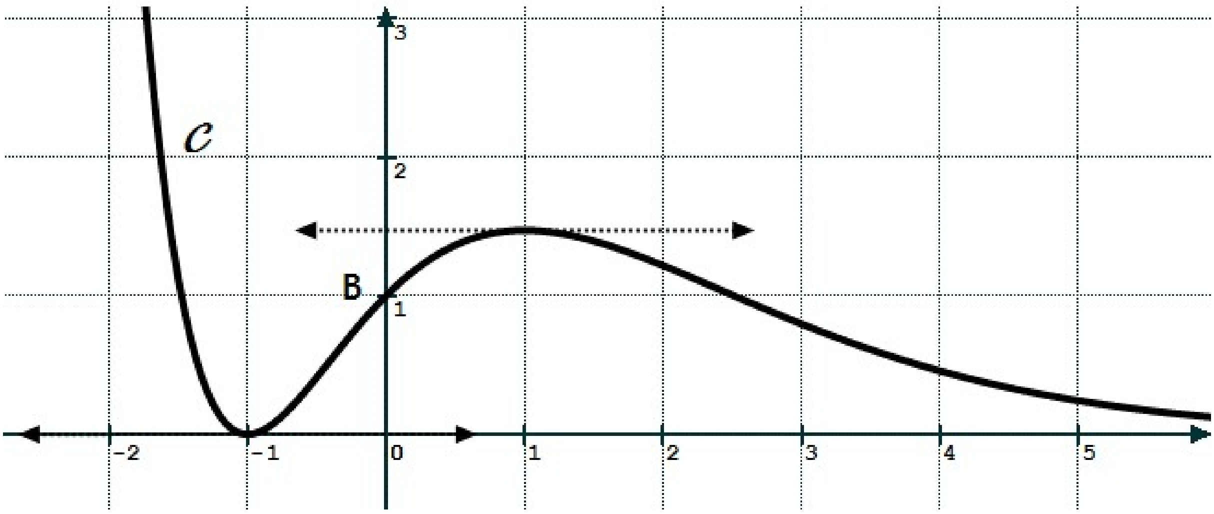
PROF. SIDI MAJOR

Soutien à distance au profit des élèves de la 7e D

Exercice

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

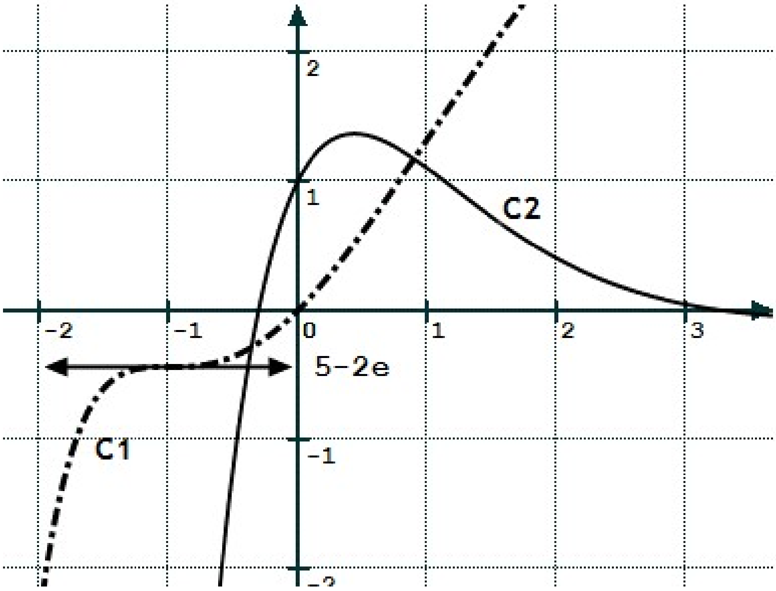
$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}, \text{ où } a,\ b,\ c \text{ sont trois réels.}$$



On donne son tableau de variation incomplet :

x	$-\infty$		-1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0			
$f(x)$		↘		↗		↘

1. **a.** A l'aide des renseignements portés sur la figure précédente, déterminer les nombres réels a, b, c.
   b. Compléter le tableau de variation en justifiant vos réponses.
2. On admet que la fonction f cherchée à la première question est donnée par : $f(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$, et on cherche à étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente T en B à $\mathcal{C}$.
   a. Déterminer l'équation réduite de T.
   b. Justifier que le problème revient à déterminer le signe de $(x+1)\varphi(x)$ où φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.
   c. Étudier le signe de $\varphi(x)$ et conclure.
3. On a tracé ci-dessous deux courbes C_1 et C_2 représentant respectivement deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ dont l'une est une primitive de f.



a. Reconnaître parmi les deux fonctions F et G celle qui est une primitive de la fonction f. Justifier votre réponse.

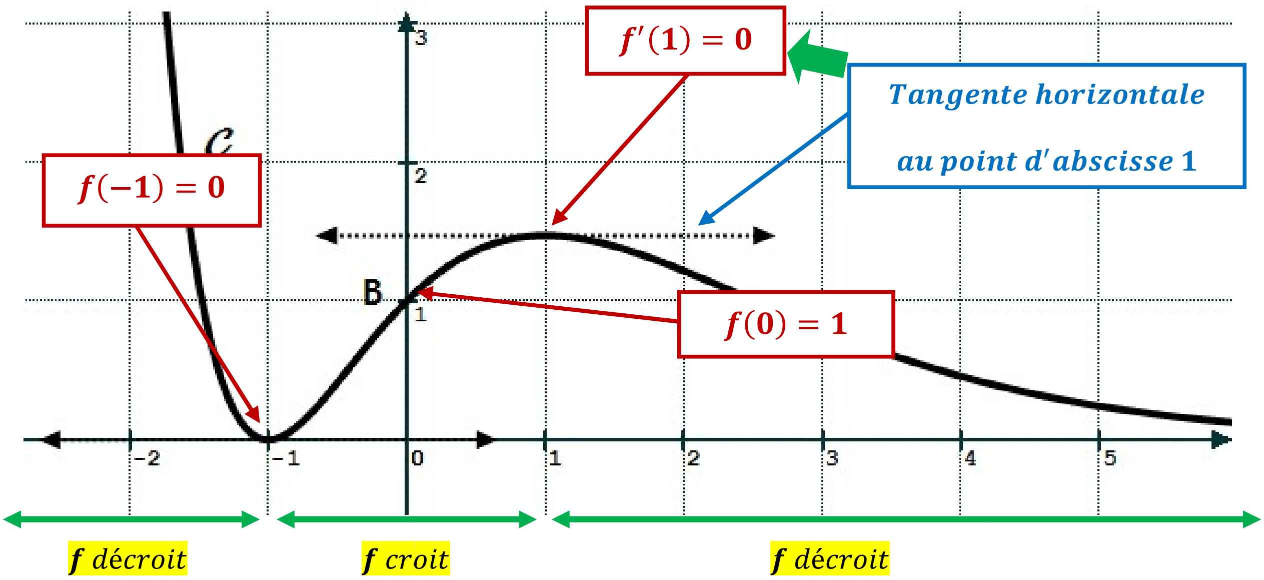
b. Compléter la phrase suivante : « La valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ est égale, en u.a, à l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par : « ....
....
.... »

c. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ définie dans la question précédente.

Corrigé

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}, \text{ où } a, b, c \text{ sont trois réels.}$$



4. a. On peut lire facilement sur la courbe les renseignements suivants et qui y sont d'ailleurs indiqués en rouge :

- $f(0) = 1$ car la courbe passe par le point $B(0;1)$. Cela se traduit par :
  $f(0) = (a \times 0^2 + b \times 0 + c)e^0 = 1$, c'est-à-dire $c = 1$.
- $f(-1) = 0$ car la courbe passe par le point de coordonnées $(-1;0)$. Cela se traduit par :
  $f(-1) = (a \times (-1)^2 + b \times (-1) + 1)e^1 = 0$, c'est-à-dire $a - b + 1 = 0$ **car** $e^1 = e \neq 0$.
  Donc, on a l'égalité $a - b = -1$.
- $f'(1) = 0$ car la tangente à la courbe en son point d'abscisse 1 est horizontale.

Tout d'abord, calculons la dérivée $f'(x)$ **:**

$f'(x) = (ax^2+bx+c)'e^{-x} + (ax^2+bx+c)(e^{-x})'$ (f est de la forme $u \times v$)

$f'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x}$ (Inutile de développer)

Donc $f'(1) = 0$ donne en remplaçant x par 1 et c par 1 **:**

$$(2a+b)e^{-1} - (a+b+1)e^{-1} = 0$$

Comme $e^{-1} \neq 0$ alors on obtient : $a = 1$.

Donc en utilisant $a - b = -1$, on trouve $1 - b = -1$, d'où $b = 2$.

En conclusion **:** $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$; la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2+2x+1)e^{-x}.$$

b. Compléter le tableau de variation en justifiant vos réponses.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4/e$	$\searrow$	0

Justifications :

① $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

En effet, la courbe admet une branche parabolique suivant (Oy) en $+\infty$.

② $f(-1) = 0$

En effet, la courbe passe par le point de coordonnées $(-1;0)$.

③ $f'(1) = 0$

En effet, la tangente à la courbe au point de coordonnées $(1;0)$ est horizontale.

④ $f(1) = \dfrac{4}{e}$

En effet, on a $f(1) = (1^2 + 2\times 1 + 1)e^{-1} = 4e^{-1} = 4/e$.

⑤ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

En effet, la courbe admet l'axe (Ox) pour asymptote horizontale en $+\infty$.

⑥ $\forall x \in [-1;1]$, $f'x) \geq 0$

En effet, sur $[-1;1]$, f est croissante (courbe qui monte de la gauche vers la droite).

⑦ $\forall x \in [1;+\infty[$, $f'x) \leq 0$

En effet sur $[1;+\infty[$, f est décroissante (courbe qui descend de la gauche vers la droite).

5. On admet que la fonction f cherchée à la première question est donnée par : $f(x) = (x^2+2x+1)e^{-x}$, et on cherche à étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente T en B à $\mathcal{C}$.

a. Déterminer l'équation réduite de T.

L'équation de la tangente T est donnée par : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Or $f(0) = 1$ et $f'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x^2+2x+1)e^{-x}$ **, soit** $f'(0) = 2 - 1 = 1$ **; d'où :**

$$T : \ y = x + 1$$

b. Justifier que le problème revient à déterminer le signe de $(x+1)\varphi(x)$ où φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de la tangente T revient à étudier le signe de la différence $f(x) - y = f(x) - (x+1)$**. On a :**

$$\begin{aligned} f(x) - y = f(x) - (x+1) &= (x^2+2x+1)e^{-x} - (x+1) = (x+1)^2 e^{-x} - (x+1) \\ &= (x+1)[(x+1)e^{-x} - 1] = (x+1)\varphi(x) \end{aligned}$$

Donc l'étude de la position relative revient à étudier le signe de $\varphi(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

c. Étudier le signe de $\varphi(x)$ et conclure.

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

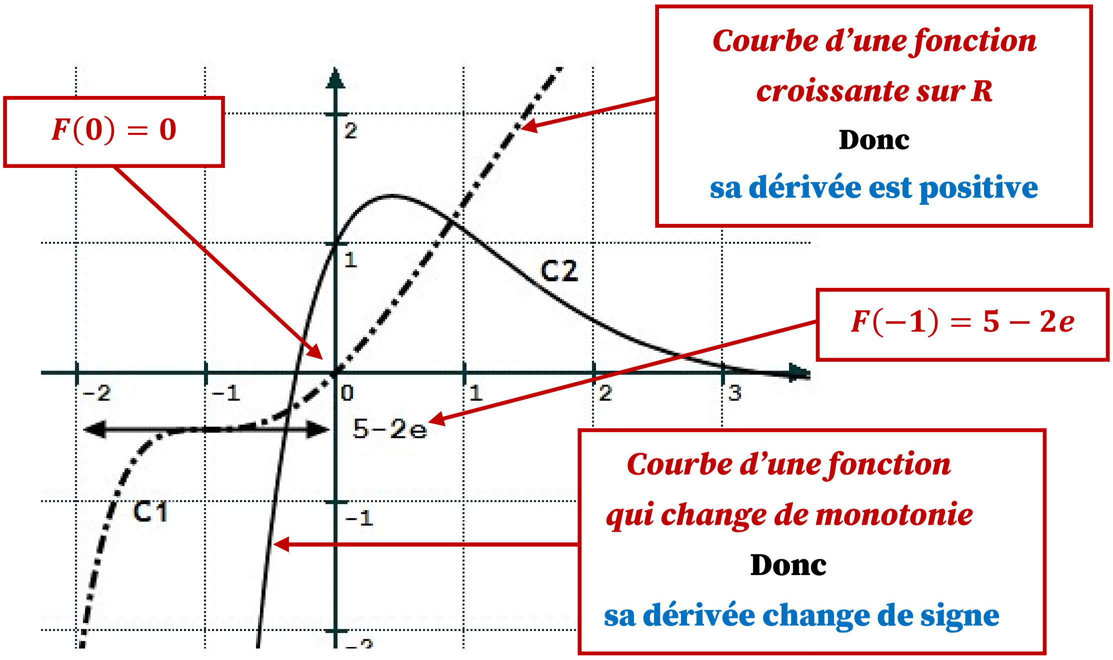
$$\varphi'(x) = (x+1)'e^{-x} + (x+1)(e^{-x})' = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$$

Donc le signe de φ' est opposé à celui de x.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+		+	0	$-$	
$\varphi(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	0	$\searrow$	
				$\varphi(x) \leq 0$			
$x+1$			0		+		
$f(x)-y$		+	0	$-$	0	$-$	
$P.R$		C/T	‖		T/C		

d. On a tracé ci-dessous deux courbes C_1 et C_2 représentant respectivement deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ dont l'une est une primitive de f.

a. Reconnaître parmi les deux fonctions F et G celle qui est une primitive de la fonction f. Justifier votre réponse.



Comme la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ puisque sa courbe est située entièrement au-dessus de l'axe des abscisses (ou bien on peut remarquer que $f(x) = (x+1)^2 e^{-x} \geq 0$) alors sa primitive est celle qui est croissante sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire la fonction F dont la courbe est $\boldsymbol{C1}$.

b. Compléter la phrase suivante : « La valeur de l'intégrale $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ est égale, en u.a, à l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par : « la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les deux droites verticales d'équations $x = -1$ et $x = 0$ »

c. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ définie dans la question précédente.
Comme la fonction f est positive sur l'intervalle $[-1; 0]$ alors l'aire $\mathcal{A}$, en unités d'aire, est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} f(x)dx = [F(x)]_{-1}^{0} = F(0) - F(-1) = 0 - (5 - 2e) = 2e - 5.$$