COMPLÉMENTS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

1 Récurrence forte

Point-méthode

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.
S'il existe un entier n_0 tel que :
- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (Initialisation) ;
- Pour tout $k \geq n_0$, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k = n_0$, $k = n_0 + 1$, …, $k = n$ alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (Hérédité ou Transmission)

Alors pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple

Démontrer que tout entier naturel $\mathbf{n \geq 1}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme : $\mathbf{n = 2^p(2q+1)}$ avec $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ des entiers naturels.

Solution

Existence de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$:
On va prouver l'existence de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ par récurrence forte.
1ère étape : Initialisation
Pour $\mathbf{n = 1}$, il suffit de prendre $\mathbf{p = q = 0}$. Donc $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbf{1})$ est vraie.

2ème étape : Hérédité
On suppose que la propriété est vraie pour les entiers compris entre $\mathbf{2}$ et $\mathbf{n-1}$.
On distingue deux cas :

Scan_me

- Ou bien $\mathbf{n}$ est pair $(\mathbf{n = 2m})$ avec $\mathbf{m}$ entier tel que $\mathbf{1 \leq m \leq n-1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathbf{m}$ s'écrit : $\mathbf{m = 2^a(2b+1)}$, avec $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ entiers naturels, et donc $\mathbf{n = 2^{a+1}(2b+1)}$. D'où l'existence de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ avec $\mathbf{p = a+1}$ et $\mathbf{q = b}$.
- Ou bien $\mathbf{n}$ est impair $(\mathbf{n = 2m+1})$ et donc on peut écrire $\mathbf{n = 2^0(2m+1)}$. L'existence de de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ est assurée avec $\mathbf{p = 0}$ et $\mathbf{q = m}$.

3ème étape : Conclusion
On a prouvé l'existence de de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ pour tout entier $\mathbf{n \geq 1}$: $\mathbf{m = 2^p(2q+1)}$.

Unicité de $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$:
On suppose que $\mathbf{n = 2^p(2q+1) = 2^a(2b+1)}$. Si $\mathbf{p \geq a}$ alors $\mathbf{2^{p-a}(2q+1) = 2b+1}$, ce qui donne $\mathbf{p = a}$ et $\mathbf{q = b}$ vu la parité dans $\mathbf{2^{p-a}(2q+1) = 2b+1}$.

Exercices

① Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 est produit d'entiers premiers (on comprend le mot produit dans le sens où il peut s'agir d'un produit d'un seul terme).

② Soit x un réel tel que $x + 1/x$ est un entier relatif. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $x^n + 1/x^n$ est aussi un entier relatif.

2 Suites implicites

Une tentative de définition

Une suite implicite est une suite définie par une équation. Pour tout entier naturel n, on a une équation qui dépend de n : $(\boldsymbol{E_n}) : \boldsymbol{f_n(x) = 0}$ **sur l'intervalle $\boldsymbol{I_n}$.**
Dans l'équation (E_n), la fonction f_n ou l'intervalle I_n (ou les deux) dépendent de n. La suite (u_n) est alors définie par : $\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n}$ **est solution de l'équation $(\boldsymbol{E_n})$ sur $\boldsymbol{I_n}$.**

Remarques :

- Bien entendu, il est clair qu'on ne peut pas déduire de la fonction f_n le comportement de la suite (u_n) : ce n'est pas parce que la fonction f_n est croissante que la suite (u_n) sera croissante, etc.
- Dans le cas général, il n'existe pas d'expression de u_n en fonction de n. Il est donc inutile d'en chercher. D'où l'utilité d'utiliser le théorème sur la convergence des suites monotones.
- Ne pas hésiter à écrire l'équation (E_n) en remplaçant n par $n+1$, $n-1$, etc. Cette relation peut donner la réponse à beaucoup de questions.

Il n'y a évidemment aucun résultat à connaître pour l'étude de ce type de suites numériques. Il s'agit simplement d'étudier un exemple pour pouvoir dégager des méthodes.

Existence de la suite

Exemple : On considère l'équation (E_n) : $x^n + x^2 + 2x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. Montrons que l'équation (E_n) admet une unique solution u_n sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

Solution : On considère pour $n \geq 3$, la fonction $f_n : x \in [0; +\infty[\longmapsto x^n + x^2 + 2x + 1$. Cette fonction est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ comme somme de fonctions continues strictement croissantes.

En calculant les limites, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0	u_n	$+\infty$
Variations de f_n	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

Le tableau de variation montre que la fonction f_n s'annule une et une seule fois sur $[0; +\infty[$, donc que l'équation (E_n) admet une unique solution pour tout $n \geq 3$:

« $\exists!\, u_n \in [0; +\infty[$ tel que $f_n(u_n) = 0$ ».

Estimation plus précise de la suite

La seconde étape est souvent de préciser l'intervalle dans lequel évolue u_n. En effet, puisqu'on ne sait rien sur la suite, on va utiliser le théorème sur la convergence des suites monotones. On commence par voir s'il existe un intervalle $[a; b]$ tel que :

« $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a; b]$ »

Pour cela, on utilise le tableau de variation. Il suffit de pouvoir situer $f_n(a)$ et $f_n(b)$ par rapport à $0 = f_n(u_n)$.

Exemple : Pour la suite définie par $u_n^n + u_n^2 + 2u_n - 1 = 0$ et $u_n \in [0; +\infty[$. Montrons que $\forall n \geq 3,\ u_n \in [0; 1]$. Il s'agit de montrer que, pour tout $n \geq 3$, on a $u_n \leq 1$, ce qui équivaut à $f_n(1) > 0$ car la fonction f_n est strictement croissante. Il suffit donc de constater que $f_n(1) = 3$. On complète donc le tableau de variation :

x	0	u_n	1	$+\infty$
Variations de f_n	-1 ↗	0 ↗	3 ↗	$+\infty$

On obtient $\forall n \geq 3,\ f_n(1) > 0 = f_n(u_n)$ donc puisque f_n est strictement croissante, on a au final $\forall n \geq 3,\ u_n \leq 1$, et donc $u_n \in [0; 1]$.

Monotonie

Pour montrer que la suite est monotone, on est amené à comparer u_n et u_{n+1}.
Comme la fonction f_n est strictement monotone, cela revient à déterminer le signe de la différence $f_n(u_{n+1}) - f_n(u_n) = f_n(u_{n+1})$. On applique donc la même méthode que pour comparer u_n et un réel.

Exemple : Étudions la monotonie de la suite définie par :

$$u_n^n + u_n^2 + 2u_n - 1 = 0 \text{ et } u_n \in [0;\, +\infty[.$$

Calculons $f_n(u_{n+1})$ pour $n \geq 3$:

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n + u_{n+1}^2 + 2u_{n+1} - 1$$

Puisqu'on ne connaît pas l'expression explicite de u_n, il est impossible de calculer directement cette valeur. Par contre, on sait que u_{n+1} est la solution de l'équation (E_{n+1}), ce qui s'écrit :

$$u_{n+1}^{n+1} + u_{n+1}^2 + 2u_{n+1} - 1 = 0, \text{ c'est-à-dire : } u_{n+1}^2 + 2u_{n+1} - 1 = -u_{n+1}^{n+1}.$$

En injectant cette relation dans $f_n(u_{n+1})$, on obtient :

$$f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^n + u_{n+1}^2 + 2u_{n+1} - 1 = u_{n+1}^n - u_{n+1}^{n+1} = u_{n+1}^n(1 - u_{n+1})$$

Or, on sait que $u_{n+1} \in [0;1]$, ce qui donne $f_n(u_{n+1}) > 0$.
On a donc $f_n(u_{n+1}) \geq f_n(u_n)$ et comme la fonction f_n est strictement croissante, cela donne $u_{n+1} \geq u_n$. On conclut donc que la suite (u_n) est croissante.

Convergence de la suite

La suite est croissante et majorée par 1, donc elle est convergente vers un réel $\ell \in [0;1]$.
Calculons la valeur de ℓ :
On suppose que $\ell = 1$. Comme (u_n) est croissante de limite ℓ alors pour tout $n \geq 3$, on a : $0 \leq u_n \leq \ell = 1$, et donc $0 \leq u_n^n \leq \ell^n = 1$, et par conséquent $0 \leq \lim_{n\to+\infty} u_n^n \leq 1$.
En passant à la limite dans la relation $u_n^n + u_n^2 + 2u_n - 1 = 0$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^n + \ell^2 + 2\ell - 1 = \lim_{n\to+\infty} u_n^n + 2 = 0 \text{ car } \ell = 1.$$

Ce qui donne le résultat contradictoire $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = -2$. Donc $0 \leq \ell < 1$. On a :

$$0 \leq u_n \leq \ell < 1 \implies \lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0.$$

Donc par passage à la limite dans la relation $u_n^n + u_n^2 + 2u_n - 1 = 0$, on obtient :

$$\ell^2 + 2\ell - 1 = 0.$$

Cette équation du 2^nd degré admet deux racines $\ell_1 = -1 - \sqrt{2} \notin [0;1]$, $\ell_2 = -1 + \sqrt{2} \in [0;1]$.
Donc la suite (u_n) converge vers le réel $\ell = -1 + \sqrt{2}$.

Exercices

① Soit f_n la fonction définie sur $[1;\, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n - x - 1$, avec $n \geq 2$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n > 1$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que la suite (x_n) est décroissante et qu'elle converge vers un réel ℓ.
4. Déterminer ℓ.

Scan_me

② Soit f_n la fonction définie sur $[0;\, 1]$ par $f_n(x) = 1 - \frac{x}{2} - x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in [0;\, 1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que $f_{n+1}(x_n) > 0$.
3. En déduire que (x_n) est monotone et qu'elle converge vers une limite ℓ.
4. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq x_n \leq M < 1$.
   a. Calculer la limite de x_n^n lorsque n tend vers l'infini.
   b. Montrer qu'il y a une contradiction et en déduire la valeur de ℓ.

❸ Suites arithmético-géométriques - Suites homographiques

a. Suites arithmético-géométriques

Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** si elle est définie par une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + b$$

où a et b sont des constantes réelles.

Remarque :

Si $a = 1$ alors la suite (u_n) est arithmétique.

Si $b = 0$ alors la suite (u_n) est géométrique.

D'après ce qui a été vu sur la convergence des suites récurrentes, si (u_n) converge vers un réel ℓ alors ℓ vérifie : $\ell = a\ell + b$.

On a si $a \neq 1$:

$$\ell = a\ell + b \iff \ell = \frac{b}{1-a}$$

Ainsi, si pose $v_n = u_n - \ell$ alors nous aurons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = av_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = a$ et de 1er terme $v_0 = u_0 - \ell$. D'où :

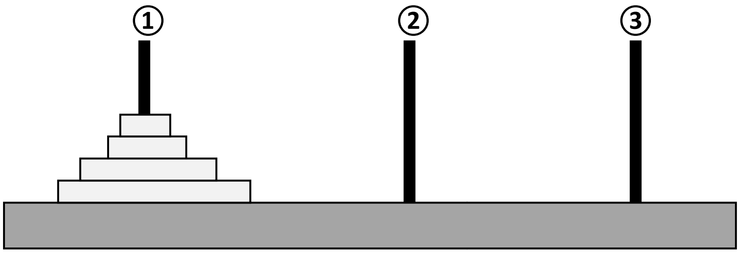
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n = \frac{b}{1-a} + \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n$$

Si $-1 < a < 1$ alors la suite (u_n) est convergente vers $\boldsymbol{\ell} = \frac{b}{1-a}$; sinon, $(\mathbf{u_n})$ est divergente.

Exemple **Les tours de Hanoï**

Trois bâtons sont disposés comme l'illustre la figure. Sur le premier sont insérés n disques de diamètres 1, 2, 3, …, n.

L'objectif est de déplacer la pyramide de disques du 1er bâton au 3ème avec les règles suivantes :



- A chaque coup, un disque seulement peut être déplacé ;
- Un disque ne peut pas être mis sur un autre disque de diamètre inférieur.

Exprimer, en fonction de n, le nombre de coups nécessaires et suffisants pour terminer le jeu.

Solution

On note u_n le nombre de coups nécessaires et suffisants correspondant à n disques.

Scan_me

Pour $n = 1$, il est clair que $u_1 = 1$. En effet, avec 1 disque, 1 déplacement suffit (du bâton 1 au bâton 3).

Pour $n = 2$, il est clair que $u_2 = 3$: on déplace le petit disque vers le bâton 2, puis le grand vers le 3 et enfin le petit vers le 3.

Pour $n = 3$, regardons toutes les étapes : pour simplifier, je vais symboliser la 1ère tour par $\{3; 2; 1\}$. Alors :

	Bâton 1	Bâton 2	Bâton 3
Étape 0 :	$\{3;2;1\}$	$\{\phi\}$	$\{\phi\}$
Étape 1 :	$\{3;2\}$	$\{\phi\}$	$\{1\}$
Étape 2 :	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1\}$
Étape 3 :	$\{3\}$	$\{2;1\}$	$\{\phi\}$
Étape 4 :	$\{\phi\}$	$\{2;1\}$	$\{3\}$
Étape 5 :	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
Étape 6 :	$\{1\}$	$\{\phi\}$	$\{3;2\}$
Étape 7 :	$\{\phi\}$	$\{\phi\}$	$\{3;2;1\}$

Ainsi, $u_3 = 7$.
On voit alors se dessiner une stratégie qui consiste, lorsqu'on a n disques, à en déplacer $(n-1)$ sur le bâton 2 (ce qui nécessite u_{n-1} déplacements) puis à mettre le plus grand disque sur le bâton 3 (1 mouvement) et enfin mettre les autres disques sur le bâton 3 (u_{n-1} déplacements).
D'où :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

On a alors une suite arithmético-géométrique et donc : $u_n = 2^n - 1$.

Exercices

① On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4 \end{cases}$$

On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - 6$.

1. Quelle es la limite éventuelle de (u_n) ?
2. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n)?
3. Démontrer que :$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -5(1/3)^n + 6$.
4. Étudier la convergence de la suite (u_n).

② On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{9}{4} \end{cases}$$

Rédiger les questions d'un exercice semblable au précédent.

b. Suites homographiques

Une suite (u_n) est dite homographique si elle est définie par une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

où a, b, $c \neq 0$ et d sont des constantes réelles.

Remarque :
Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ alors ℓ vérifie :

$$\ell = \frac{a\ell + b}{c\ell + d}$$

Ce qui donne : $c\ell^2 + (d-a)\ell - b = 0$.

L'équation $cx^2 + (d-a)x - b = 0$ est appelée **l'équation caractéristique** de la suite (u_n).

Étudions la convergence de la suite homographique (u_n) en fonction du nombre de solutions de son équation caractéristique :

1^er cas : l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes ℓ_1 et ℓ_2 :

Soit (u_n) la suite homographique définie par la donnée de son 1^er terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}, \qquad ad - bc \neq 0.$$

Si l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes ℓ_1 et ℓ_2 et si on a $0 < |(c\ell_1 + d)/(c\ell_2 + d)| < 1$ alors la suite (u_n) converge vers ℓ_2.

Démonstration
On considère la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{u_n - \ell_2}{u_n - \ell_1}.$$

On note f la fonction définie par $\mathrm{f(x) = (ax+b)/(cx+d)}$, et on suppose que $\mathrm{ad - bc \neq 0}$ (pour que la fonction f ne soit pas constante).
Alors, tenant compte de $\mathrm{f}(\ell_1) = \ell_1$ et $\mathrm{f}(\ell_2) = \ell_2$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - \ell_2}{u_{n+1} - \ell_1} = \frac{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a\ell_2 + b}{c\ell_2 + d}}{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a\ell_1 + b}{c\ell_1 + d}} \\ &= \frac{(au_n + b)(c\ell_2 + d) - (cu_n + d)(c\ell_2 + b)}{(au_n + b)(c\ell_1 + d) - (cu_n + d)(c\ell_1 + b)} \times \frac{c\ell_1 + d}{c\ell_2 + d} \\ &= \frac{(u_n - \ell_2)(ad - bc)}{(u_n - \ell_1)(ad - bc)} \times \frac{c\ell_1 + d}{c\ell_2 + d} \\ &= \frac{c\ell_1 + d}{c\ell_2 + d} v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique si $c\ell_1 + d \neq 0$. Sa raison est $q = \frac{c\ell_1 + d}{c\ell_2 + d}$, donc elle converge vers 0 si $|q| < 1$. Dans ce cas, la suite (u_n) converge vers ℓ_2. D'où CQFD.

A titre d'exemple :
Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 1}$$

Corrigé : L'équation caractéristique de la suite (u_n) est donnée par :

$$x = \frac{2x + 1}{x + 1}$$

Soit encore $x^2 - x - 1 = 0$.
Cette équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \qquad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Il reste à choisir laquelle sera ℓ_2 en sachant que, nécessairement :

$$\left|\frac{c\ell_1 + d}{c\ell_2 + d}\right| < 1.$$

$$cx_1 + d = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \qquad cx_2 + d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Donc $cx_2 + d > cx_1 + d$, ce qui signifie que $\ell_2 = x_2$. Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

On pourrait également remarquer que la suite (u_n) est à termes strictement positifs et qu'elle ne peut converger que vers x_2 qui est positive.

2ème cas : l'équation caractéristique admet une racine double réelle ℓ :

Soit (u_n) la suite homographique définie par la donnée de son 1er terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}, \qquad ad - bc \neq 0.$$

Si l'équation caractéristique admet une racine réelle double ℓ alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration
On considère la suite (v_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{1}{u_n - \ell}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_{n+1} &= \frac{1}{\mathrm{u}_{n+1}-\ell} = \frac{1}{\frac{\mathrm{au}_n+\mathrm{b}}{\mathrm{cu}_n+\mathrm{d}} - \frac{\mathrm{a}\ell+\mathrm{b}}{\mathrm{c}\ell+\mathrm{d}}} \\
&= \frac{(\mathrm{cu}_n+\mathrm{d})(\mathrm{c}\ell+\mathrm{d})}{(\mathrm{au}_n+\mathrm{b})(\mathrm{c}\ell+\mathrm{d})-(\mathrm{cu}_n+\mathrm{d})(\mathrm{a}\ell+\mathrm{b})} \\
&= \frac{(\mathrm{cu}_n+\mathrm{d})(\mathrm{c}\ell+\mathrm{d})}{(\mathrm{u}_n-\ell)(\mathrm{ad}-\mathrm{bc})}.
\end{aligned}$$

Comme l'équation caractéristique admet une racine double alors son discriminant est nul ($\Delta = (\mathrm{d}-\mathrm{a})^2 + 4\mathrm{bc} = 0$) :

$$(\mathrm{d}-\mathrm{a})^2 + 4\mathrm{bc} = 0 \iff \mathrm{ad}-\mathrm{bc} = \mathrm{ad} - \frac{(\mathrm{d}-\mathrm{a})^2}{4} = \frac{(\mathrm{a}+\mathrm{d})^2}{4}.$$

De plus, comme ℓ est une racine double alors ℓ est donnée par :

$$\ell = \frac{\mathrm{a}-\mathrm{d}}{2\mathrm{c}}.$$

On a alors :

$$\mathrm{c}\ell + \mathrm{d} = \frac{\mathrm{a}+\mathrm{d}}{2}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_{n+1} &= \frac{\mathrm{cu}_n+\mathrm{d}}{\mathrm{u}_n-\ell} \times \frac{\frac{\mathrm{a}+\mathrm{d}}{2}}{\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{d})^2}{4}} = \frac{\mathrm{cu}_n+\mathrm{d}}{\mathrm{u}_n-\ell} \times \frac{2}{\mathrm{a}+\mathrm{d}} \\
&= \frac{2}{\mathrm{a}+\mathrm{d}} \times \frac{\mathrm{cu}_n - \mathrm{c}\ell + \mathrm{c}\ell + \mathrm{d}}{\mathrm{u}_n-\ell} = \frac{2}{\mathrm{a}+\mathrm{d}} \times \left[\mathrm{c} + \frac{\mathrm{c}\ell+\mathrm{d}}{\mathrm{u}_n-\ell}\right] \\
&= \frac{2\mathrm{c}}{\mathrm{a}+\mathrm{d}} + 2\frac{\mathrm{c}\ell+\mathrm{d}}{\mathrm{a}+\mathrm{d}} \times \frac{1}{\mathrm{u}_n-\ell} \\
&= \frac{2\mathrm{c}}{\mathrm{a}+\mathrm{d}} + 2\frac{\mathrm{c}\ell+\mathrm{d}}{2(\mathrm{c}\ell+\mathrm{d})} \times \frac{1}{\mathrm{u}_n-\ell} \\
&= \frac{2\mathrm{c}}{\mathrm{a}+\mathrm{d}} + \frac{1}{\mathrm{u}_n-\ell} \\
\mathrm{v}_{n+1} &= \frac{2\mathrm{c}}{\mathrm{a}+\mathrm{d}} + \mathrm{v}_n.
\end{aligned}$$

Notons que $\mathrm{a}+\mathrm{d} \neq 0$. En effet, $\mathrm{c}\ell+\mathrm{d} = (\mathrm{a}+\mathrm{d})/2$ et comme ℓ existe, $\mathrm{c}\ell+\mathrm{d} \neq 0$.
La suite (v_n) est donc arithmétique de raison non nulle et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} |\mathrm{v}_n| = +\infty,$$

ce qui implique :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{u}_n = \ell,$$

A titre d'exemple :
Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{u}_{n+1} = \frac{4\mathrm{u}_n - 1}{4\mathrm{u}_n}$$

Corrigé : L'équation caractéristique de la suite (u_n) est donnée par :

$$x = \frac{4x-1}{4x}$$

Soit $4x^2 - 4x + 1 = 0$ ou encore $(2x-1)^2 = 0$. Cette équation admet une racine double :

$$\ell = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est convergente et : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{u}_n = 1/2$.

3ème cas : l'équation caractéristique n'admet pas de racine réelle:

Soit (u_n) la suite homographique définie par la donnée de son 1er terme u_0 et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{u}_{n+1} = \frac{\mathrm{au}_n+\mathrm{b}}{\mathrm{cu}_n+\mathrm{d}}, \qquad \mathrm{ad}-\mathrm{bc} \neq 0.$$

Si l'équation caractéristique n'admet pas de racine réelle alors la suite (u_n)diverge.

Démonstration : Évidente

A titre d'exemple :
Étudier la convergence de la suite $(\mathrm{u_n})$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \mathrm{u_{n+1}} = \frac{2\mathrm{u_n} - 1}{\mathrm{u_n} + 3}$$

Corrigé : L'équation caractéristique de la suite $(\mathrm{u_n})$ est donnée par :

$$x = \frac{2x - 1}{x + 3}$$

Soit encore $x^2 + x + 1 = 0$.
Cette équation n'admet pas de racine réelle. Ainsi, la suite $(\mathrm{u_n})$ diverge.

Exercices

① On considère la suite $(\mathrm{u_n})$ définie par :

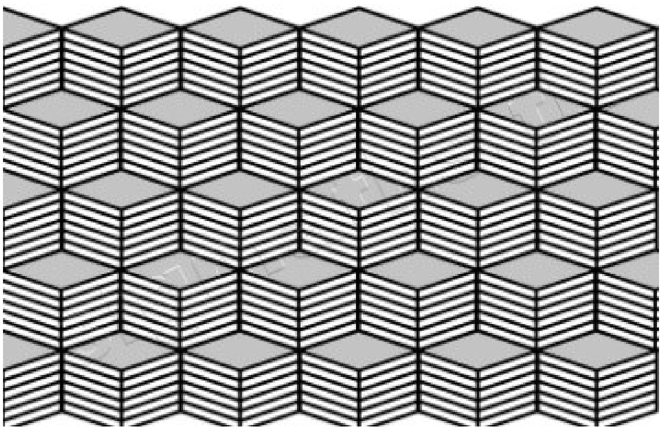
$$\begin{cases} \mathrm{u_0} = 0 \\ \mathrm{u_{n+1}} = \dfrac{3\mathrm{u_n} + 2}{\mathrm{u_n} + 4} \end{cases}$$

1. Quelles sont les limites éventuelles de $(\mathrm{u_n})$?
2. Soit la suite $(\mathrm{v_n})$ définie par : $\mathrm{v_n} = (\mathrm{u_n} - 1)/(\mathrm{u_n} + 2)$.
a. Montrer que $(\mathrm{v_n})$ est géométrique de raison $2/5$.
b. Calculer $\mathrm{v_0}$ et exprimer $\mathrm{v_n}$ en fonction de n.
c. Exprimer $\mathrm{u_n}$ en fonction de n.
d. En déduire la limite ℓ de $\mathrm{u_n}$.

② On considère la suite $(\mathrm{u_n})$ définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{u_0} = \dfrac{1}{4} \\ \mathrm{u_{n+1}} = \dfrac{3\mathrm{u_n} + 4}{\mathrm{u_n} + 3} \end{cases}$$

Rédiger les questions d'un exercice semblable au précédent.



Motif emprunté à Sigmaths