$2^{ème}$ évaluation (janvier 2024)

Mathématiques

Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = (x.\ln x)e^{2x}$ avec $x > 0$.

1. Résoudre l'équation (H) : $y' - 2y = 0$.

2. On considère la fonction h définie par $h(x) = e^{2x}g(x)$ où g est une fonction dérivable sur $]0; +\infty[$.

a. Déterminer $g'(x)$ pour que h soit solution de (E).

b. Calculer $\int_1^x t.\ln t\, dt$ pour $x \in]0; +\infty[$ et en déduire $g(x)$ sachant que $g(1) = 0$.

3. Résoudre l'équation (E).

4. Sans utiliser l'intégration par parties, calculer :

$$I = \int_1^2 \left[(x^2 + x)\ln x - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{4}\right] e^{2x}\, dx$$

Exercice 2

Un éleveur élève des lapins. On suppose que, chaque mois, chaque couple de lapins donne naissance à deux couples de lapins, lesquels ne se reproduiront qu'après deux mois. L'éleveur achète en plus chaque mois un couple de lapins nouveau-nés. Il débute par un seul couple de lapins. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n le nombre de couples de lapins au bout de n mois. Ainsi : $\ell_0 = 1$; $\ell_1 = 2$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n : $\ell_{n+2} = 2\ell_n + \ell_{n+1} + 1$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ \ell_{n+1} \end{pmatrix}$.

Justifier que pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = A \times U_n + C$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \times A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} \times I_2.$$

4. Déterminer la matrice colonne $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que : $V = A \times V + C$.

5. On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - V$.

a. Calculer V_0.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = A \times V_n$ puis que $V_n = A^n \times V_0$.

c. En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

6. Au bout de combien de mois est-on certain qu'il y a plus de 1000 couples de lapins ? Plus de $10\,000$ couples de lapins ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}.\ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Étudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

b. Dresser le tableau des variations de f.

c. Montrer que le point A de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ d'abscisse 1 est un point d'inflexion.

d. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ en précisant la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en A.

2. Pour tout entier naturel $p \geq 1$ et pour tout réel $x \in]0;1[$, on pose :

$$F_p(x) = \int_x^1 \sqrt{t}(\ln t)^p \, dt$$

a. Calculer $F_1(x)$ puis déterminer la limite de $F_1(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

b. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, et pour tout réel $x \in]0;1[$, on a :

$$F_{p+1}(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x}[\ln x]^{p+1} - \frac{2}{3}(p+1)F_p(x)$$

c. Montrer par récurrence que $F_p(x)$ admet une limite finie u_p, que l'on demande de déterminer, lorsque x tend vers 0^+.

Exercice 4

Partie A : On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \ln(1 + e^{-x}) - \frac{1}{e^x + 1}.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. Montrer que pour tout réel x :

$$g'(x) = -\frac{1}{(1 + e^x)^2}.$$

3. En déduire que pour tout réel x, on a : $g(x) > 0$.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \times \ln(1 + e^{-x})$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. **a.** Montrer que pour tout réel x, on a : $f(x) = -xe^x + e^x \times \ln(1 + e^x)$.
   b. En déduire la limite de f en $(-\infty)$.
3. **a.** Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que $f'(x) = e^x \times g(x)$.
   c. Dresser le tableau de variation de f.
4. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Partie C : Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^1 e^{\frac{x}{n}} \ln(1 + e^{-x}) \, dx$$

1. a. Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$f(x) - f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

b. Hachurer sur le graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aires, est égale à u_1.

c. Calculer u_1.

2. a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b. En déduire que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n \times \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right)\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \leq u_n \leq n \times \ln 2 \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right).$$

d. En déduire un encadrement de ℓ.

« *Le seul endroit où la réussite vient avant le travail c'est dans le dictionnaire.* »

Bonne chance