Problème de synthèse

- Fonction logarithme népérien
- Convergence de suites numériques
- Fonction partie entière
- Intégrales

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier la convergence de la suite (c_n) définie pour tout entier $n \geq 2$ par :

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \ln n.$$

1. Montrer que, pour tout réel $x \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}.$$

2. On pose, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

a. Prouver que, pour tout $n \geq 1$: $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$.

b. En déduire que la suite (u_n) est divergente.

3. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

a. En utilisant l'encadrement obtenu à la question 1, montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

b. Vérifier que, pour tout entier $n \geq 2$, $c_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$. En déduire que la suite (c_n) est croissante et que, pour tout $n \geq 2$, $f(1) \leq c_n \leq 1 - 1/n$.

c. Déduire des questions précédentes que la suite (c_n) converge vers un réel que l'on note γ.

Remarque : Ce réel γ s'appelle la constante d'Euler. Euler a calculé 16 décimales de γ en 1734 ($\gamma \cong 0,5772\ldots$). Actuellement, on ne sait toujours pas si γ est rationnel ou irrationnel.

Partie B

Le but de cette partie est l'étude de la convergence de la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par :

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n\,[mod.\,k]}{k}.$$

1. Justifier que :

$$\forall n \geq 1, \qquad U_n = \frac{1}{n}\sum_{k1}^{n}\left(\frac{n}{k} - \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right).$$

où $\lfloor z \rfloor$ représente la partie entière par défaut du nombre réel z.

2. On considère la fonction h définie sur $]0; 1]$ par : $h(t) = 1/t - \lfloor 1/t \rfloor$

On définit la fonction H sur $]0; 1]$ par : $H(x) = \int_x^1 h(t)dt$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $V_n = H(1/n)$.

a. Montrer que :

$$\forall n \geq 1,\ V_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}\right].$$

b. En déduire que :

$$\forall n \geq 1,\ \ V_n = \ln(n) - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = -c_n$$

où c_n est le terme général de la suite définie à la partie A.

c. Déterminer alors la limite de V_n.

3. Pour tout réel x de $]0;1[$, on pose : $n_x = \lfloor 1/x \rfloor$.

a. Montrer que pour tout x de $]0;1[$:

$$0 \leq \int_x^{1/n_x} h(t)dt \leq \frac{1}{n_x} - x.$$

b. En déduire que $\int_0^1 h(t)dt = 1 - \gamma$ puis donner la limite de U_n lorsque n tend vers l'infini.

Corrigé

Partie A

1. On pose, pour tout réel $x \geq 1$:

$$u(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}$$

$$v(x) = \frac{1}{x} - \ln(x+1) + \ln x$$

■ Étude de la fonction u sur $[1;+\infty[$:

On a pour tout réel x de $[1;+\infty[$:

$$u'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} < 0$$

Donc la fonction u est décroissante sur $[1;+\infty[$ et de plus :

$$u(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \underbrace{\longrightarrow}_{x\to+\infty} 0$$

Donc pour tout x de $[1;+\infty[$, $u(x) \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \quad ①$$

■ Étude de la fonction v sur $[1;+\infty[$:

On a pour tout réel x de $[1;+\infty[$:

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)} < 0$$

Donc la fonction v est décroissante sur $[1;+\infty[$ et de plus :

$$v(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underbrace{\longrightarrow}_{x\to+\infty} 0$$

Donc pour tout x de $[1;+\infty[$, $v(x) \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x} \quad ②$$

Donc en combinant ① et ②, nous obtenons la double inégalité demandée.

Remarque :

On aurait pu établir cette double inégalité en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \longmapsto \ln t$ sur l'intervalle $[x;x+1]$ pour $x \geq 1$:

$$\exists c \in\ ]x;x+1[,\qquad \frac{\ln(x+1) - \ln x}{(x+1) - x} = (\ln)'(c) = \frac{1}{c}$$

Soit encore :

$$\exists c \in]x; x+1[, \qquad \ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{c}$$

Or on sait que :

$$x < c < x+1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

D'où le résultat demandé.

2. a. On note, pour tout entier $n \geq 1$, $P(n)$ la proposition « $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$ ».
Pour $n = 1$, on a $u_2 = 1 - 1/2$ et $u_1 = 1$. Comme $1/2 \leq \ln 2 \leq 1$, la proposition $P(1)$ est vraie.
Pour un certain entier naturel non nul n, on suppose que $P(n)$ est vraie i.e. :

« $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$ ③».

En utilisant l'encadrement de la question 1, pour $x = n+1$, on obtient :

$$\frac{1}{n+2} \leq \ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1} \quad ④$$

On ajoute, membre à membre, les encadrements ③ et ④ pour obtenir :

$$u_{n+1} + \frac{1}{n+2} - 1 \leq \ln(n+2) \leq u_n + \frac{1}{n+1}$$

Ainsi,

$$u_{n+2} - 1 \leq \ln(n+2) \leq u_{n+1}$$

Donc la proposition $P(n+1)$ est vraie.
La proposition $P(n)$ est vraie au rang 1 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \geq 1$.
Pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n$.

b. Pour $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq u_n$. Comme $\ln(n+1) \to +\infty$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

3. a. On utilise l'encadrement de la question 1 avec $x = n$. Il vient :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

On multiplie par (-1) :

$$-\frac{1}{n} \leq -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$$

Ainsi :

$$0 \leq \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Finalement :

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

b. Pour tout entier $n \geq 2$, on note $Q(n)$ la proposition :

« $c_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$ ».

Pour $n = 2$, $c_2 = 1 - \ln 2$ et $f(1) = 1 - \ln 2$ donc $c_2 = f(1)$ et la proposition $Q(1)$ est vraie.

Pour un certain entier $n \geq 2$, on suppose que la proposition $Q(n)$ est vraie i.e. :

$$c_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$$

On a :

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n) = c_n + f(n)$$

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n) = u_{n-1} - \ln n + \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n) = u_n - \ln(n+1)$$

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + f(n) = u_{n+1}$$

La proposition $Q(n+1)$ est vraie.
La proposition $Q(n)$ est vraie au rang 2 et elle est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \geq 2$.
Donc pour tout $n \geq 2$, on a $c_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$.

Pour tout $n \geq 2$, on a $c_{n+1} - c_n = f(n) \geq 0$, donc la suite (c_n) est croissante.

Pour tout $n \geq 2$, $f(n) \geq 0$, donc $f(1) \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) = c_n$.

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&f(1) \leq 1 - \frac{1}{2}\\
&f(2) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f(n-2) \leq \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\\
&f(n-1) \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient :

$$c_n \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

Donc en conclusion pour tout entier $n \geq 2$:

$$f(1) \leq c_n \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

c. On déduit de la question précédente que, pour tout entier $n \geq 2$, $f(1) \leq c_n \leq 1$.
La suite (c_n) est croissante et majorée par 1, elle est donc convergente vers un réel γ vérifiant $1 - \ln 2 \leq \gamma \leq 1$.

Partie B

1. Par définition du modulo k, on a :

$$n \equiv n - k \times \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

D'où :

$$n\,[mod.\,k] = \frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

Donc :

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n\,[mod.k]}{k}. = \frac{1}{n}\sum_{k1}^{n}\left(\frac{n}{k} - \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right).$$

2. a. On a :

$$\forall n \geq 1, \qquad V_n = H\left(\frac{1}{n}\right) = \int_{1/n}^{1} h(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{1/(k+1)}^{1/k} h(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{1/(k+1)}^{1/k}\left(\frac{1}{t} - k\right)dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) - \frac{1}{k+1}\right].$$

b. En réindexant la dernière somme et en utilisant l'égalité :

$$\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \ln k - \ln(k+1)$$

on trouve :

$$\forall n \geq 1, \qquad V_n = \ln(n) - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}.$$

c. Il est clair que :

$$\forall n \geq 1, \qquad V_n = \ln(n) - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = 1 - \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right]$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = 1 - \lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right] = 1 - \gamma.$$

3. a. La fonction h étant majorée par $\mathbf{1}$ sur $]0;1]$, on a :

$$0 \leq \int_{x}^{1/n_x} h(t)dt \leq \int_{x}^{1/n_x} 1.\,dt = \frac{1}{n_x} - x.$$

b. Si x tend vers 0^+ alors $n_x = \lfloor 1/x \rfloor$ tend vers $+\infty$, et par suite :

$$\lim_{x\to0^+}[(1/n_x) - x] = 0.$$

Donc, on trouve :

$$\lim_{x\to0^+}\int_{x}^{1/n_x} h(t)dt = 0.$$

D'autre part, on :

$$\int_{x}^{1} h(t)\,dt = \int_{x}^{1/n_x} h(t)dt + \int_{1/n_x}^{1} h(t)dt = \int_{x}^{1/n_x} h(t)dt + V_{n_x}$$

On en déduit que :

$$\int_{0}^{1} h(t)\,dt = \lim_{x\to0^+}\int_{x}^{1} h(t)\,dt = \lim_{x\to0^+} V_{n_x} = 1 - \gamma.$$

On a déjà établi que :

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{k1}^{n}\left(\frac{n}{k} - \left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor\right)$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à l'intégrale $\int_0^1 h(t)\,dt$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1 - \gamma.$$

Motif emprunté à Sigmaths