $\lim_{n\to+\infty} F_n(\sqrt{e})$.

2. Pour tout entier $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(\sqrt{e}) \quad ; \quad I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-3t}}{1-t} dt$$

a. Montrer que $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-3t} t^n}{1-t} dt = I - S_n$$

b. Montrer que $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leq I - S_n \leq 2F_n(\sqrt{e})$.

c. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

d. Donner un entier $\mathbf{n_0}$ tel que S_{n_0} soit une valeur approchée de $\mathbf{I}$ à $\mathbf{10^{-3}}$ près.

Problème 15

Partie A : Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique **2** cm).

1. Montrer que $\mathbf{f}$ est paire.

2. Dresser le tableau de variation de $\mathbf{f}$. Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

3. Donner une interprétation géométrique de l'intégrale :

$$\mathcal{A} = 4\int_{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}^{0} f(t)dt.$$

Partie B

1. Montrer que f possède des primitives sur $[0,+\infty[$. Soit F une de ces primitives.

2. Soit la fonction :

$$G : \begin{cases} \left]0,\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad \int_{\ln(\tan x)}^{0} f(t)dt \end{cases}$$

a. Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{e^t}{1+e^{2t}}$$

b. Calculer $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $G'(x)$ pour tout réel x de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

c. Prouver que $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$:

$$G(x) = \frac{\pi}{4} - x$$

3. Trouver enfin la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Partie C : Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle J.

2. Tracer $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$, où g^{-1} est la réciproque de g.

3. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

4. Trouver le réel a de $\mathbb{R}^+$ tel que $f(a) = 1/e$.

Partie D : Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère la fonction H_n définie par :

$$H_n(x) = \int_{\frac{1}{e}}^{f(x)} (1+\ln t)^n dt.$$

1. Justifier que H_n est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.

2. Calculer $H_1(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} H_1(x)$.

3. a. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$H_{n+1}(x) = f(x)\left[1+\ln\left(f(x)\right)\right]^{n+1} - (n+1)H_n(x).$$

b. Montrer par récurrence sur n que la fonction H_n admet en $+\infty$ une limite finie non nulle que l'on notera L_n.

c. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_n = (-1)^{n-1} n! \frac{1}{e}$$

4. Montrer que H_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n'(x) = f'(x)\left[1+\ln\left(f(x)\right)\right]^n.$$

5. Discuter, suivant la parité de n, le tableau de variations de H_n (on ne demande pas de calculer $H_n(0)$).

Problème 16

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}, & x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $\mathbf{f}$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On admet que $\mathbf{f}'$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Justifier l'existence d'un réel $\mathbf{M} > 0$ tel que :

$$\forall(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad |\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a})| \leq \mathbf{M} \times |\mathbf{b} - \mathbf{a}|.$$

Partie B : Pour tous entiers $\mathbf{n}$ et $\mathbf{p} \geq \mathbf{1}$, on pose :

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(nx)dx \ \text{ et } \ \alpha_{n,p} = \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k\pi}{2p}\right) \int_{\frac{k\pi}{p}}^{\frac{(k+1)\pi}{p}} \sin(nx)\,dx.$$

1. Montrer que pour tout $(\mathbf{n},\mathbf{p}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left|\alpha_n - \alpha_{n,p}\right| \leq \frac{M\pi^2}{4p}.$$

2. Soit $\mathbf{p} \geq \mathbf{1}$ fixé. Après avoir calculé la quantité $\int_{\frac{k\pi}{p}}^{\frac{(k+1)\pi}{p}} \sin(nx)\,dx$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_{n,p} = 0.$$

3. Montrer que pour tout entier $\mathbf{p} \geq \mathbf{1}$, il existe un entier $\mathbf{N_0}$ tel que l'on ait :

$$n \geq N_0 \implies |\alpha_n| \leq \frac{M\pi^2}{2p}.$$

(On pourra utiliser l'inégalité: $|\alpha_n| \leq \left|\alpha_n - \alpha_{n,p}\right| + \left|\alpha_{n,p}\right|$).

Partie C : On pose pour tout entier naturel $\mathbf{n}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin x}dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{x}dx.$$

1. Justifier l'existence de $\mathbf{I_n}$ et $\mathbf{J_n}$.

2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$ (Utiliser les résultats de la partie B).

3. a. Exprimer la différence $\mathbf{I_n} - \mathbf{I_{n-2}}$ en fonction de $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$.

b. En déduire le calcul de $\mathbf{I_{2k+1}}$.

c. Calculer $\lim_{k\to+\infty} I_{2k+1}$.

4. En utilisant un changement de variable affine, montrer que :

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^{k\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}.$$

Donner une interprétation géométrique de cette limite.

Problème 17

Partie A : Le but de cette partie est d'étudier la convergence de la suite $(\mathbf{c_n})$ définie pour tout entier $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$ par :

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n.$$

1. Montrer que, pour tout réel $\mathbf{x} \geq \mathbf{1}$, on a :

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}.$$

2. On pose, pour tout entier naturel $\mathbf{n}$ non nul :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

a. Prouver que, pour tout $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$: $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$.

b. En déduire que la suite $(\mathbf{u_n})$ est divergente.

3. Soit $\mathbf{f}$ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

a. En utilisant l'encadrement obtenu à la question 1, montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

b. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$, $c_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$. En déduire que la suite (c_n) est croissante et que, pour tout $n \geq 2$, $f(1) \leq c_n \leq 1 - 1/n$.

c. Déduire des questions précédentes que la suite (c_n) converge vers un réel que l'on note γ.

Remarque : Ce réel γ s'appelle la constante d'Euler. Euler a calculé 16 décimales de γ en 1734 ($\gamma \cong 0,5772\ldots$). Actuellement, on ne sait toujours pas si γ est rationnel ou irrationnel.

Partie B :

Le but de cette partie est l'étude de la convergence de la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par :

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n\,[\mathrm{mod}.k]}{k}.$$

1. Justifier que :

$$\forall n \geq 1, \qquad U_n = \frac{1}{n}\sum_{k1}^{n}\left(\frac{n}{k} - \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right).$$

où $\lfloor z \rfloor$ représente la partie entière par défaut du nombre réel z.

2. On considère la fonction h définie sur $]0;1]$ par :

$$h(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor\frac{1}{t}\right\rfloor$$

On définit la fonction H sur $]0;1]$ par :

$$H(x) = \int_x^1 h(t)dt$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$V_n = H\left(\frac{1}{n}\right).$$

a. Montrer que :

$$\forall n \geq 1, \ V_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}\right].$$

b. En déduire que :

$$\forall n \geq 1, \ V_n = \ln(n) - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = -c_n$$

où c_n est le terme général de la suite définie à la partie A.

c. Déterminer alors la limite de V_n.

3. Pour tout réel x de $]0;1[$, on pose :

$$n_x = \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$$

a. Montrer que pour tout x de $]0;1[$:

$$0 \leq \int_x^{1/n_x} h(t)dt \leq \frac{1}{n_x} - x.$$

b. En déduire que $\int_0^1 h(t)dt = 1 - \gamma$ puis donner la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini.

Problème 18

Partie A : On considère la fonction f de variable réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}\,dt.$$

1. Montrer que pour réel x : $f(x)\leq e^{-x}$ et en déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Soit b un réel strictement positif. Montrer que :

$$\forall x\leq b,\ \ e^x-1-x\leq \frac{1}{2}e^b.x^2$$
$$\forall x\geq -b,\ \ e^x-1-x\geq \frac{1}{2}e^{-b}.x^2$$

3. Soit a un nombre réel. On définit la fonction φ_a de variable réelle x par :

$$\begin{cases}\varphi_a(a)=0\\ \varphi_a(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}dt\ \ \text{si } x\neq a\end{cases}$$

   a. Soit $h>0$ et x de $[a-h,a+h]$ et t de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. Montrer que :

$$\frac{1}{2}e^{\frac{-h}{\cos^2 t}}\left(\frac{a-x}{\cos^2 t}\right)^2+\frac{a-x}{\cos^2 t}\leq e^{\frac{a-x}{\cos^2 t}}-1\leq \frac{1}{2}e^{\frac{h}{\cos^2 t}}\left(\frac{a-x}{\cos^2 t}\right)^2+\frac{a-x}{\cos^2 t}$$

   b. En utilisant cette double inégalité, montrer que φ_a est continue en **a**.

   c. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$\int_0^x e^{-u^2}du=x\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{e^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t}dt.$$

3. On pose pour tout x de $\mathbb{R}$: $g(x)=f(x^2)$.
   Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$g'(x)=-2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du.$$

4. On pose pour tout x de $\mathbb{R}$: $h(x)=g(x)+\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2$.
   Calculer $h'(x)$. Que peut-on en déduire ?
5. Déduire de ce qui précède la valeur de :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Partie B : On considère la fonction F définie par : $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de F.
3. Construire la courbe $(\mathcal{C}_F)$ représentant F dans un repère orthonormé.

Problème 19

Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\forall n\geq 3,\qquad \pi(2n+1)\geq \ln(2)\times\frac{2n+1}{\ln(2n+1)}$$

où $\pi(x)$ désigne le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x.

1. Soient n et p deux entiers naturels. On pose :

$$I_{p,n}=\int_0^1 x^p(1-x)^n dx$$

a. Calculer $I_{p,0}$ et $I_{p,1}$.
b. Calculer $I_{0,n}$ et en déduire $I_{1,n}$.
c. Établir, pour $n \geq 1$, la relation :

$$I_{p,n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,n-1}$$

En déduire que

$$I_{p,n} = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}$$

d. Calculer $I_{n,n}$ en utilisant la formule du binôme Newton pour le développement de $(1-x)^n$ puis en déduire l'égalité :

$$\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{n+k+1}$$

2. a. Soit D_n le PPCM des entiers $n+1, n+2, \dots, 2n+1$.
Montrer qu'il existe un entier naturel $a \geq 1$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{n+k+1} = \frac{a}{D_n}$$

b. En déduire que :

$$D_n \geq \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}.$$

c. Soit $D_n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de D_n.
Justifier que pour tout i compris entre **1** et **k**, $p_i^{\alpha_i}$ divise l'un des entiers $n+1, n+2, \dots, 2n+1$. En déduire que $p_i^{\alpha_i} \leq 2n+1$ puis que $k \leq \pi(2n+1)$.

3. a. Montrer que $D_n \leq (2n+1)^{\pi(2n+1)}$.
b. Montrer par récurrence que pour tout naturel $n \geq 3$:

$$\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \geq 2^{2n+1}$$

c. En déduire la minoration annoncée en début de l'exercice.

Problème 20

Le but de cet exercice est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini. Pour cela, on va démontrer que si l'ensemble des nombres premiers est fini, alors on ne peut pas décomposer en facteurs premiers tous les entiers naturels de **1** à **n** pour **n** « assez » grand.
On note **P** l'ensemble des nombres premiers et on suppose que l'ensemble **P** est fini. On peut alors écrire : $P = \{p_1; p_2; \dots, p_k\}$, où **k** est un entier naturel non nul et $p_1 < p_2 < \dots < p_k$.
Soit **n** un entier naturel fixé, on suppose que la décomposition en facteurs premiers de **n** s'écrit :

$n = {p_1}^{\alpha_1(n)} \times {p_2}^{\alpha_2(n)} \times \dots \times {p_k}^{\alpha_k(n)}$ où $\alpha_i(n)$ est un entier naturel éventuellement nul.

1. Démontrer que pour tout **i** de $[\![1;k]\!]$: ${p_i}^{\alpha_i(n)} \leq n$.
2. a. Démontrer que pour tout i de $[\![1;k]\!]$:

$$\alpha_i(n) \leq \frac{\ln(n)}{\ln(p_i)}$$

b. En déduire que pour tout i de $[\![1;k]\!]$:

$$\alpha_i(n) \leq \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$$

c. Soit m un entier naturel inférieur ou égal à n et $\alpha_i(m)$ l'exposant de p_i dans la décomposition en facteurs premiers de l'entier m. Donner un majorant de $\alpha_i(m)$.

3. On a supposé que l'ensemble **P** est fini et contient $\mathbf{k}$ nombres premiers distincts deux à deux. Donc décomposer un entiers $\mathbf{m}$ inférieur ou égal à $\mathbf{n}$, c'est choisir un k-uplet de la forme : $(\alpha_1(m);\ \alpha_2(m);\ldots;\ \alpha_k(m))$.

a. Démontrer que le nombre de ces k-uplets est majoré par :

$$\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right)^k$$

b. Démontrer qu'alors :

$$n \leq \left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right)^k$$

4. a. Démontrer que la quantité :

$$\frac{\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right)^k}{n}$$

tend vers $\mathbf{0}$ lorsque $\mathbf{n}$ tend vers $+\infty$.

b. En déduire que si $\mathbf{n}$ est « assez grand », alors :

$$n > \frac{\left(\frac{\ln(n)}{\ln(2)}\right)^k}{n}$$

5. Conclure.

Problème 21

Soit $\mathbf{n}$ un entier naturel non nul. On considère la suite (H_n) définie par :

$$H_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

1. Montrer que les suites (H_n) et $\left(H_n + \frac{1}{n}\right)$ sont adjacentes.

2. Pour tout réel $\mathbf{x}$, on pose :

$$G_n(x) = i\left[(x-i)^{2n+1} - (x+i)^{2n+1}\right]$$

a. Montrer que :

$$G_n(x) = 2(2n+1)x^{2n} - 2C_{2n+1}^{2n-2}x^{2n-2} + \cdots + 2(-1)^{n-p}C_{2n+1}^{2p}x^{2p} + \cdots + 2(-1)^n$$

b. Montrer que les solutions de l'équation $G_n(x) = 0$ s'écrivent sous la forme :

$$x_k = -\cot\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right),\quad k \in [\![1, 2n]\!]$$

c. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_{2n-k} = -x_{k+1}$.

d. En déduire que :

$$G_n(x) = \lambda\left(\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)\right)$$

où λ est un entier naturel.

3. En exploitant les questions **2.a.** et **2.b.**, établir que :

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n(2n-1)}{6}$$

4. En utilisant la double inégalité :

$$\cot^2(\theta) < \frac{1}{\theta^2} < 1 + \cot^2(\theta) \quad \text{pour } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

En déduire que :

$$\frac{\pi^2}{6}\times\frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2}\leq H_n\leq\frac{n\pi^2}{(2n+1)^2}+\frac{\pi^2}{6}\times\frac{2n(2n-1)}{(2n+1)^2}$$

5. En déduire la limite de la suite (H_n).

Problème 22(Équations de droites et de cercles en complexes)

Le plan complexe **P** étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, à tout point M de coordonnées (x,y) , on associe son affixe $z=x+iy$.

Partie A

1. Étant donnés un nombre complexe non nul $w=u+iv$, u et v réels, et un réel h, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\overline{w}z+w\overline{z}=h$.

2. Soit D la droite dont une équation est $ax+by+c=0$ avec a, b et c réels et $(a,b)\neq(0,0)$. Trouver un complexe non nul w et un réel h tels que D soit l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie la relation $\overline{w}z+w\overline{z}=h$.

Partie B

1. Étant donnés un complexe w et un réel k, déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation $z\overline{z}-\overline{w}z-w\overline{z}+k=0$ (On aura à discuter suivant le signe de $|w|^2-k$).

2. Soit C le cercle de centre le point de coordonnées (a,b), de rayon R. Trouver un complexe w et un réel k tels que C soit l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie la relation $z\overline{z}-\overline{w}z-w\overline{z}+k=0$.

Partie C

On note P^* l'ensemble $P-\{O\}$. On considère l'application f de P^* dans P^* qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z'=\frac{1}{\overline{z}}$$

1. Montrer que pour tout point M de P^*, les points M et $M'=f(M)$ appartiennent à une même demi-droite d'origine O.

2. Montrer que f est involutive (f est une involution si et seulement si f est une bijection de P^* sur P^* égale à sa réciproque). Préciser l'ensemble des points invariants par f.

3. a. Soit (D) une droite ne contenant pas le point O. En utilisant les parties A et B, déterminer l'image de (D) par l'application f.

b. Soit U une droite contenant le point O. Déterminer l'image de $U^*=U-\{O\}$ par f.

4. Soit C un cercle passant par O. Déterminer l'image de $C^*=C-\{O\}$ par f.

Partie D

1. Soient A et B deux points de P^* d'images respectives A' et B' par f. Exprimer la distance $A'B'$ en fonction des distances AB, OA et OB.

2. Soient un cercle C passant par O et trois points R, S et T sur ce cercle tels que O, R, S et T soient deux à deux distincts et tels que le point d'intersection des droites (OR) et (RT) appartienne au segment $[RT]$.
Montrer que : $OS.RT=OR.TS+OT.RS$ (on pourra considérer l'image par f de C^* et utiliser le fait qu'un point B appartient à un segment $[AC]$ si et seulement si $AB+BC=AC$).

3. Soient trois points R, S et T du plan P tels que O, R, S et T soient deux à deux distincts et tels que :

$$OS.RT=OR.TS+OT.RS$$

Montrer que les points O, R, S et T sont cocycliques ou alignés.

Problème 23

Dans un plan **(P)**, rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$, on donne deux points fixes et distincts F et F'. On suppose de plus que la droite (FF') ne passe pas par O et que les distances OF et OF' ne sont pas égales.
On désigne par f et f' les affixes de F et F'. Soit l'équation du second degré en X :

$$X^2 - \lambda(f + f')X + \lambda ff' = 0$$

(λ étant un réel non nul). On désigne par m et m' les racines de cette équation et par M et M' leurs images.

1. Quelles relations lient m, m', λ, f et f' ? En déduire que les couples de droites $(\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OF'})$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ ont les mêmes bissectrices.

2. Vérifier que :

$$\frac{(m - f)(m - f')}{m^2} = \frac{(m' - f)(m' - f')}{m'^2} = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

En déduire que, si $\lambda \in]0, 1[$, la droite (OM) est une bissectrice de $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{FM'})$ et (OM') une bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{M'F}, \overrightarrow{M'F'})$.

3. Soit s l'affixe du milieu S de $[MM']$. Quel est le lieu du point S lorsque λ varie ? Démontrer que le point Φ, d'affixe φ, définie par :

$$\frac{2}{\varphi} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}$$

n'appartient pas à cet ensemble (On ne cherchera pas à construire Φ).

4. Établir la relation :

$$s(s - \varphi) = \frac{(m - m')^2}{4}.$$

Quelle est la bissectrice de $(\overrightarrow{SO}, \overrightarrow{S\Phi})$?

5. On suppose désormais que, a étant une longueur donnée :

$$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OF}\right) = \frac{\pi}{4}\ , \quad \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OF'}\right) = \frac{3\pi}{4}\ , \quad f + f' = 2a\left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right)$$

Construire F et F'. Calculer φ et démontrer que Φ est le symétrique de O par rapport à la droite (FF').

6. On pose $\theta = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$ et $r = OM$. Démontrer que :

$$r = \frac{a\sqrt{2}}{2} . \frac{\sin(2\theta)}{\sin\left(\frac{3\pi}{8} - \theta\right)}.$$

Problème 24

Soit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $f(z) = z + j^2.\bar{z}$ où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer $f(i)$, $f(j)$, $f(i + j)$.

2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ j^2.f(z) \in \mathbb{R}$.

3. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)|^2 - 2|z|^2 = 2\mathrm{Re}(jz^2)$.

4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$.
Déterminer les deux ensembles : $(E_1) = \{M(z)/f(z) = 0\}$ et $(E_2) = \{M'(f(z))/z \in \mathbb{C}\}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = j$.

6. On pose $f^1 = f$ et $f^n = f \circ f^{n-1}$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.

a. Déterminer f^2, f^3 et f^4.

b. En déduire l'expression de $f^n(z)$ en fonction de n, z et j.

7. Soit a, b et c trois nombres complexes.

a. Vérifier que $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+b\bar{j}+cj)(a+bj+c\bar{j})$.

b. Soit ABC un triangle et a, b et c les affixes de A, B et C. Montrer l'équivalence :

$$\left|\begin{array}{c}ABC \text{ équilatéral}\\ \text{ou}\\ \text{de centre de gravité } O\end{array}\right. \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^3-3iz+1-i=0$.

Problème 25

Les trois parties A, B et C sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.

Partie A

Soient $n+1$ réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n$ et soit le polynôme :

$$P(z)=a_0+a_1z+\dots+a_nz^n$$

1. Montrer que pour tout nombre complexe z :

$$|(1-z)P(z)| \geq a_0-[(a_0-a_1)|z|+(a_1-a_2)|z|^2+\dots+(a_{n-1}-a_n)|z|^n+a_n|z|^{n+1}]$$

2. Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=a_0-[(a_0-a_1)x+(a_1-a_2)x^2+\dots+(a_{n-1}-a_n)x^n+a_nx^{n+1}]$$

Quelle est la monotonie de f ?

3. En déduire que toute racine z du polynôme P est telle que $|z| \geq 1$.

4. Vérifier ce résultat avec $P(z)=1+z+z^2+\dots+z^n$.

Partie B

Soit p un entier naturel non nul et l'équation suivante d'inconnue z :

$$(E_p): \quad pz^p=z^{p-1}+z^{p-2}+\dots+z+1=\sum_{k=0}^{p-1} z^k$$

On rappelle que pour tous nombres complexes $z_1, z_2, \dots, z_n$, on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|$$

1. Dans cette question, on se demande si (E_p) peut admettre une solution de module strictement supérieur à 1. Soit z une solution (E_p) de module $r>1$.

a. Montrer que : $p \times r^p(r-1) \leq r^p-1$

b. Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=px^{p+1}-(p+1)x^p+1$. Étudier les variations de f.

c. En déduire que l'on ne peut pas avoir $f(r) \leq 0$. Conclure.

2. Soit $e^{i\theta}$ une solution de (E_p) de module 1, autre que 1.

a. Justifier l'égalité :

$$e^{\frac{i(p+1)\theta}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{p\theta}{2}\right)}{p\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

b. En déduire que $p=-1$. Conclure.

Partie C

Soit $P(x)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+a_{n-2}X^{n-2}+\dots+a_2X^2+a_1X+a_0$ un polynôme de degré $n \geq 2$, à coefficients complexes. Si α_1, α_2, …, α_n sont les racines de P, on pose :

$$R=\max(|\alpha_1|,|\alpha_2|,\dots,|\alpha_n|) \quad \text{et} \quad A=\max(|a_0|,|a_1|,\dots,|a_n|)$$

1. a. Montrer que si z est une racine du polynôme P, alors on a :

$$|z|^n \leq A\left(\sum_{k=0}^{n-1}|z|^k\right).$$

b. En déduire que si z est une racine de P, alors : $|z| \leq A+1$.

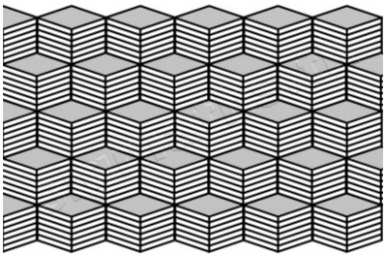
c. Quelle relation peut-on en déduire entre R et A ?

2. Application : Soit le polynôme $Q(X) = (2+i)X^3 - 7iX^2 + (9i-2)X - 3i$.

a. En se basant sur les coefficients du polynôme Q, expliquer pourquoi on est sûr que les nombres complexes suivants : $5+2i$, $-2+4i$ et $4-i\sqrt{2}$ ne peuvent pas être racines du polynôme Q.

b. Expliquer pourquoi on est en doute quant aux nombres complexes :

$$4+i,\quad 2-3i.$$



Motif emprunté à Sigmaths