Préparation aux olympiades de mathématiques

MENABI EL OULOUM - EJYAL EL MUSTAGHBAL

QUELQUES PRINCIPES UTILES

1. Le principe de récurrence

Le raisonnement par récurrence est un raisonnement spécifique applicable dans le cas de propriétés dépendant d'un entier naturel. On présentera ici, exemples à l'appui, les trois variantes de ce raisonnement.

→ **Variante 1 : (récurrence d'ordre 1)**

Théorème : *Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant du naturel n.*
S'il existe un entier n_0 tel que :
- *$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (Initialisation) ;*
- *Pour tout $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ vraie alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (Hérédité ou transmission)*

Alors pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple

Démontrer que pour tout entier naturel $\mathbf{n \geq 3}$, on peut trouver $\mathbf{n}$ entiers strictement positifs $\mathbf{x_1, x_2, \dots, x_n}$ deux à deux distincts, tels que :

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=1.$$

Corrigé

Pour $\mathbf{n \geq 3}$, notons $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ la propriété suivante : « il existe $\mathbf{n}$ entiers strictement positifs $\mathbf{x_1, x_2, \dots, x_n}$ deux à deux distincts, tels que : $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=1$. »

Prouvons que pour tout $\mathbf{n \geq 3}$, la propriété $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ est vraie.

1ère étape : Initialisation

Pour $\mathbf{n = 3}$, on a bien :

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}.$$

Donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

2ème étape : Hérédité

Montrons que pour tout $\mathbf{n \geq 3}$, si $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ est vraie alors $\mathcal{P}(\mathbf{n+1})$ est vraie.

Supposons qu'il existe un entier $\mathbf{n}$ pour lequel la propriété $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ est vraie c'est-à-dire qu'il existe $\mathbf{n}$ entiers strictement positifs $\mathbf{x_1, x_2, \dots, x_n}$ deux à deux distincts, tels que : $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=1$.

On peut supposer que $\mathbf{0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n}$.

On remarque que $\mathbf{x_1 \geq 2}$ puisque $\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}>0$.

On a :

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x_1}+\frac{1}{2x_2}+\cdots+\frac{1}{2x_n}$$

$$1=\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\frac{1}{y_3}+\cdots+\frac{1}{y_{n+1}}$$

en ayant posé $\mathbf{y_1 = 2}$, $\mathbf{y_{k+1} = 2x_k}$ pour $\mathbf{k = 1, \dots, n}$. On a alors :

$$y_1=2<4\leq y_2<y_3<\cdots<y_{n+1}$$

On a donc établi la vérité de $\mathcal{P}(\mathbf{n+1})$.

$3^{ème}$ étape : Conclusion
On a donc : $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
Pour tout $\mathbf{n \geq 3}$, $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ entraîne $\mathcal{P}(\mathbf{n+1})$.
En conséquence, pour tout $\mathbf{n \geq 3}$: $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ est vraie.

→ Variante 2 : (récurrence d'ordre 2)

Théorème : *Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant du naturel n.*
S'il existe un entier n_0 tel que :
- *$\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies (Initialisation) ;*
- *Pour tout $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (Hérédité ou Transmission)*

Alors pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple

Considérons la suite $(\mathbf{u_n})$ définie, pour tout entier $\mathbf{n}$, par les relations :

$$\begin{cases} \mathbf{u_0 = 1}, \quad \mathbf{u_1 = 1} \\ \mathbf{u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n} \end{cases}.$$

Démontrer que pour tout entier $\mathbf{n}$: $\mathbf{u_n = 2^{n+1} - 3^n}$.

Corrigé

Soit $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ la propriété : « $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N},\ \mathbf{u_n = 2^{n+1} - 3^n}$ »

$1^{ère}$ étape : Initialisation
Pour $\mathbf{n = 0}$, on a bien $\mathbf{2^{0+1} - 3^0 = 1 = u_0}$,
Pour $\mathbf{n = 1}$, on a bien $\mathbf{2^{1+1} - 3^1 = 1 = u_1}$.
Donc la propriété est vraie pour $\mathbf{n = 0}$ et pour $\mathbf{n = 1}$.
$2^{ème}$ étape : Hérédité
Montrons que pour tout $\mathbf{n \geq 1}$, si $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ et $\mathcal{P}(\mathbf{n+1})$ sont vraies alors $\mathcal{P}(\mathbf{n+2})$ est vraie.
Supposons qu'il existe un rang $\mathbf{n}$ pour lequel la propriété est vraie pour $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n+1}$ c'est-à-dire que :

$$\mathbf{u_n = 2^{n+1} - 3^n} \text{ et } \mathbf{u_{n+1} = 2^{n+2} - 3^{n+1}}$$

(Hypothèse de récurrence (H.R)).

Selon la définition de la suite $(\mathbf{u_n})$: $\mathbf{u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n}$.
En remplaçant $\mathbf{u_n}$ et $\mathbf{u_{n+1}}$ par leurs valeurs supposées, on obtient :

$$\mathbf{u_{n+2} = 5(2^{n+2} - 3^{n+1}) - 6(2^{n+1} - 3^n)}$$
$$\mathbf{u_{n+2} = (10-6) \times 2^{n+1} - (15-6) \times 3^n}$$
$$\mathbf{u_{n+2} = 4 \times 2^{n+1} - 9 \times 3^n}$$
$$\mathbf{u_{n+2} = 2^{(n+2)+1} - 3^{n+2}}$$

Donc la propriété est vraie pour $\mathbf{n+2}$.
$3^{ème}$ étape : Conclusion
On a : $\mathcal{P}(\mathbf{0})$ et $\mathcal{P}(\mathbf{1})$ sont vraies.
Pour tout $\mathbf{n \geq 0}$, $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ et $\mathcal{P}(\mathbf{n+1})$ entraîne $\mathcal{P}(\mathbf{n+2})$.
En conséquence, pour tout $\mathbf{n \geq 0}$: $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ est vraie.

→ Variante 3 : (récurrence forte)

Théorème : *Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant du naturel n.*
S'il existe un entier n_0 tel que :
- *$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (Initialisation) ;*
- *Pour tout $k \geq n_0$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k = n_0$, $k = n_0+1$, …, $k = n$ alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (Hérédité ou Transmission)*

Alors pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple

Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à $\mathbf{2}$ est produit d'entiers premiers (on comprend le mot produit dans le sens où il peut s'agir d'un produit d'un seul terme).

Corrigé

Soit $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ la propriété en question.
$1^{ère}$ étape : Initialisation

Pour $\mathbf{n} = \mathbf{2}$, $\mathcal{P}(\mathbf{2})$ est vraie car $\mathbf{2}$ est premier.

2ème étape : Hérédité

Montrons que pour tout $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$, si $\mathcal{P}(\mathbf{2}), \mathcal{P}(\mathbf{3}), \ldots, \mathcal{P}(\mathbf{n})$ sont vraies alors $\mathcal{P}(\mathbf{n}+\mathbf{1})$ est vraie.
De deux choses l'une, ou $\mathbf{n}+\mathbf{1}$ est premier, ou il ne l'est pas.

- Si $\mathbf{n}+\mathbf{1}$ est premier il s'écrit comme produit d'un entier premier, produit au sens défini dans l'énoncé.

- Si $\mathbf{n}+\mathbf{1}$ n'est pas premier alors il est le produit de deux entiers différents de $\mathbf{1}$ et de $\mathbf{n}+\mathbf{1}$; ces deux entiers sont donc compris entre $\mathbf{2}$ et $\mathbf{n}$, ils sont donc produits d'entiers premiers et donc $\mathbf{n}+\mathbf{1}$ aussi.

3ème étape : Conclusion

On a : $\mathcal{P}(\mathbf{2})$ est vraie.
Pour tout $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$, $\mathcal{P}(\mathbf{2}), \mathcal{P}(\mathbf{3}), \ldots, \mathcal{P}(\mathbf{n})$ entraînent $\mathcal{P}(\mathbf{n}+\mathbf{1})$. En conséquence, pour tout $\mathbf{n} \geq \mathbf{2}$: $\mathcal{P}(\mathbf{n})$ est vraie.

2. La descente infinie de Fermat

La descente infinie de FERMAT est un principe introduit la première fois par Pierre de FERMAT (magistrat de formation, mathématicien amateur surnommé le prince des amateurs) et qu'il a utilisé fréquemment dans ces travaux en théorie des nombres.

Elle repose sur le résultat suivant :
« ***Toute suite, d'entiers naturels, strictement décroissante est finie*** » *ou en d'autres termes :* « ***il n'existe, dans $\mathbb{N}$, aucune suite strictement décroissante infinie*** ».
Le but de cette méthode est de prouver qu'une équation diophantienne (équation à inconnues dans $\mathbb{Z}$) n'admet pas de solutions.

Exemple

Montrer que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Corrigé

Raisonnons par l'absurde :
On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel c'est-à-dire que $\sqrt{2} = \mathbf{p_0}/\mathbf{q_0}$ avec $\mathbf{p_0}$ et $\mathbf{q_0}$ des entiers naturels.On sait que : $\sqrt{2} = \mathbf{p_0}/\mathbf{q_0} \iff \mathbf{p_0}^2 = 2\mathbf{q_0}^2$.
L'égalité $\mathbf{p_0}^2 = 2\mathbf{q_0}^2$ assure que $\mathbf{p_0}$ est pair c'est-à-dire que $\mathbf{p_0} = 2\mathbf{p_1}$ et donc l'égalité $\mathbf{p_0}^2 = 2\mathbf{q_0}^2$ s'écrit $\mathbf{q_1^2} = 2\mathbf{p_1^2}$.
Le même raisonnement nous conduit également à $\mathbf{q_2}$ pair et à l'égalité : $\mathbf{p_2^2} = 2\mathbf{q_2^2}$.
Ainsi, cela nous amène à la suite d'entiers naturels strictement décroissante :
$\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1} = \mathbf{p_0}/2, \mathbf{p_2} = \mathbf{p_0}/4, \mathbf{p_3} = \mathbf{p_0}/8, \ldots, \mathbf{p_n} = \mathbf{p_0}/2^{\mathbf{n}}$
Or on sait qu'une telle suite n'existe pas et par suite notre hypothèse de la rationalité de $\sqrt{2}$ est fausse. D'où le résultat.

3. Le principe des tiroirs

Ce principe est parfois appelé principe des pigeons (pigeonhole en anglais). On l'attribue au mathématicien franco-belge Dirichlet car c'est lui qui l'a utilisé la première fois dans des démonstrations non évidentes.

Version simple : « ***Si $\mathbf{n}+\mathbf{1}$ objets sont placés dans $\mathbf{n}$ tiroirs, au moins un tiroir contiendra 2 objets ou plus*** ».

Version générale : « ***Si n objets sont placés dans $\mathbf{k}$ tiroirs, au moins un tiroir contiendra $\mathbf{Ent(n/k)}$ objets ou plus*** ».

Exemple

La Mauritanie compte $\mathbf{4\,000\,000}$ d'habitants. Un être humain a, au plus $\mathbf{600\,000}$ cheveux sur la tête. Au vu de ces données, et sachant seulement cela, combien de mauritaniens peut-on trouver qui ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête.

Corrigé

Il y a $\mathbf{4\,000\,000}$ d'habitants à placer dans $\mathbf{600\,001}$ catégories, allant de celle des habitants ayant $\mathbf{0}$ cheveux, jusqu'à celle des habitants ayant $\mathbf{600\,000}$ cheveux. Alors, il y a, au moins, une catégorie qui contient $\mathbf{Ent}(\mathbf{4\,000\,000}/\mathbf{600\,001}) = \mathbf{6}$ mauritaniens, ayant le même nombre de cheveux.

4. Le principe de l'invariance

Le principe des invariants consiste à trouver une quantité qui ne change pas, indépendamment des étapes suivies dans un processus. Il s'agit d'une méthode permettant le plus souvent de démontrer qu'un problème n'a pas de solution en cherchant une fonction (quantité) invariante dans une transformation (processus).

Exemple

Une feuille de papier est déchirée en trois parties. Ensuite, l'une de ces parties est déchirée de nouveau en trois parties, et ainsi de suite. Peut-on obtenir, en fin de compte, un total de cent parties ?

Corrigé

L'algorithme consiste à ajouter $\mathbf{2}$ au nombre de parties de feuille à chaque tour. Donc la parité du nombre de parties est un invariant. Or on part d'une feuille, donc d'un nombre de parties égal à $\mathbf{1}$, donc impair. Il est donc impossible d'atteindre $\mathbf{100}$ parties, qui est un nombre pair.

5. Le principe de symétrie

Si une situation est symétrique et qu'on ne peut la transformer qu'en utilisant des transformations symétriques, alors on ne peut pas arriver à une situation non symétrique.

Exemple

Un jeton est posé sur chaque case d'un damier $7x7$. Les cases du damier sont repérées de la manière suivante :
la case centrale a les coordonnées $(\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{0})$; la coordonnée $\mathbf{x}$ augmente de $\mathbf{1}$ vers la droite et la coordonnée $\mathbf{y}$ augmente de $\mathbf{1}$ vers le haut. Ainsi la case en bas à gauche est la case $(\mathbf{a} = -\mathbf{3}, \mathbf{y} = -\mathbf{3})$ et la case en haut à droite, $(\mathbf{x} = \mathbf{3}, \mathbf{y} = \mathbf{3})$. Deux joueurs prennent, tour à tour, des jetons en respectant la règle suivante :

- Si le premier joueur prend un jeton situé sur la case $(\mathbf{x} = \mathbf{a}, \mathbf{y} = \mathbf{b})$, il doit aussi prendre les jetons des cases $(\mathbf{x} = -\mathbf{b}, \mathbf{y} = \mathbf{a})$, $(\mathbf{x} = -\mathbf{a}, \mathbf{y} = -\mathbf{b})$ et $(\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{y} = -\mathbf{a})$;
- Si le deuxième joueur prend le jeton situé sur la case $(\mathbf{x} = \mathbf{a}, \mathbf{y} = \mathbf{b})$, il doit aussi prendre les jetons des cases : $(\mathbf{x} = -\mathbf{a}, \mathbf{y} = \mathbf{b})$, $(\mathbf{x} = -\mathbf{a}, \mathbf{y} = -\mathbf{b})$ et $(\mathbf{x} = \mathbf{a}, \mathbf{y} = -\mathbf{b})$. Le joueur qui a gagné est le premier qui arrive à atteindre la situation où il reste un seul jeton, situé sur la case $(\mathbf{x} = \mathbf{1}, \mathbf{y} = \mathbf{0})$. Un des joueurs peut-il gagner ?

Corrigé

Les règles du jeu conduisent à une situation systématiquement symétrique par rapport au point de coordonnées $(\mathbf{x} = \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{0})$. Une fin du jeu avec une seule case remplie de coordonnées $(\mathbf{x} = \mathbf{1}, \mathbf{y} = \mathbf{0})$ ne présenterait plus cette symétrie. Elle est donc impossible.

6. Le principe de l'extremum

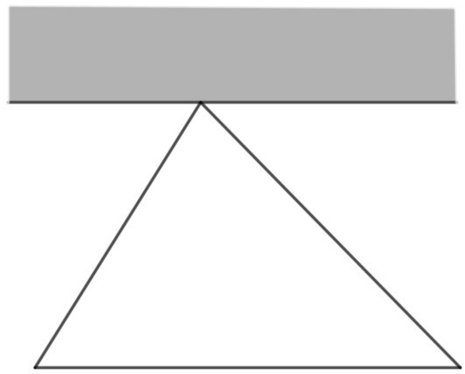
On sait qu'un ensemble fini de nombres réels contient toujours un maximum et un minimum, et qu'un ensemble éventuellement infini d'entiers naturels contient toujours un minimum.
Le principe de l'extremum est une heuristique qui consiste à considérer un objet pour lequel une certaine quantité associée est minimale ou maximale.

Exemple

On se donne $\mathbf{n}$ points du plan. On suppose que chaque triplet de points forme un triangle d'aire inférieure ou égale à $\mathbf{1}$. Montrer que les $\mathbf{n}$ points sont tous à l'intérieur d'un triangle d'aire inférieure ou égale à $\mathbf{4}$.

Corrigé

On considère trois points $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ formant un triangle d'aire maximale. On trace la droite parallèle à un des cotés et passant par le troisième sommet.



On sait qu'il n'y a pas de point dans la zone grise.

En effet, un tel point formerait avec les deux autres points un triangle d'aire plus grande que le triangle $\mathbf{ABC}$ (il aurait une hauteur plus grande que celle de $\mathbf{ABC}$ et la même base), ce qui contredirait la maximalité supposée de l'aire du triangle $\mathbf{ABC}$. Un raisonnement analogue avec les deux autres côtés définit une zone autorisée de forme triangulaire, formée de quatre triangles semblables au triangle $\mathbf{ABC}$, et donc d'aire inférieure ou égale à $\mathbf{4}$.