ÉCOLE MENABI EL OULOUM

FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE e

Classes : 7^{e}CD

Définition

La fonction logarithme népérien est une bijection de l'intervalle $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Donc elle admet une fonction réciproque définie de $\mathbb{R}$ vers $]0;+\infty[$.

On note, provisoirement, cette réciproque « exp ». Ainsi, on a :

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \,]0;+\infty[\quad \text{telle que :}$$

$$\exp(x) = y \iff \ln(y) = x$$

Conséquences immédiates

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(1) = e$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

  La fonction exp compense l'effet de ln.
- La fonction exp transforme une S.A en une S.G

  $$(u_n)\ S.A \implies (v_n = \exp(u_n))\ S.G$$

Notation définitive

On a :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\exp(n.x) = [\exp(x)]^n$$

Pour $x = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$$

Ainsi, on note :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = e^x$$

Leonhard Euler
(1707-1783)

Réécriture des propriétés

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$
- $\forall x \in \,]0;+\infty[\,,\ e^{\ln(x)} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $\forall x, y \in \mathbb{R},\ e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ e^{nx} = (e^x)^n$

Dérivée de la fonction $x \longmapsto e^x$

On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$, donc en dérivant par rapport à la variable x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (e^x)' \times (\ln)'(e^x) = 1$$

soit encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (e^x)' \times \frac{1}{e^x} = 1$$

et donc enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (e^x)' = e^x > 0$$

La fonction $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dérivée de la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I :

$$\forall x \in I, \qquad (e^u)'(x) = u' \times e^{u(x)}$$

Conséquence :

Les fonctions $x \longmapsto e^{u(x)}$ et $x \longmapsto u(x)$ varient dans le même sens.

Exemple

La fonction $x \longmapsto e^{-3x+4}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction $x \longmapsto -3x+4$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (e^{-3x+4})' = (-3x+4)'.e^{-3x+4} = -3e^{-3x+4}$$

EXERCICE 1

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes tout en précisant son domaine de dérivabilité :

1) $f(x) = e^{2x-3}$

2) $f(x) = e^{\sqrt{3-2x}}$

3) $f(x) = e^{(2x-3)/(2-x)}$

4) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

5) $f(x) = \frac{e^x+2}{e^x-1}$

Équations et Inéquations

En vertu de la croissance de la fonction $\exp$:

- $e^x = 1 \iff x = 0$
- $e^x > 1 \iff x > 0$
- $e^x < 1 \iff x < 0$

EXERCICE 2

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et inéquations :

1) $e^{2x+1} \leq e^2$

2) $e^{1-2x} \geq e^x$

3) $e \geq e^{2x-3}$

4) $e^{-x-1} < -1$

5) $\ln(2x-1) = 2$

6) $\ln(4-2x) \leq 0$

Limites usuelles

Les limites de la fonction « exp » découlent de la fonction « ln » :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Croissances comparées

① $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \left[\frac{\text{escargot}}{\text{cheval}}\right]$

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \left[\frac{\text{fusée}}{\text{cheval}}\right]$

③ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0 \quad \left[\frac{\text{escargot}}{\text{fusée}}\right]$