PROF. SIDI MAJOR

Soutien à distance au profit des élèves de la 7e D

Exercice

Le 1er janvier 2020, Aïcha a placé $3\ 000\ 000$ UM à intérêts composés au taux de 9% (un capital est placé à intérêts composés lorsque les intérêts produits à la fin de chaque année sont ajoutés au capital). On notera C_n le capital au 1er janvier de l'année $(2020 + \mathrm{n})$.

1. Calculer C_1. Établir la relation entre C_n et C_{n+1}. En déduire C_n en fonction de n.
2. Au 1er janvier 2031, Aïcha aura besoin d'une somme de $9\ 000\ 000$ UM pour acheter une maison. Le capital qu'elle possédera alors sera-t-il suffisant pour subvenir à cette dépense ? Sinon, combien devra-t-elle emprunter ?
3. A quel taux aurait-elle dû placer son capital le 1er janvier 2020 pour disposer des $9\ 000\ 000$ UM au 1er janvier 2031 ?

Corrigé

Préambule : Si on place une somme d'argent C_0 en banque à un taux de t %, on a deux types d'intérêts :

- Intérêt simple : les bénéfices sont prélevés sur le capital initial C_0 ;
- Intérêt composé : les bénéfices sont capitalisés et prélevés sur le dernier capital.

Exemple : On place en banque une somme $C_0 = 100\ 000$ à un taux de 10 %.
On note C_n le capital à l'année n.

	Intérêt simple	Intérêt composé
Année 0	$C_0 = 100\ 000$	$C_0 = 100\ 000$
Année 1	$C_1 = C_0 + \frac{10}{100}C_0 = 110\ 000$	$C_1 = C_0 + \frac{10}{100}C_0 = 110\ 000$
Année 2	$C_2 = C_1 + \frac{10}{100}C_0 = 120\ 000$	$C_2 = C_1 + \frac{10}{100}C_1 = 121\ 000$
Année 3	$C_3 = C_2 + \frac{10}{100}C_0 = 130\ 000$	$C_3 = C_2 + \frac{10}{100}C_2 = 133\ 100$
…	… … …	… … …
Année n+1	$C_{n+1} = C_n + \frac{10}{100}C_0 = C_n + 10\ 000$	$C_{n+1} = C_n + \frac{10}{100}C_n = \left(1 + \frac{10}{100}\right)C_n = 1{,}1C_n$

On voit, à partir de ces résultats, que :

- A intérêt simple, les capitaux constituent une suite arithmétique $C_{n+1} = C_n + 10\ 000$ de raison $r = 10\ 000$;
- A intérêt composé, les capitaux constituent une suite géométrique $C_{n+1} = 1{,}1C_n$ de raison $q = 1{,}1$.

Retour à notre problème :
Aïcha a déposé une somme $C_0 = 3\ 000\ 000$ à intérêts composés au taux de 9 % le 1er janvier 2020.

1. Calcul de C_1 :

$$C_1 = C_0 + \frac{9}{100}C_0 = 3\ 270\ 000$$

Relation entre C_{n+1} et C_n :

$$C_{n+1} = C_n + \frac{9}{100}C_n = \left(1+\frac{9}{100}\right)C_n = 1{,}09C_n$$

La suite (C_n) est géométrique de raison $q = 1{,}09$ et de 1$^{\text{er}}$ terme $C_0 = 3\ 000\ 000$.

D'où pour tout entier naturel n : $C_n = (1{,}09)^n C_0 = 3\ 000\ 000 \times (1{,}09)^n$

2. Le capital de Aïcha au 1$^{\text{er}}$ janvier 2031 $(2031 = 2020 + 11)$ sera :

$$C_{11} = 3\ 000\ 000 \times (1{,}09)^{11} \approx 7\ 741\ 279$$

Le capital dont disposera Aïcha au 1$^{\text{er}}$ janvier 2031 ne sera pas suffisant pour subvenir à cette dépense.

Elle devra donc emprunter une somme de : $9\ 000\ 000 - 7\ 741\ 279 = 1\ 258\ 721.$

3. Pour disposer d'une somme d'au moins $9\ 000\ 000$ ouguiyas au 1$^{\text{er}}$ janvier 2031, Aïcha doit déposer son argent à un taux t % de telle sorte que :

$$C_{11} = 3\ 000\ 000 \times \left(1+\frac{t}{100}\right)^{11} \geq 9\ 000\ 000$$

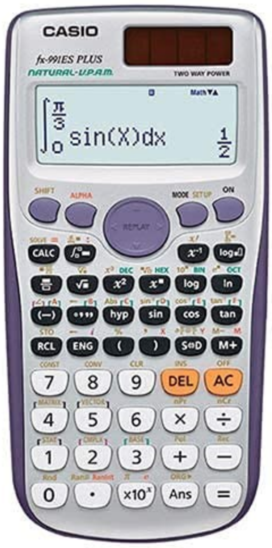
D'où :

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^{11} \geq \frac{9\ 000\ 000}{3\ 000\ 000} = 3.$$

Pour la détermination de t, on peut utiliser, entre autres, la fonction TABLE sur une calculatrice Casio fx-991ES(EX) :

Affichage	Saisie
f(X) =	Mode 7
$f(X) = \left(1+\frac{X}{100}\right)^{11}$	$\left(1+\frac{X}{100}\right)^{11}$ $=$
Start	$9\ =$
End	$11\ =$
Step	$0{,}1\ =$

Casio fx-991ES PLUS



TABLE

	X	f(X)
1	9	2,58042640531
2	9,1	2,60658718923
3	9,2	2,63298886253
4	9,3	2,65963341966
5	9,4	2,68652286976
6	9,5	2,71365923674
7	9,6	2,74104455933
8	9,7	2,76868089124
9	9,8	2,79657030121
10	9,9	2,82471487312
10	10	2,85311670611
11	10,1	2,88177791463
12	10,2	2,91070062858
13	10,3	2,93988699338
14	10,4	2,96933917009
15	10,5	2,9990593355
16	10,6	3,02904968224
17	10,7	3,05931241884
18	10,8	3,08984976991
19	10,9	3,12066397616
20	11	3,15175729454

Donc dès que le taux dépasse 10,6 %, le capital de Aïcha au 1$^{\text{er}}$ janvier 2031 sera suffisant pour acheter la maison sans emprunter de l'argent.