Préparation aux olympiades de mathématiques

MENABI EL OULOUM - EJYAL EL MUSTAGHBAL

EXERCICES D'ENTRAINEMENT

PRINCIPES DE BASE

1. Le principe de récurrence

Exercice 1

Considérons la suite (u_n) définie, pour tout entier n, par les relations :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{2}{n+2} u_n \end{cases}$$

Démontrer que pour tout entier non nul n :

$$1 \leq u_n \leq n^2.$$

Exercice 2

Démontrer que tout entier naturel $n \geq 1$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $n = 2^p(2q+1)$ avec p, q des entiers naturels.

---

2. La descente infinie de Fermat

Exercice 1

Montrer que l'équation : $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$ n'admet pas de quadruplets solutions (x, y, z, t) d'entiers strictement positifs.

Exercice 2

Montrer que la suite des carrés parfaits ne contient pas une progression arithmétique.

---

3. Le principe des tiroirs

Exercice 1

On a jeté de la peinture noire sur le sol blanc d'une pièce carrée de 2 mètres sur 2, n'importe comment. Montrer qu'il existe deux points de la même couleur dont la distance est exactement un mètre.

Exercice 2

Montrer qu'il existe une puissance de 73 qui se termine par 2020 fois le chiffre 0 suivis du chiffre 1 : … (2020 fois le chiffre 0) …0001.

Exercice 3

On considère 13 nombres réels deux à deux distincts. Prouver que, parmi ces nombres, il existe deux réels a et b vérifiant :

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} \leq 2 - \sqrt{3}.$$

Exercice 4

On se donne n entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble de $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ dont la somme des éléments est divisible par n.

4. Le principe de l'invariance

Exercice 1

On dispose de 22 arbres mis en rond ; sur chaque arbre se pose un corbeau. Toutes les minutes, deux corbeaux se déplacent chacun sur un arbre voisin du leur. Est-il possible pour les corbeaux, après un certain nombre de minutes, de se rassembler tous sur le même arbre?

Exercice 2

Sur une île déserte vivent 34 caméléons. Au départ 7 sont jaunes, 10 sont rouges et 17 sont verts. Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils prennent tous les deux la troisième couleur. Lorsque se rencontrent deux caméléons d'une même couleur, il ne se passe rien. Au bout d'un an tous les caméléons sur l'île sont devenus de la même couleur. Laquelle ? (Il faut non seulement déterminer la couleur, mais aussi prouver que c'est la seule possible.)

Exercice 3

On écrit successivement tous les nombres de 1 à un million. Puis on remplace chaque nombre par la somme de ses chiffres. Puis on recommence, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des nombres à un chiffre. Quel chiffre apparaît le plus souvent ?

5. Le principe de symétrie

Exercice 1

A partir d'un triplet (a, b, c) on peut effectuer l'opération suivante :

- On choisit deux des nombres du triplet, mettons x et y ;
- On remplace x par $(x-y)/\sqrt{2}$ et y par $(x+y)/\sqrt{2}$, en laissant le troisième nombre inchangé.

Peut-on passer du triplet initial $(2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ au triplet $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ en respectant ces règles ?

6. Le principe de l'extremum

Exercice 1

On se donne n points du plan. On suppose que pour deux points quelconques distincts, il en existe un troisième point aligné avec les deux premiers. Montrer que tous les points sont alignés.

Exercice 2

On affecte une valeur entière positive ou nulle à chaque point à coordonnées entières du plan de sorte que chaque valeur soit la moyenne de ses quatre voisines.
Montrer que toutes les valeurs sont égales.