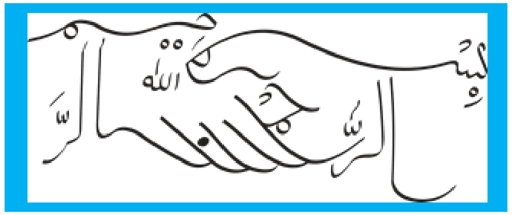
**Prof. Sidi Major**



# DENOMBREMENT

## A propos des coefficients binomiaux

### Factorielle

Par convention, on pose : $0! = 1$, $1! = 1$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on pose : $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$

Ainsi :

$2! = 2 \times 1 = 2$, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

### Réécriture de $A_n^p$

On sait que : $A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$

D'où :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)$$

$$= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)[(n-p) \times \ldots \times 2 \times 1]}{[(n-p) \times \ldots \times 2 \times 1]}$$

Enfin, pour tous entiers n et p $(0 \leq p \leq n)$ :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

### Réécriture de $C_n^p$

On sait déjà que : $C_n^p = \frac{A_n^p}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times p}$

D'où, pour tous entiers n et p $(0 \leq p \leq n)$ :

$$C_n^p = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}$$

Ainsi : $A_n^0 = C_n^0 = 1$ et $A_n^n = n!$ et $C_n^n = 1$

### Remarque

On justifie l'égalité $0! = 1$ en remarquant que d'une part : $A_n^n = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-n+1) = n!$ et que d'autre part :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

Soit : $\frac{n!}{0!} = n!$ c'est-à-dire : $0! = 1$.

On dit que qu'il a été convenu de prendre $0! = 1$ pour la commodité du calcul.

# Exercices corrigés

**Exercice 1** : Simplifier les expressions suivantes :

a) $\frac{21!}{18!}$ b) $\frac{8!-7!}{7!}$ c) $\frac{7!\,5!}{6!\,4!}$

d) $\frac{n!}{(n+1)!}$ e) $\frac{(n-3)!}{n!}$

**Corrigé**

a) $21 \times 20 \times 19$ b) $\frac{8\times7!-7!}{7!} = 8 - 1 = 7$ c) $7 \times 5$

d) $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)\times n!} = \frac{1}{n+1}$ e) $\frac{(n-3)!}{n!} = \frac{\cancel{(n-3)!}}{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cancel{(n-3)!}}$

**Exercice 2** : En utilisant la notation factorielle, donner une autre écriture des nombres :

a) $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$ b) $n(n^2-1)$

c) $\frac{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$ d) $2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2n$

**Corrigé**

a) $\frac{9!}{4!}$ b) $n(n^2-1) = (n-1)n(n+1) = \frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

c) $\frac{9!}{(4!)^2}$ d) $2^n \times n!$

**Exercice 3**

Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :

a) $C_n^2 = 36$

b) $C_n^{n-2} = 28$

c) $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$

**Corrigé**

a) $C_n^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!\times(n-2)!} = 36 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 36 \Leftrightarrow n^2 - n - 72 = 0$

Équation du $2^{nd}$ degré qui admet deux solutions : $9$ et $-8$.

Comme $n \in \mathbb{N}$ alors la solution retenue est $n = 9$.

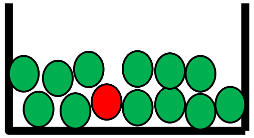
b) et c) se traitent de la même façon.

# Triangle de Pascal

On démontre la formule du binôme de Newton via la récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

Formule de Pascal : $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$



Une urne contient $n+1$ boules : $n$ vertes et $1$ rouge. On en tire simultanément $p+1$ boules :

$$\underbrace{C_{n+1}^{p+1}}_{\text{tous les tirages}} = \underbrace{C_n^p}_{\text{tirages amenant la rouge}} + \underbrace{C_n^{p+1}}_{\text{tirages n'amenant pas la rouge}}$$

Symétrie des coefficients : $C_n^p = C_n^{n-p}$

Tirer simultanément $p$ boules parmi $n$ équivaut à laisser $n-p$ boules dans l'urne.

Les coefficients $C_n^k$ peuvent être calculés de proche en proche en utilisant la formule de Pascal.

| | | Valeurs de k | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| v | 0 | 1 | | | | | | | |
| a | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| l | 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | |
| e | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | |
| u | 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | |
| r | 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | |
| s | 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | |
| de | ... | | | | | | | | |
| n | | | | | | | | | |

$C_4^1 + C_4^2 = C_5^2$

$C_5^3$

$C_6^2 = C_6^4$

# Exercices sur les coefficients binomiaux

| | |
| --- | --- |
| **Exercice 1**<br>Déterminer le coefficient du monôme $x^4y^3$ dans le développement de :<br>$(2x-3y)^7$ | **Corrigé**<br>Selon le binôme de Newton, on a :<br>$(2x-3y)^7=\sum_{k=0}^{k=7} C_7^k(2x)^k(-3y)^{7-k}$<br>Pour $k=4$, on obtient le terme : $C_7^4(2x)^4(-3y)^{7-4}=\left(2^4\times(-3)^3C_7^4\right)x^4y^3$<br>Donc le coefficient cherché est : $2^4\times(-3)^3C_7^4=-15\,120$ |
| **Exercice 2**<br>1. Développer $f(x)=(1+x)^n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.<br>2. En déduire la valeur des sommes suivantes :<br>a. $A=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n$<br>b. $B=C_n^0-C_n^1+\cdots+(-1)^kC_n^k+\cdots+(-1)^nC_n^n$<br>c. $C=C_n^0+2C_n^1+\cdots+2^kC_n^k+\cdots+2^nC_n^n$<br>3. Calculer $f'(x)$. En déduire la valeur de la somme :<br>$D=C_n^1+2C_n^2+\cdots+kC_n^k+\cdots+nC_n^n$<br>4. En calculant de deux manières différentes l'intégrale:<br>$g(y)=\int_0^y f(x)dx,$<br>Calculer la somme :<br>$E=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\cdots+\frac{1}{k+1}C_n^k+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n$ | **Corrigé**<br>1. On a par application du binôme de Newton :<br>$f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{k=n} C_n^kx^k$<br>2. a. Pour $x=1$, on trouve $A=2^n$.<br>b. Pour $x=-1$, on trouve $B=0$.<br>c. Pour $x=2$, on trouve $C=3^n$.<br>3. On a :<br>$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=1}^{k=n} kC_n^kx^{k-1}$<br>Si on pose $x=1$, on trouve $D=n\times2^{n-1}$.<br>4. On a :<br>$g(y)=\int_0^y f(x)dx=\int_0^y(1+x)^ndx=\int_0^y\left(\sum_{k=0}^{k=n}C_n^kx^k\right)dx=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k.\int_0^y x^kdx$<br>D'où :<br>$g(y)=\left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^y=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^y=\sum_{k=0}^{k=n}C_n^k\frac{y^{k+1}}{k+1}$<br>Pour $y=1$, on trouve :<br>$E=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ |

## Exercice 3

*On appelle **anagramme** d'un mot, un mot (même s'il n'a pas de sens) qui s'écrit avec les mêmes lettres que le premier en respectant les occurrences des lettres.*

*Exemple : les anagrammes du mot « BAC » sont : BCA, ABC, ACB, CAB, CBA.*

Quel est le nombre d'anagrammes des mots suivants :

« successif », « mathématiques »?

## Corrigé

Le mot « successif » s'écrit avec 9 lettres. Si toutes les 9 lettres étaient distinctes deux à deux alors le nombre d'anagrammes serait égal à $\mathbf{9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362\,880}$.

Si on numérote les lettres S et les lettres C, on aura à déterminer le nombre d'anagrammes du mot : « $\mathbf{s_1uc_1c_2es_2s_3if}$ » qui est en fait $\mathbf{9! = 362\,880}$. Or la permutation des lettres $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$, $\mathbf{s_3}$ ne change pas le mot, comme la permutation des lettres $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ et il y a $\mathbf{3! = 6}$ façons de permuter les lettres $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$, $\mathbf{s_3}$ et $\mathbf{2! = 2}$ façons de permuter les lettres $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ alors on peut déduire que le nombre d'anagrammes du mot « successif » est :

$$\frac{\mathbf{9!}}{\mathbf{3! \times 2!}} = \frac{\mathbf{362\,880}}{\mathbf{12}} = \mathbf{30\,240}$$

**Bonne Chance**

اللهم صل على محمد وآل محمد