ÉCOLE MENABI EL OULOUM

Classes : 7eCD

FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Pourquoi le logarithme ?

Au seizième siècle, le mathématicien écossais John NEPER a voulu créer un procédé pour faciliter le calcul dans une époque où la machine n'a pas encore vu le jour pour répondre alors à la demande de plus en plus grandissante des commerçants et de la navigation maritime. Il imagina la fonction LOGARITHME qui transforme la multiplication en une addition et la division en une soustraction.

Ainsi, il est arrivé à alléger la pénibilité du calcul en réduisant les quatre opérations en deux opérations : addition et soustraction jugées plus faciles.

John Néper
(1550-1617)

Définition

La fonction inverse $x \longmapsto 1/x$ est définie et <u>continue</u> sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Donc elle y admet des primitives. Parmi toutes ses primitives, il existe une seule N telle que $N(1)=0$.

Ainsi, on a :

$$N : \ ]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que :}$$
$$\forall x>0,\ N'(x)=1/x \ ,\ \ N(1)=0$$

Conséquences immédiates

- La fonction N est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$:

$$0<x<y \implies N(x)<N(y) \,;$$

- $0<x<1 \implies N(x)<0$;
- $x>1 \implies N(x)>0$.

Propriété fondamentale

Il s'agit de montrer que la fonction $\mathbf{N}$ ainsi définie vérifie le critère de NEPER c'est-à-dire qu'elle transforme la multiplication en une addition autrement dit elle transforme un produit en une somme. Pour cela, on définit la fonction $\mathbf{F}$ de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall \mathbf{x} > \mathbf{0}, \qquad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) + [\mathbf{N}(\mathbf{x}.\mathbf{a}) - \mathbf{N}(\mathbf{x}) - \mathbf{N}(\mathbf{a})]$$

où $\mathbf{a}$ est un réel strictement positif fixé.

Tout d'abord, la fonction $\mathbf{F}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ puisque la fonction $\mathbf{N}$ l'y est, et plus précisément comme $\mathbf{N}(\mathbf{a})$ est constant et $[\mathbf{N}(\mathbf{x}.\mathbf{a})]' = (\mathbf{ax})'.\mathbf{N}'(\mathbf{ax}) = \mathbf{a}.\mathbf{N}'(\mathbf{ax})$ alors :

$$\forall \mathbf{x} > \mathbf{0}, \qquad \mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{N}'(\mathbf{x}) + [\mathbf{a} \times \mathbf{N}'(\mathbf{x}.\mathbf{a}) - \mathbf{N}'(\mathbf{x})] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} + \left[\mathbf{a} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ax}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}\right] = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}} = \mathbf{N}'(\mathbf{x})$$

De plus : $\mathbf{F}(\mathbf{1}) = \mathbf{N}(\mathbf{1}) + [\mathbf{N}(\mathbf{a}) - \mathbf{N}(\mathbf{1}) - \mathbf{N}(\mathbf{a})] = \mathbf{0}$.

Enfin, on obtient : $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0},\ \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})$, et par suite : $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0},\ \mathbf{N}(\mathbf{x} \times \mathbf{a}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) + \mathbf{N}(\mathbf{a})$.

Le réel $\mathbf{a}$ étant quelconque dans $]0;+\infty[$, on peut généraliser ce résultat :

$$\forall \mathbf{x} > \mathbf{0}, \forall \mathbf{y} > \mathbf{0}, \qquad \mathbf{N}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) + \mathbf{N}(\mathbf{y})$$

Notation définitive : La fonction $\mathbf{N}$ est appelée la fonction <u>l</u>ogarithme <u>n</u>épérien et notée **ln**.

Ainsi, on a :

- $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0}, (\ln \mathbf{x})' = \mathbf{1}/\mathbf{x}$;
- $\ln(\mathbf{1}) = \mathbf{0}$;
- $\forall \mathbf{x} > \mathbf{0}, \forall \mathbf{y} > \mathbf{0},\ \ln(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \ln(\mathbf{x}) + \ln(\mathbf{y})$;
- $\mathbf{0} < \mathbf{x} < \mathbf{1} \implies \ln(\mathbf{x}) < \mathbf{0}$;
- $\mathbf{x} > 1 \implies \ln(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$.

Quelques propriétés

On a : $\forall x > 0, \forall y > 0, \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$

Ainsi :

- ln transforme un produit en une somme ;
- ln transforme donc une suite géométrique en une suite arithmétique.

Soit la S.G : $u_{n+1} = q.u_n$ avec $u_0 > 0$ et $q > 0$

Posons $v_n = \ln(u_n)$. On a :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(q.u_n) = \ln(u_n) + \ln(q)$$
$$v_{n+1} = v_n + \ln(q)$$

Propriétés algébriques

Elles traduisent une dualité entre la multiplication et l'addition :

$\forall x, y \in]0; +\infty[$ et $\forall r \in \mathbb{Q}$, on a :

- $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$ (somme → produit);
- $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ (inverse → opposé);
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ (quotient → différence);
- $\ln(x^r) = r.\ln(x)$ (puissance → multiple);
- $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$ (racine carrée → moitié).

EXEMPLES DE CALCUL

Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ les nombres réels suivants :

$$A = \frac{1}{2}\ln(32) \qquad B = \ln\left(\frac{1}{27}\right)$$
$$C = \ln(72) - 3\ln(3) \qquad D = 5\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

CORRIGE

- $A = \frac{1}{2}\ln(32) = \frac{1}{2}\ln(2^5) = \frac{5}{2}\ln(2)$
- $B = \ln\left(\frac{1}{27}\right) = -\ln(27) = -\ln(3^3) = -3\ln(3)$
- $C = \ln(72) - 3\ln(3)$
  $= \ln(2^3 \times 3^2) - 3\ln(3)$
  $= 3\ln(2) + 2\ln(3) - 3\ln(3)$
  $= 3\ln(2) - \ln(3)$
- $D = 5\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = 5[\ln(\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2})]$
  $= 5\left[\frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(2)\right]$
  $= \frac{5}{2}(\ln(3) - \ln(2))$

EXERCICE 1

Exprimer en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$ les nombres réels suivants :

$$a = \ln\left(\frac{64}{125}\right); \quad b = \ln(625) + 4\ln(30); \quad c = 5\ln(60) - 2\ln(45)$$

Étude de la fonction ln

- **LIMITES USUELLES**
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$
  - $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$
  - $\lim\limits_{x\to0^+} x.\ln(x) = 0$
  - $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
  - $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstrations

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$:

Pour tout naturel n, il existe un réel x tel que :

$$2^n < x.$$

Donc $\ln(2^n) < \ln(x)$ et par suite $n.\ln(2) < \ln(x)$.
Si n tend vers $+\infty$ alors $n.\ln(2)$ tend vers $+\infty$ et par comparaison $\ln(x)$ tend vers $+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$:

Si x tend vers 0^+ alors 1/x tend vers $+\infty$. Comme :

$$\ln(x) = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

alors $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0^+.

- $\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$:

On peut écrire :

$$\frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln(x) - \ln 1}{x-1}$$

On reconnait, par passage, à la limite le nombre dérivé de la fonction ln au point 1.

EXEMPLE DE CALCUL DE LIMITES

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x - \ln(x)}{2x + \ln(x)}$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}.\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{x}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} x.\ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} x.\ln(x) - (x+1).\ln((x+1)$

CORRIGE

1) On a :

$$\frac{x - \ln(x)}{2x + \ln(x)} = \frac{\ln(x)\left(\frac{x}{\ln(x)} - 1\right)}{\ln(x)\left(\frac{2x}{\ln(x)} + 1\right)} = \frac{\frac{x}{\ln(x)} - 1}{\frac{2x}{\ln(x)} + 1}$$

D'où, comme $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x}{\ln(x)} = 0$:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x - \ln(x)}{2x + \ln(x)} = -1$$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}.\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0^+} \left[\sqrt{x}.\ln(x+1) - \sqrt{x}\ln(x)\right].$

Or on sait que :

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}.\ln(x+1) = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}.\ln(x) = \lim_{x\to0^+} \sqrt{x}.\ln\left(\sqrt{x}\right)^2 = 2\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}.\ln\left(\sqrt{x}\right) = 0.$$

D'où :

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}.\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0.$$

3) On a :

$$\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)} = \frac{2\,\frac{\ln(1+2x)}{2x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

et comme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x} = \lim_{X\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

on obtient :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)} = 2.$$

4) On a :

$$\frac{\ln(x^3+1)}{x} = \frac{\ln\left[x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\right]}{x} = \frac{\ln(x^3)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x}$$

$$= 3\,\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x}$$

et donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^3+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[3\,\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x}\right] = 0+0 = 0.$$

5) On a :

$$x.\ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)=x.\ln\left(\frac{2x+3-2}{2x+3}\right)=x.\ln\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)=\frac{-2x}{2x+3}\,\frac{\ln\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)}{\frac{-2}{2x+3}}$$

Et comme, on a :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{2x+3}=-1\quad\text{et}\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{2}{2x+3}\right)}{\frac{-2}{2x+3}}=\lim_{X\to0}\frac{\ln(1+X)}{X}=1$$

alors :

$$\lim_{x\to+\infty}x.\ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right)=-1\times1=-1$$

6) On a :

$$x\ln(x)-(x+1)\ln(x+1)=x\ln(x)-x\ln(x+1)-\ln(x+1)=x\ln(x)-x\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]-\ln(x+1)$$

$$x\ln(x)-(x+1)\ln(x+1)=x\ln(x)-x\ln(x)-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln(x+1)=-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln(x+1)$$

$$x\ln(x)-(x+1)\ln(x+1)=-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}-\ln(x+1).$$

Du fait que :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=0$$

alors :

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln(x)-(x+1)\ln(x+1)=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}-\ln(x+1)\right]=-\infty$$

La fonction logarithme népérien étant continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ avec $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ alors elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.
Donc il existe un unique réel noté e tel que :

$$\ln(\mathrm{e}) = 1.$$

Le nombre e est appelé la base du logarithme népérien. On admet que $\mathrm{e} \approx 2,718$.

EXEMPLES DE CALCUL

Simplifier l'écriture des nombres réels suivants :

$$A = \ln(\mathrm{e}^3) - \ln(\mathrm{e}^2) \qquad B = \ln\left(\mathrm{e}^2\sqrt{\mathrm{e}}\right)$$

$$C = \ln(2) + \ln(8\mathrm{e}) - \ln(4\mathrm{e}^2) \qquad D = \ln\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right] - \ln^2\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

CORRIGE

- $A = \ln(\mathrm{e}^3) - \ln(\mathrm{e}^2) = 3\ln(\mathrm{e}) - 2\ln(\mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) = 1.$
- $B = \ln\left(\mathrm{e}^2\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln(\mathrm{e}^2) + \ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 2\ln(\mathrm{e}) + \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e}) = \frac{5}{2}\ln(\mathrm{e}) = \frac{5}{2}.$
- $C = \ln(2) + \ln(8\mathrm{e}) - \ln(4\mathrm{e}^2) = \ln(2) + \ln(8) + \ln(\mathrm{e}) - \ln(4) - \ln(\mathrm{e}^2) = 2\ln(2) - 1.$
- $D = \ln\left[\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2\right] - \ln^2\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = 2\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) - [-\ln(\mathrm{e})]^2 = -2\ln(\mathrm{e}) - (-1)^2 = -2 - 1 = -3.$

EXERCICE 2

Simplifier l'écriture des nombres réels suivants :

$$A = \ln(\mathrm{e}^{-6}) + 3\ln(\mathrm{e}^2) \qquad B = \ln\left(\mathrm{e}^3\sqrt{\mathrm{e}}\right) \qquad C = \ln\left(\mathrm{e}^3/\sqrt{\mathrm{e}}\right)$$

Tracé de la courbe représentative de la fonction ln

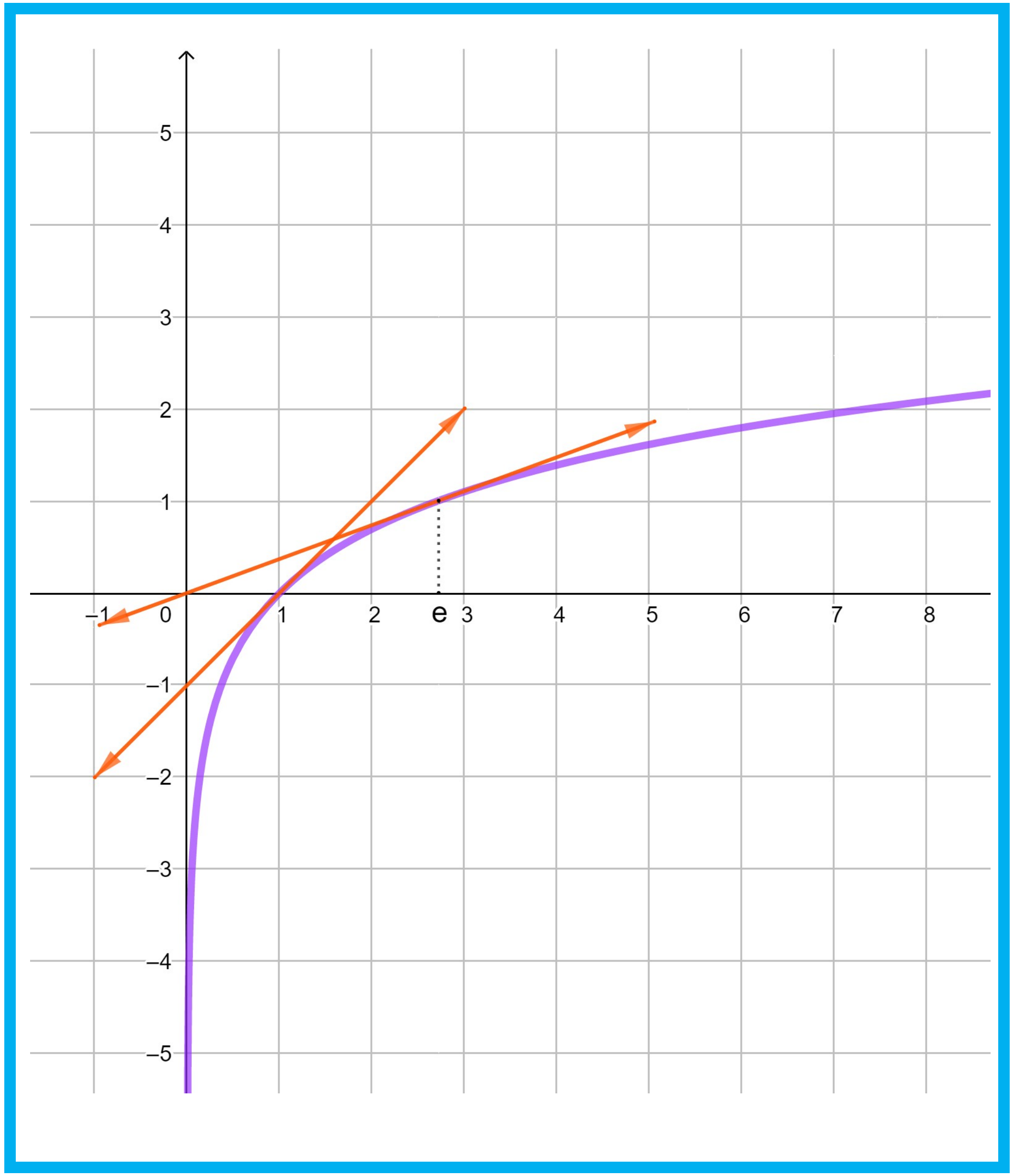
Branches infinies et tangentes

- $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$:
  La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale.

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$:
  La courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ admet une branche parabolique dans la direction (Ox) en $+\infty$.
  La fonction croit très lentement.

- La courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ admet, au point d'abscisse 1, une tangente d'équation :
  $$y = x - 1$$

- La courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ admet, au point d'abscisse e, une tangente d'équation :
  $$y = \frac{1}{e}x$$



EXEMPLES DE RECHERCHE DE DOMAINE DE DÉFINITION

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ 2) $f(x) = \ln(x-1) + \ln(x-2)$ 3) $f(x) = \ln[(x-1)(x-2)]$

CORRIGE

Le principe : l'écriture $\ln[u(x)]$ suppose $u(x) > 0$.

1) $f(x)$ est définie si et seulement si $\frac{1+x}{1-x} > 0$ c'est-à-dire si et seulement si : $(1-x)(1+x) > 0$. D'où le domaine de définition de f est : $D_f =]-1;1[$.

2) $f(x)$ est définie si et seulement si $x-1>0$ et $x-2>0$ c'est-à-dire si $x>2$. D'où le domaine de définition de f est : $D_f =]2;+\infty[$.

3) $f(x)$ est définie si et seulement si $(x-1)(x-2)>0$. La règle du signe du trinôme du second degré nous donne : $D_f =]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$.

EXERCICE 3

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(2x-5)$ 2) $f(x) = \ln(2x-3) + \ln(8-2x)$ 3) $f(x) = \ln(-x-5x+6)$

EXEMPLES DE RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-2)+\ln(x+2)=3\ln(2)$
2) $\ln(3+x)-\ln(x+13)+\ln(x+1)=0$
3) $\ln(x)<\ln(2-3x)$
4) $\ln|2x+1|\geq 1$

CORRIGE

Avant toute chose, déterminer l'ensemble de définition de l'équation, ou de l'inéquation c'est-à-dire l'ensemble des réels x pour lesquels les expressions écrites ont un sens.

1) Domaine de définition :

L'expression est définie pour tout réel x tel que $2x-2>0$ et $x+2>0$. D'où : $D=]1;+\infty[$.

Résolution :

Pour tout réel x de D, on a : $\ln(2x-2)+\ln(x+2)=\ln(2x-2)(x+2)$. D'où :

x solution $\Leftrightarrow \ln(2x-2)(x+2)=\ln(2^3) \Leftrightarrow (2x-2)(x+2)=8 \Leftrightarrow x^2+x-6=0$.

L'équation du second degré $x^2+x-6=0$ admet deux solutions à savoir $x=2$ et $x=-3$.

Seule la solution $x=2$ convient car $-3\notin D=]1;+\infty[$. Donc $\mathcal{S}=\{2\}$.

2) Domaine de définition :

L'expression est définie pour tout réel x tel que $\begin{cases}3+x>0\\x+13>0\\x+1>0\end{cases}$. D'où : $D=]-1;+\infty[$.

Résolution : Pour tout réel x de D, $\ln(3+x)-\ln(x+13)+\ln(x+1)=\ln\left[\frac{(3+x)(x+1)}{(x+13)}\right]$. D'où :

x solution $\Leftrightarrow \ln\left[\frac{(3+x)(x+1)}{(x+13)}\right]=\ln(1) \Leftrightarrow \frac{(3+x)(x+1)}{(x+13)}=1 \Leftrightarrow (3+x)(x+1)=x+13$

$\Leftrightarrow x^2+3x-10=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$ ou $x=-5$.

Compte tenu du $D=]-1;+\infty[$, on a : $\mathcal{S}=\{2\}$.

3) Domaine de définition :

L'expression est définie pour tout réel x tel que $\begin{cases} x > 0 \\ 2-3x > 0 \end{cases}$. D'où : $D = \left]0; \frac{2}{3}\right[$.

Résolution :

Pour tout réel x de D, $\ln(x) < \ln(2-3x) \iff \ln(2-3x) - \ln(x) > 0 \iff \ln\left(\frac{2-3x}{x}\right) > 0$

$$\iff \frac{2-3x}{x} > 1 \iff \frac{2-3x}{x} - 1 > 0 \iff \frac{2-4x}{x} > 0$$

$$\iff x(2-4x) > 0 \iff x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[.$$

Donc l'ensemble des solutions est: $\mathcal{S} = \left]0; \frac{1}{2}\right[$.

4) Domaine de définition :

L'expression est définie pour tout réel x tel que $2x+1 \neq 0$ c'est-à-dire pour tout réel x de l'ensemble $D = \left]-\infty; \frac{-1}{2}\right[\cup \left]\frac{-1}{2}; +\infty\right[$.

Résolution :

Pour tout réel x de D, $\ln|2x+1| \geq 1 \iff |2x+1| \geq e \iff \left[\begin{array}{c} 2x+1 \geq e \\ \text{ou} \\ 2x+1 \leq -e \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{c} x \geq \frac{e-1}{2} \\ \text{ou} \\ x \leq \frac{-e-1}{2} \end{array}\right.$

$$\iff \left[\begin{array}{c} x \in \left[\frac{e-1}{2}; +\infty\right[\\ \text{ou} \\ x \in \left]-\infty; \frac{-e-1}{2}\right] \end{array}\right. \iff x \in \left]-\infty; \frac{-e-1}{2}\right] \cup \left[\frac{e-1}{2}; +\infty\right[.$$

Donc l'ensemble de définition est : $\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{-e-1}{2}\right] \cup \left[\frac{e-1}{2}; +\infty\right[$.

Dérivée logarithmique

Soit $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $\mathbf{I}$, ne s'annulant en aucun point de $\mathbf{I}$, et $\mathbf{r}$ un rationnel.

- La dérivée de : $x \to \ln|u(x)|$ est :

$$x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$$

En effet :

$$(\ln(u))'(x) = (\ln \circ u)'(x) = u'(x) \times (\ln)'\big(u(x)\big) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple :

$$[\ln(x^2+5)]' = \frac{(x^2+5)'}{x^2+5} = \frac{2x}{x^2+5}$$

- La dérivée de : $x \to \ln|u(x).v(x)|$ est :

$$x \to \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{v'(x)}{v(x)}$$

- La dérivée de : $x \to \ln|u(x)|^r$ est :

$$x \to r.\frac{u'(x)}{u(x)}$$

- La dérivée de : $x \to \ln\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|$ est :

$$x \to \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{v'(x)}{v(x)}$$