

Évaluation (février 2024)

Épreuve de mathématiques – Durée : 4 heures

Exercice 1

La loi de refroidissement de Newton s'énonce ainsi : « la vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant ». Autrement dit, si $f(t)$ désigne la température d'un corps inerte à l'instant t et T désigne la température du milieu ambiant (T est supposée constante), on a : $f'(t) = a(T - f(t))$ où a désigne une constante dépendant des conditions expérimentales.

Indication : remarquer que $(f(t) - T)' = -a(f(t) - T)$.

Dans tout l'exercice, le temps t est exprimé en minutes.

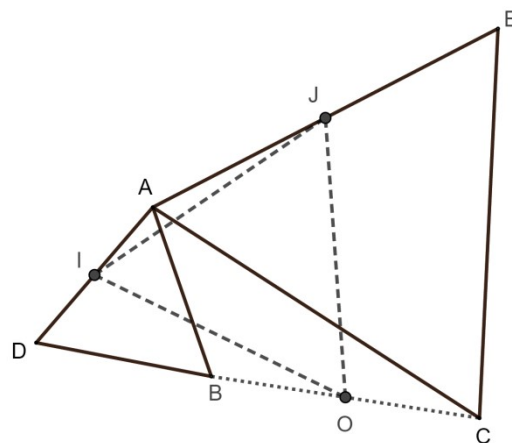
1. Dans une cuisine, il fait 20°C . A l'instant $t = 0$, on verse dans le bol du petit Pierre de la soupe à 60°C . On note $f(t)$ la température de la soupe après t minutes. Exprimer $f(t)$ en fonction de t et a .
2. Au bout de 2 minutes, Pierre n'a toujours pas bu sa soupe qui est maintenant à la température de 45°C . Calculer la valeur de la constante a . (On arrondira à 10^{-3} près)
3. Sachant que Pierre ne boit sa soupe que lorsque sa température passe en dessous de 25°C , combien de temps ses parents devront-ils attendre avant que leur enfant commence à boire sa soupe ?

Exercice 2

Dans le plan orienté, on considère deux triangles équilatéraux directs ADB et ACE ayant le sommet A en commun (voir figure). On note O le milieu de $[BC]$, I et J les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[AE]$. On se propose de démontrer par deux méthodes différentes que le triangle OIJ est équilatéral.

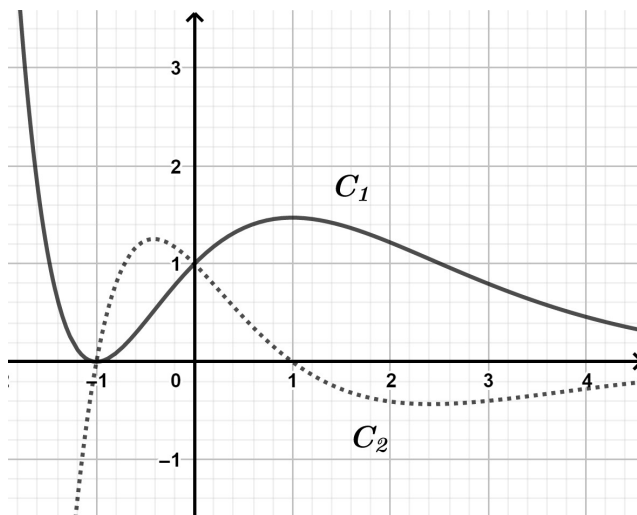
1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s de centre C telle que $s(J) = A$. On note K l'image du point O par s .
2. a. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s' de centre B telle que :

$$s'(A) = I.$$
b. Démontrer que le triangle OCK est rectangle en O , puis déterminer l'image de K par s' .
3. Soit $r = s' \circ s$. Démontrer que r est une rotation de centre O . Préciser son angle.
4. Démontrer que le triangle OIJ est équilatéral.
5. Donner une autre démonstration fondée sur l'utilisation des nombres complexes.

Exercice 3

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, où a , b et c sont des réels. On donne les deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentatives des fonctions f et f' où f' désigne la fonction dérivée de f .

1. Préciser, avec justification, la courbe correspondant à chacune des deux fonctions f et f' .
2. A l'aide d'une lecture graphique, déterminer les réels a , b et c .
3. Dresser le tableau de variation de f .
4. Déterminer, avec justification et sans calcul, le nombre de points d'inflexions éventuels pour la courbe représentative de f .
5. Déterminer graphiquement l'aire $\mathcal{A}$ de la région du plan limitée par la courbe représentative de f' et les droites d'équations :
 $y = 0$, $x = -1$ et $x = 0$.



Partie B : On considère la suite (I_n) définie par :

$$I_0 = \int_{-1}^0 e^{-t} dt ; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \frac{1}{n!} \int_{-1}^0 (1+t)^n e^{-t} dt$$

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$\frac{1}{n+1} \leq n! \times I_n \leq \frac{e}{n+1} \quad (1)$$
- b. En déduire que la suite (I_n) est convergente et préciser sa limite.
2. a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + I_n$$

- b. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$I_n = e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad (2)$$

Déterminer alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

3. Calculer I_2 et en déduire l'aire de la région du plan limitée par les courbes C_1 et C_2 et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
4. On se propose dans cette question de montrer que le nombre e n'est pas rationnel. Pour cela on procède par l'absurde : on suppose que $e = p/q$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls et on pose $u_n = n! \times I_n$.
 - a. Comment faut-il choisir l'entier n pour que u_n soit un entier ? (utiliser (2))
 - b. Utiliser l'encadrement (1) pour montrer qu'on peut choisir n tel que $0 < u_n < 1$.
 - c. Conclure.

Exercice 4

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

L'objectif de cet exercice est le calcul de la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $(+\infty)$.

Partie A

1. Justifier l'existence de $F(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier le sens de variation de F et montrer que F est impaire.
3. a. Vérifier que pour tout $t \in [2; +\infty[$, on a : $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$.
b. En déduire que pour tout réel $x \geq 2$:

$$F(x) \leq \frac{1 - e^{4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$$

- c. Prouver que pour tout réel $x \geq 2$:

$$F(x) \leq \frac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$$

4. Montrer que F est majorée sur $\mathbb{R}$ et que F possède une limite finie L en $(+\infty)$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x}}{\cos^2 t} dt$$

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, on a : $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. On pose, pour tout x de $\mathbb{R}$ et pour tout t de $] -\pi/2; \pi/2[$, $g(t) = F(x \cdot \tan t)$.

- a. Montrer que g est dérivable sur $] -\pi/2; \pi/2[$ et que :

$$g'(x) = \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \tan^2 t}$$

- b. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :

$$F(x) = x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t} dt$$

3. En admettant que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$f'(x) = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x}}{\cos^2 t} dt$$

prouver que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $[f(x^2)]' = -2e^{-x^2} F(x)$.

4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(x^2) + [F(x)]^2$.

- a. Montrer que h est une fonction constante que l'on précisera.
- b. En déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Prises d'initiatives

Les bonus (facultatifs)

Bonus 1 (1 point) :

Comparer les deux nombres π^e et e^π (lequel est le plus grand ?).

Bonus 2 (1 point) :

Dans une journée de 12 heures, combien de fois les aiguilles des heures et des minutes d'une horloge font un angle droit entre elles ?

Indication : le quadrant d'une horloge peut être assimilé au cercle trigonométrique.



Fin