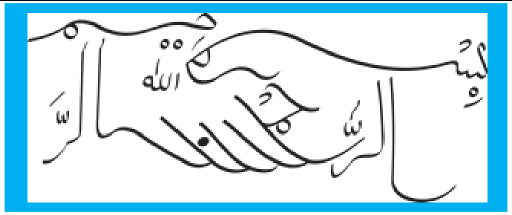
Prof. Sidi Major



DENOMBREMENT

Problème : Un sac contient 7 jetons, indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 7. On tire 3 jetons du sac.
Question : Quel est le nombre de tirages possibles ?

Sous cette forme, la question est ouverte et pour apporter une réponse, on envisagera trois modalités de tirages :

1. Tirage successif avec remise (TSAR);
2. Tirage successif sans remise (TSSR) ;
3. Tirage simultané (TS).

1. Tirage successif avec remise (TSAR)

Les jetons sont tirés un à un, en remettant à chaque fois dans le sac, le jeton (Ordre et répétition)

Les tirages	1er jeton		2e jeton		3e jeton		
Nombre de tirages	7	×	7	×	7	=	7^3

Généralisation

Soit n et p 2 naturels non nuls.

Il y a n^p manières de tirer successivement, avec remise, p jetons parmi n jetons.

Un tel tirage correspond à un p-uplet appelé une p-liste de p éléments parmi n.

Exemples

- Combien peut-on former d'entiers naturels de 5 chiffres en utilisant les chiffres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 ? Réponse : Écrire un nombre de 5 chiffres revient à remplir la grille avec les chiffres considérés.

8	8	8	8	8

Donc il y a 8^5 nombres possibles car chaque case a 8 possibilités d'être remplie.

- Un opérateur de téléphones adopte une numérotation à huit chiffres commençant par 4. Quelle est sa capacité maximale ? Réponse : 10^7

1	10	10	10	10	10	10	10

Pour le 1er chiffre, il y a une seule possibilité tandis que pour chacun des autres 7 chiffres il y a 10 possibilités.

2. Tirage successif sans remise (TSSR)

Les jetons sont tirés un à un sans les remettre dans le sac. (Ordre et sans répétition)

Les tirages	1^{er} jeton		2^{e} jeton		3^{e} jeton		
Nombre de tirages	7	×	6	×	5	=	**210**

Généralisation

Soit 2 naturels n et p tels que : $\mathbf{1 \leq p \leq n}$.

Il y a $\mathbf{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}$ manières de tirer, successivement sans remise, p jetons parmi n jetons. Un tel tirage s'appelle un arrangement de p éléments parmi n. On note

$$\mathbf{A_n^p = \underbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}_{p\ facteurs}}$$

Exemples

- 10 candidats participent à un concours. De combien de manières peut-on classer les 4 premiers sans ex aequo ?

  Réponse : $\mathbf{A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7}$

- Combien peut-on former d'entiers naturels de 5 chiffres, tous distincts, en utilisant les chiffres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 ?

  Réponse : $\mathbf{A_8^5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}$

3. Tirage simultané (TS)

Les trois jetons sont tirés en un seul coup. (Sans ordre et sans répétition)

A chaque tirage simultané de 3 jetons correspondent $\mathbf{3 \times 2 \times 1 = 6}$ arrangements de 3 parmi 7.

En effet, si on tire simultanément, par exemple, les jetons numérotés 1, 2 et 3 alors cet ensemble $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$ peut être amené par 6 tirages successifs sans remise :

$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$

1-2-3	1-3-2	2-1-3	2-3-1	3-1-2	3-2-1

Ainsi, le nombre de tirages possibles est égal à :

$$\mathbf{\frac{A_7^3}{6} = \frac{210}{6} = 35}$$

Généralisation

Soit 2 naturels n et p tels que : $1 \leq p \leq n$.

Il y a $\frac{A_n^p}{1\times2\times\ldots\times p}$ manières de tirer, simultanément, p jetons parmi n jetons. Un tel tirage s'appelle une combinaison de p éléments parmi n. On note :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{1\times2\times3\times\ldots\times p}.$$

Exemples

- Quel est le nombre de mains de 5 cartes dans jeu de 11 cartes ?

  Réponse : $C_{11}^5 = \frac{A_{11}^5}{5\times4\times3\times2\times1}$

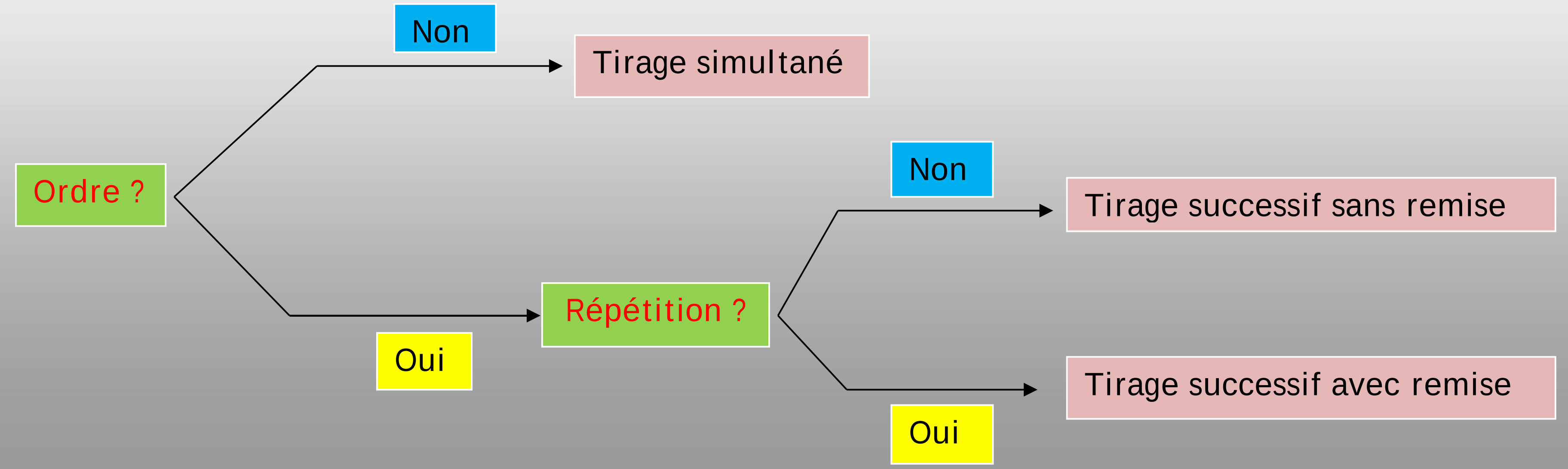
- Une urne contient 14 boules dont 8 rouges et 6 jaunes. On tire simultanément 5 boules. Combien de tirages amènent 3 boules rouges et 2 boules jaunes ?

  Réponse : $C_8^3 \times C_6^2$

MODELE DE TIRAGE

En général, si on rencontre une question de dénombrement, on compare la situation à l'une des trois modalités de tirages : tirage simultané, tirage successif sans remise, tirage successif avec remise. Dans ce cas, on dit qu'on a adopté le modèle de tirage.

Pour comparer une situation de dénombrement à un tirage, on se pose deux questions selon l'arbre suivant :



EXEMPLES DE PROBLEMES DE DENOMBREMENT

Exercice	Corrigé succinct
Exercice 1 Sur YouTube, les vidéos sont identifiées à l'aide d'une chaîne de 11 caractères alphanumériques (26 lettres, majuscules, minuscules, et 10 chiffres). Combien de vidéos différentes peut-on ainsi identifier?	**Corrigé succinct** Il y a 26 lettres majuscules, 26 lettres minuscules et 10 chiffres soit 62 caractères alphanumériques. Il y a ordre et possibilité de répétition. Réponse : $\mathbf{62^{11} \cong 5,2 \times 10^{19} = 52}$ **milliards de milliards de vidéos**(!!!)
Exercice 2 Dans une classe de terminale, il y a 20 filles et 14 garçons. 1. Combien de délégations différentes de 5 élèves peut-on composer avec des élèves de la classe ? 2. Reprendre la question précédente en supposant que la délégation : • Ne comporte que des filles. • Ne comporte que des garçons. • Soit mixte (au moins une fille et au moins un garçon). Pour cette deuxième question, on effectuera le calcul de deux façons différentes.	**Corrigé succinct** Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition. 1. $\mathbf{C_{34}^{5} = 278\,256}$ 2. Délégations ne comportant que des filles : $\mathbf{C_{20}^{5} = 15\,504}$. Délégations ne comportant que des garçons : $\mathbf{C_{14}^{5} = 2\,002}$. Pour la dernière question, penser qu'il n'existe que trois sortes de délégations : mixtes, ne comportant que des garçons, ne comportant que des filles : $\mathbf{C_{34}^{5} - C_{20}^{5} - C_{14}^{5} = 260\,750}$
Exercice 3 Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres équipes une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?	**Corrigé succinct** Le choix quelconque de deux équipes définit un match. Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition. Réponse : $\mathbf{C_{8}^{2} = 28}$

Exercice 4

Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1. Calculer le nombre d'éléments de A.
2. Dénombrer les éléments de l'ensemble A :
   a. Composés de quatre chiffres distincts
   b. Composés d'au moins deux chiffres identiques

Corrigé succinct

1.

a≠0	b	c	d
9	10	10	10

$= 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$

2. a. Il y a ordre et sans répétition : …

   b. …

Exercice 5

Dans un jeu de 32 cartes, combien peut-on former de mains de 8 cartes contenant :

1. 3 piques exactement ?
2. 2 piques et 2 carreaux exactement ?
3. 1 roi et 1 trèfle exactement ?
4. Au plus deux rois ?
5. Au moins 3 dames ?

Corrigé succinct

1. $C_8^3 \times C_{24}^5 = 2\,380\,224$.
2. $C_8^2 \times C_8^2 \times C_{16}^4 = 1\,426\,880$.
3. On remarque que si on tire le roi de trèfle alors on a un roi et une carte de trèfle.

$$\underbrace{C_1^1}_{\text{le roi de trèfle}} \times \underbrace{C_{21}^7}_{\text{7 cartes autres que les trèfles et les rois}} + \underbrace{C_3^1}_{\text{un autre roi}} \times \underbrace{C_7^1}_{\text{une carte de trèfle autre que le roi}} \times \underbrace{C_{21}^6}_{\text{6 cartes parmi les 21 restantes}}$$

$= 1\,255\,824$

4. $C_{28}^8 + C_{28}^7 \times C_4^1 + C_{28}^6 \times C_4^2 = 10\,104\,705$
5. $C_{28}^4 \times C_4^4 + C_{28}^5 \times C_4^3 = 413\,595$

Exercice 6

Le conseil d'administration d'une société, composé de 14 membres dont 8 hommes et 6 femmes, veut former un bureau de 7 membres parmi lesquelles 3 sont des femmes.

1. Combien de bureaux peut-on ainsi former ?
2. Combien de bureaux peut-on former si on sait que M^{me} A refuse de siéger aux mêmes bureaux que Monsieur B ?

Corrigé succinct

1. $C_8^4 \times C_6^3 = 1400$
2. Sans ordre et sans répétition.

On envisage trois types de bureaux selon que M^{me} A et Mr. B y sont membres ou non :

$$\underbrace{C_5^2 \times C_7^4}_{\text{A et nonB}} + \underbrace{C_5^3 \times C_7^3}_{\text{nonA et B}} + \underbrace{C_5^3 \times C_7^4}_{\text{nonA et nonB}} = 1\,050$$

Exercice 7

Dans un jeu de 32 cartes, on tire au hasard une main de 5 cartes. Quel est le nombre de mains contenant :

1. Un as et deux cœurs ?
2. Deux rois et deux valets ?
3. Au moins un as ?

Corrigé succinct

1. Sans ordre et sans répétition.

$$\underbrace{C_1^1 \times C_7^1 \times C_{21}^3}_{\substack{\text{As de coeur} \\ \text{+ une autre} \\ \text{carte de coeur} \\ \text{+ 3 autres cartes}}} + \underbrace{C_3^1 \times C_7^2 \times C_{21}^2}_{\substack{\text{Un as autre que l'as de coeur} \\ \text{+2 cartes de coeur} \\ \text{+3autres cartes}}} = 22\,540$$

2. $$\underbrace{C_4^2}_{\text{2 rois}} \times \underbrace{C_4^2}_{\text{2 valets}} \times \underbrace{C_{24}^1}_{\substack{\text{1 autre carte} \\ \text{parmi les} \\ \text{21 restantes}}} = 864$$

3. $$\underbrace{C_{32}^5}_{\substack{\text{toutes} \\ \text{les mains}}} - \underbrace{C_{28}^5}_{\substack{\text{les mains ne} \\ \text{contenant} \\ \text{aucun as}}} = 103\,096$$

Calcul de A_n^p et de C_n^p à la calculatrice

n SHIFT nCr p = $\longrightarrow C_n^p$

n SHIFT nPr p = $\longrightarrow A_n^p$

Bonne Chance