Quelques exercices tirés des anciens bacs C - Mauritanie

Exercice 1 (Bac C – Mauritanie - 1996)

On considère deux points $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ et la droite fixe $(\mathbf{D})$ passant par $\mathbf{A}$ et telle que $(\mathbf{AB},(\mathbf{D}))=\boldsymbol{\pi}/\mathbf{3}\ [\boldsymbol{\pi}]$. On désigne par $\mathbf{J}$ le projeté orthogonal de $\mathbf{B}$ sur la droite $(\mathbf{D})$, par $\mathbf{I}$ le milieu de $[\mathbf{AB}]$.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle variable passant par $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$; on note $\mathbf{O}$ son centre. Le cercle $\mathcal{C}$ recoupe la droite $(\mathbf{D})$ au point $\mathbf{M}$. Soit $(\mathbf{T})$ la tangente en $\mathbf{M}$ au cercle $\mathcal{C}$.

1. Soit **U** et **U'** les projetés orthogonaux de $\mathbf{B}$ respectivement sur $(\mathbf{OM})$ et $(\mathbf{T})$.

- **a.** Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe $\mathbf{S_1}$ de centre $\mathbf{B}$ qui envoie le point $\mathbf{O}$ en le point $\mathbf{M}$.
- **b.** Déterminer $\mathbf{S_2}(\mathbf{O})$ où $\mathbf{S_2}$ est la similitude directe de centre $\mathbf{B}$, de rapport $\sqrt{\mathbf{3}}/\mathbf{2}$ et d'angle $\boldsymbol{\pi}/\mathbf{6}$.

2. Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ les ensembles décrits respectivement par **U** et **U'** lorsque le cercle $\mathcal{C}$ varie.

- **a.** Déterminer la nature de $\mathcal{E}$.
- **b.** Reconnaître le point **U** dans les deux cas :
  - → Si le point $\mathbf{O}$ est situé sur la droite $(\mathbf{D})$;
  - → Si $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle $\mathbf{ABL}$ où $\mathbf{L}$ est le point d'intersection de la médiatrice de $[\mathbf{AB}]$ et de la droite $(\mathbf{D})$.
- **c.** Déterminer la nature de $\mathcal{E}'$.
- **d.** Reconnaître le point **U'** dans le cas où la droite $(\mathbf{D})$ est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point $\mathbf{A}$.
- **e.** Construire $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

3. Soit $\boldsymbol{\Gamma_1}$ et $\boldsymbol{\Gamma_2}$ deux cercles distincts sécants en $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ et de centres respectifs $\mathbf{O_1}$ et $\mathbf{O_2}$. Ces deux cercles recoupent la droite $(\mathbf{D})$ aux points $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$. Les droites $(\mathbf{T_1})$ et $(\mathbf{T_2})$ sont tangentes respectivement aux cercles $\boldsymbol{\Gamma_1}$ et $\boldsymbol{\Gamma_2}$ en $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$ et elles se coupent en un point $\mathbf{P}$.

- **a.** Montrer que :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathbf{BM_1}},\overrightarrow{\mathbf{BM_2}}\right)=\left(\overrightarrow{\mathbf{BO_1}},\overrightarrow{\mathbf{BO_2}}\right)\ [\mathbf{2\pi}] \\ \dfrac{\mathbf{BM_2}}{\mathbf{BM_1}}=\dfrac{\mathbf{BO_2}}{\mathbf{BO_1}} \end{cases}$$

- **b.** En déduire que $\mathbf{M_2}$ est l'image de $\mathbf{M_1}$ par la similitude directe de centre $\mathbf{B}$ qui envoie le cercle $\boldsymbol{\Gamma_1}$ en le cercle $\boldsymbol{\Gamma_2}$.
- **c.** Justifier que $(\mathbf{T_2})$ est l'image de $(\mathbf{T_1})$ par cette même similitude.
- **d.** En déduire que le point $\mathbf{P}$ appartient au cercle circonscrit au triangle $\mathbf{BM_1M_2}$.

Exercice 2 (Bac C - Mauritanie)

Soit $\mathbf{f}$ l'application du plan muni d'un repère orthonormé direct $(\boldsymbol{O};\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ qui à tout point $\mathbf{M}$ d'affixe $\mathbf{z}$ associe le point $\mathbf{M}'$ d'affixe $\mathbf{z}'$ tel que : $\mathbf{12z'}=\mathbf{5z}-\mathbf{i}\overline{\mathbf{z}}+\mathbf{12}+\mathbf{36i}$.

1. On pose $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{iy}$ et $\mathbf{z}'=\mathbf{x}'+\mathbf{iy}'$ où $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$ sont des réels.
Exprimer $\mathbf{x}'$ et $\mathbf{y}'$ en fonction de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

2. Montrer que $\mathbf{f}$ admet un unique point invariant $\boldsymbol{\Omega}$.

3. Soit $\mathbf{h_1}$ et $\mathbf{h_2}$ les homothéties de même centre $\boldsymbol{\Omega}$ et de rapports respectifs $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ et $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$.

a. Déterminer l'ensemble $\mathbf{D_1}$ des points $\mathbf{M}$ du plan tels que : $\mathbf{h_1(M) = f(M)}$.
b. Déterminer l'ensemble $\mathbf{D_2}$ des points $\mathbf{M}$ du plan tels que : $\mathbf{h_2(M) = f(M)}$.
c. Déterminer un point $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{D_1}$ et un point $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{D_2}$ tels que le triplet $\left(\boldsymbol{\Omega};\, \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}}, \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}\mathbf{B}}\right)$ soit un repère orthonormé direct du plan.

4. a. Déterminer l'expression analytique de $\mathbf{f}$ dans le nouveau repère $\left(\boldsymbol{\Omega};\, \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}}, \overrightarrow{\boldsymbol{\Omega}\mathbf{B}}\right)$.
b. Montrer que pour tous points $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ du plan, on a :

$$\mathbf{d(f(M), f(N)) \leq \frac{1}{2} d(M, N)}$$

où $\mathbf{d(X, Y) = XY}$ désigne la distance entre les points $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$.
c. On se donne un point fixé $\mathbf{M_0}$ et on définit les points $\mathbf{M_n}$ par la relation de récurrence : $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N},\ \mathbf{M_{n+1} = f(M_n)}$.
Montrer que : $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N},\ \mathbf{d}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M_n}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{n}} \mathbf{d}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M_0})$.
d. Quelle est la limite de la suite de terme général $\mathbf{d}(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{M_n})$?

5. On définit les deux suites numériques $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ par les relations suivantes :

$$\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \mathbf{u_0 = 4} \\ \mathbf{u_{n+1} = \frac{5}{12} u_n - \frac{1}{12} v_n + 1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{u_0 = 6} \\ \mathbf{v_{n+1} = -\frac{1}{12} u_n + \frac{5}{12} v_n + 3} \end{cases}$$

Étudier la convergence des suites $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Exercice 3 (Bac-Mauritanie-1994)
Dans tout l'exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O};\, \overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}})$.

Partie A

Soit $\mathbf{a}$ un paramètre réel et $\mathbf{T_a}$ l'application du plan dans lui-même qui à tout point $\mathbf{M(z)}$ associe le point $\mathbf{M'(z')}$ tel que l'on ait $\mathbf{z' = bz}$ où $\mathbf{b}$ est le nombre complexe défini par :

$$\mathbf{b = \frac{1}{2} + ia}$$

1. Prouver que $\mathbf{T_a}$ est une similitude directe. Donner son centre et son rapport.
2. Montrer qu'il existe une unique valeur $\mathbf{a_0}$ de $\mathbf{a}$ pour laquelle $\mathbf{T_a}$ est une homothétie. Déterminer les éléments caractéristiques de cette homothétie.
3. Montrer qu'il existe deux valeurs $\mathbf{a_1}$ et $\mathbf{a_2}$ du paramètre a pour lesquelles $\mathbf{T_{a_1}}$ et $\mathbf{T_{a_2}}$ sont des isométries.
Vérifier que : $\mathbf{T_{a_1} = T_{a_2}^{-1}}$. On pose : $\mathbf{R = T_{a_1} = T_{a_2}^{-1}}$.
4. Montrer que les transformations $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R^{-1}}$ laissent globalement invariant tout triangle équilatéral centré en $\mathbf{O}$.

Partie B

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathbf{z^3 = i}$.
On désigne par $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ les points dont les affixes sont les solutions de cette équation, $\mathbf{I}$ et $\mathbf{J}$ d'ordonnées positives et $\mathbf{K}$ d'ordonnée négative. Soit $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{J_1}$ et $\mathbf{K_1}$ les images respectives de $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ et $\mathbf{K}$ par $\mathbf{T_a}$.
2. Donner les affixes des points $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{J_1}$ et $\mathbf{K_1}$ en fonction de $\mathbf{a}$. En déduire que $\mathbf{I_1 \in (JK)}$, $\mathbf{J_1 \in (IK)}$ et $\mathbf{K_1 \in (IJ)}$ et cela pour toute valeur de $\mathbf{a}$.
3. Montrer que si $\mathbf{a}$ décrit $\mathbb{R}$ alors le milieu du segment $\mathbf{[J_1K_1]}$ décrit une droite que l'on déterminera.
4. Soit $\mathbf{I_2}$ l'image de $\mathbf{I_1}$ par $\mathbf{T_a}$.
a. Montrer que les coordonnées de $\mathbf{I_2}$ sont :

$$\begin{cases} x = -a \\ y = a^2 - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

b. Reconnaître alors l'ensemble Σ des points I_2 quand le paramètre a décrit $\mathbb{R}$.

c. Montrer que la dérivée $\frac{d(\overrightarrow{OI_2})}{da}$ du vecteur $\overrightarrow{OI_2}$ par rapport à a et le vecteur $\overrightarrow{J_1K_1}$ sont colinéaires et que la droite (J_1K_1) est tangente à Σ.

Partie C

On fixe a et on pose pour n entier : $T_a^0 = Id$ et $T_a^{n+1} = T_a \circ T_a^n$.

Soit D le point de coordonnées $(0, -1)$ et on pose $D_n = T_a^n(D)$.

1. Calculer l'affixe z_n de D_n en fonction de b et prouver que :

$$z_n = \left(\frac{-1}{2\cos\mu}\right)^n e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+n\mu\right)}$$

où μ est une mesure de l'angle de la similitude T_a.

Quelles sont les valeurs de μ pour lesquelles la suite $(|z_n|)$ est décroissante ?

2. Calculer :

$$\left\|\overrightarrow{D_nD_{n+1}}\right\| \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{p=0}^{n} \left\|\overrightarrow{D_pD_{p+1}}\right\|$$

3. Comment faut-il choisir μ pour que la suite (S_n) admette une limite finie quand n tend vers $+\infty$? Donner la valeur de cette limite dans le cas où $\mu = 3\pi/4$.

Exercice 4 (Bac C-Mauritanie-1998)

A l'extérieur d'un triangle direct non rectangle OAB, on construit trois carrés : $AONP$, $OBCU$ et $BATI$ de centres respectifs J, H et L. On suppose que les angles $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OA})$,, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OU})$ et $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})$ ont pour mesure $+\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Le but de l'exercice est l'étude de quelques propriétés de la configuration décrite ci-dessus.

<u>N.B.</u> : **Il est demandé de faire une figure pour chacune des parties.**

Partie A : ***Propriétés d'orthogonalité et d'égalité de distances***

1. On munit le plan d'un repère orthonormé direct dans lequel les points B et N ont pour affixes respectives **b** et **n**.

a. Quelles sont les affixes **a** et **u** des points A et U ?

b. Montrer que les droites (AU) et (BN) sont perpendiculaires et que $AU = BN$. Quelles conclusions similaires peut-on exhiber de la configuration ?

c. Soit G le point tel que $OUGN$ soit un parallélogramme. En déduire que le triangle GCP est rectangle isocèle.

2. Soit **t** la translation de vecteur $\overrightarrow{GN}$ et **r** le quart de tour direct de centre O.

a. Déterminer l'image de G par $r \circ t$.

b. Soit C' le symétrique de C par rapport à B. Démontrer que **r** transforme C' en C. Quelle est l'image de B par $r \circ t$?

c. En déduire que les droites (AC) et (GB) sont perpendiculaires et que $AC = GB$.

Partie B : ***Propriétés d'alignement et de concours***

1. Soit Q le point d'intersection de (BP) et (AC), et **t'** la translation de vecteur $\overrightarrow{TA}$.

a. Quelles sont les images, par la translation **t'**, des hauteurs du triangle TOI ?

b. En déduire que $(\mathbf{OQ})$ est la hauteur issue du sommet $\mathbf{O}$ du triangle $\mathbf{OAB}$.

c. Montrer que les points $\mathbf{G}$, $\mathbf{O}$ et $\mathbf{Q}$ sont alignés (on pourra utiliser le résultat de la question **A-2.c.**)

2. Soit $\mathbf{K_1}$ le point d'intersection des droites $(\mathbf{AU})$ et $(\mathbf{BN})$. Soient **s** et **s'** les deux similitudes directes de centre $\mathbf{O}$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angles respectifs $\frac{\pi}{4}$ et $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

a. Déterminer $\mathbf{s}(\mathbf{B})$, $\mathbf{s}(\mathbf{N})$, $\mathbf{s}'(\mathbf{A})$ et $\mathbf{s}'(\mathbf{U})$.

b. On définit les deux points $\mathbf{K}'$ et $\mathbf{K}''$ par : $\mathbf{K}' = \mathbf{s}(\mathbf{K_1})$ et $\mathbf{K}'' = \mathbf{s}'(\mathbf{K_1})$.
Montrer que les triangles directs $\mathbf{K_1K'O}$ et $\mathbf{K_1OK''}$ sont isocèles rectangles en $\mathbf{K_1}$ et que $\mathbf{K}' \in (\mathbf{CP})$ et $\mathbf{K}'' \in (\mathbf{CP})$.

c. En déduire que les droites $(\mathbf{AU})$, $(\mathbf{BN})$ et $(\mathbf{CP})$ sont concourantes.

d. Montrer que les droites $(\mathbf{OK_1})$ et $(\mathbf{PC})$ sont les bissectrices de l'angle des droites $(\mathbf{BN})$ et $(\mathbf{AU})$.

3. a. Montrer que les points $\mathbf{O}$, $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{N}$ d'une part, et $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{B}$ d'autre part, sont cocycliques. Quels sont les centres des cercles auxquels appartiennent respectivement ces points ?

b. Calculer $2\left(\overrightarrow{\mathbf{K_1O}}, \overrightarrow{\mathbf{K_1L}}\right)$. On pourra écrire : $\left(\overrightarrow{\mathbf{K_1O}}, \overrightarrow{\mathbf{K_1L}}\right) = \left(\overrightarrow{\mathbf{K_1O}}, \overrightarrow{\mathbf{K_1A}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathbf{K_1A}}, \overrightarrow{\mathbf{K_1L}}\right)$.
Que peut-on en conclure ?

4. On admet que :
Les droites $(\mathbf{AC})$, $(\mathbf{OI})$ et $(\mathbf{UT})$ sont concourantes en un point noté $\mathbf{K_2}$ et les droites $(\mathbf{OT})$, $(\mathbf{BP})$ et $(\mathbf{IN})$ sont concourantes en un point noté $\mathbf{K_3}$.
Montrer que les droites $(\mathbf{OK_1})$, $(\mathbf{AK_2})$ et $(\mathbf{BK_3})$ sont concourantes au point $\mathbf{K}$, orthocentre du triangle $\mathbf{HJL}$.