PROF. SIDI MAJOR

Cours à distance au profit des élèves de la 7ᵉ D

Exercice

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(3-i)z+4=0$.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On note z_1 et z_2 les solutions où $Im(z_1)>0$.

b. Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique .

2. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation(E') : $3z^3+(-9+i)z^2+(14+6i)z-8i=0$.

a. Vérifier que $z_0=\frac{2}{3}i$ est une solution de (E'). On pourra s'aider de l'égalité :

$$3z^3+(-9+i)z^2+(14+6i)z-8i=[(3z-9+i)z+14+6i]z-8i$$

b. Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que pour tout z de $\mathbb{C}$, on ait :

$$3z^3+(-9+i)z^2+(14+6i)z-8i=(z-z_0)(az^2+bz+c).$$

c. Résoudre alors l'équation(E').

3. Dans le plan complexe $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A(z_A=1+i)$, $B(z_B=2-2i)$ et $C(z_C=\frac{2}{3}i)$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle OAC, on note Ω, d'affixe ω, le centre de Γ et R son rayon.

a. Justifier les égalités suivantes :

$$\omega.\overline{\omega}=R^2\,; \qquad \left(\omega-\frac{2i}{3}\right)\left(\overline{\omega}+\frac{2i}{3}\right)=R^2\,; \qquad (\omega-1-i)(\overline{\omega}-1+i)=R^2\,.$$

b. Montrer que $\omega+\overline{\omega}=\frac{4}{3}$ et $\omega-\overline{\omega}=\frac{2i}{3}$. En déduire ω et la valeur du rayon R.

c. Les points $E\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i\right)$ et $F\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{5}i\right)$ appartiennent-ils à Γ ? Justifier votre réponse.

4. Soit D le point tel que le triangle OBD soit équilatéral direct, et soit z_D l'affixe de D.

a. En utilisant l'égalité $(\vec{u},\overrightarrow{OD})=(\vec{u},\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD})$, déterminer un argument du nombre z_D. En déduire une forme trigonométrique de z_D.

b. Justifier que $\frac{z_D}{z_B}=e^{i\frac{\pi}{3}}$. Déterminer z_D sous forme algébrique.

c. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Corrigé

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(3-i)z+4=0$.

1. a. Résolution de (E) :

On a $\Delta=b^2-4ac=(3-i)^2-16=9-1-6i-16=-8-6i=(3i)^2+1^2-2\times 3i\times 1=(3i-1)^2$

Donc $\delta=3i-1$, et les solutions de (E) sont (tenant compte de la condition $Im(z_1)>0.$) :

$$z_1=\frac{(3-i)+(3i-1)}{2}=1+i\,; \qquad z_2=\frac{(3-i)-(3i-1)}{2}=2-2i.$$

b. Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique :

On a de toute évidence :

$$\begin{cases}|z_1|=|1+i|=\sqrt{2}\\ \arg(z_1)=\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\end{cases}, \qquad \begin{cases}|z_2|=|2-2i|=2\sqrt{2}\\ \arg(z_2)=-\frac{\pi}{4}\ [2\pi]\end{cases}$$

D'où :

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\ ; \quad z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

2. On considère l'équation (E') : $3z^3 + (-9+i)z^2 + (14+6i)z - 8i = 0$:

a. On sait que :

$$3z^3 + (-9+i)z^2 + (14+6i)z - 8i = [(3z-9+i)z + 14 + 6i]z - 8i$$

D'où en remplaçant z par $z_0 = \frac{2}{3}i$:

$$3z_0 - 9 + i = 3\times\frac{2}{3}i - 9 + i = 3i - 9$$

$$(3z_0 - 9 + i)z_0 + 14 + 6i = (3i-9)\times\frac{2}{3}i + 14 + 6i = -2 - 6i + 14 + 6i = 12$$

$$[(3z_0 - 9 + i)z_0 + 14 + 6i]z_0 - 8i = 12\times\frac{2}{3}i - 8i = 8i - 8i = 0$$

Donc $z_0 = 2i/3$ est bien solution de l'équation (E').

Remarque : il s'agit ici du tableau d'Hörner disposé de manière linéaire.

b. Factorisation de $3z^3 + (-9+i)z^2 + (14+6i)z - 8i$:

D'après les calculs précédents, il ressort clairement que pour tout complexe z :

$$3z^3 + (-9+i)z^2 + (14+6i)z - 8i = \left(z - \frac{2}{3}i\right)(3z^2 + (3i-9)z + 12)$$
$$= 3\left(z - \frac{2}{3}i\right)(z^2 - (3-i)z + 4) = (3z-2i)(z^2 - (3-i)z + 4)$$

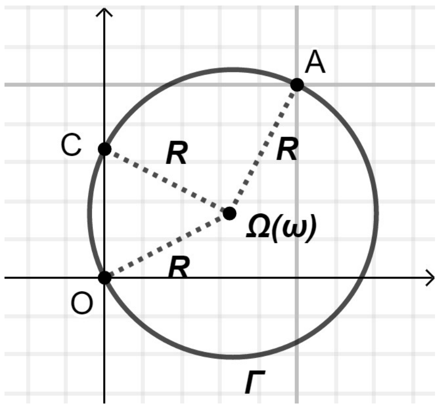
c. Résolution de l'équation (E') :

$$z \in S_{(E')} \iff (3z-2i)(z^2-(3-i)z+4) = 0 \iff 3z - 2i = 0 \text{ ou } z^2 - (3-i)z + 4 = 0.$$

Tenant compte des résultats de la question 1. a., on déduit les solutions de (E') :

$$\frac{2}{3}i\ ; \quad 1+i\ ; \quad 2-2i.$$

3. Dans le plan complexe $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère lespoints $A(z_A = 1+i)$, $B(z_B = 2-2i)$ et $C(z_C = 2i/3)$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle OAC, on note Ω, d'affixe ω, le centre de Γ et R son rayon.



a. Justifions les égalités proposées :

Les points O, A et C appartiennent à Γ. On traduit ces appartenances en termes de modules :

① $O \in \Gamma \iff \Omega O = R \iff \Omega O^2 = R^2$
$\iff \omega\overline{\omega} = R^2$

② $A \in \Gamma \iff \Omega A = R \iff \Omega A^2 = R^2$
$\iff (\omega - 1 - i)(\overline{\omega} - 1 + i) = R^2$

③ $C \in \Gamma \iff \Omega C = R \iff \Omega C^2 = R^2$
$\iff \left(\omega - \frac{2i}{3}\right)\left(\overline{\omega} + \frac{2i}{3}\right) = R^2$

b. Montrons que $\omega + \overline{\omega} = \frac{4}{3}$ et $\omega - \overline{\omega} = \frac{2i}{3}$:

Développons les relations ③ et ② en tenant compte de l'égalité $\omega\overline{\omega} = R^2$:

③ $\left(\omega - \frac{2i}{3}\right)\left(\overline{\omega} + \frac{2i}{3}\right) = R^2 \iff \omega\overline{\omega} + \frac{2i}{3}(\omega - \overline{\omega}) + \frac{4}{9} = R^2 = \omega\overline{\omega} \iff \omega - \overline{\omega} = \frac{2i}{3},$

② $(\omega - 1 - i)(\overline{\omega} - 1 + i) = R^2 \iff \omega\overline{\omega} - (\omega + \overline{\omega}) + i(\omega - \overline{\omega}) + 2 = R^2 = \omega\overline{\omega} \iff \omega + \overline{\omega} = \frac{4}{3}.$

Déduction de ω et de la valeur de R :

On sait que :

$$\omega + \overline{\omega} = \frac{4}{3} = 2\mathcal{Re}(\omega), \quad \text{donc } \mathcal{Re}(\omega) = \frac{2}{3}$$
$$\omega - \overline{\omega} = \frac{2i}{3} = 2i\mathcal{Im}(\omega), \quad \text{donc } \mathcal{Im}(\omega) = \frac{1}{3}$$

D'où finalement :

$$\omega = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i\,; \qquad R = |\omega| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

c. Les points $E\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right)$ et $F\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{5}i\right)$ appartiennent-ils à Γ ?

On sait que : $M \in \Gamma \iff \Omega M^2 = R^2$.

$$\Omega E^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = R^2; \quad \Omega F^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{36} + \frac{49}{225} \neq R^2.$$

Donc $E \in \Gamma$ et $F \notin \Gamma$.

4. Soit D le point tel que le triangle OBD est équilatéral direct.

Par définition du point D, on a :

$$\arg(z_D) = (\vec{u}, \overrightarrow{OD})\,; \qquad |z_D| = OD = OB$$

a. $(\vec{u}, \overrightarrow{OD}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = \arg(z_B) + \frac{\pi}{3} = \arg(2 - 2i) + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

D'où :

$$\arg(z_D) = \frac{\pi}{12}\ [2\pi]\,; \qquad |z_D| = OD = OB = 2\sqrt{2}.$$

Donc :

$$z_D = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

b. Puisque le triangle OBD est équilatéral direct alors :

$$\frac{z_D - z_O}{z_B - z_O} = \frac{z_D}{z_B} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

D'où une forme algébrique de z_D :

$$z_D = z_B \times e^{i\frac{\pi}{3}} = (2 - 2i) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = (1 - i)(1 + i\sqrt{3}) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i.$$

c. Valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$:

On a trouvé que :

$$z_D = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i$$

D'où par identification des parties réelles et imaginaires :

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} + 1\,; \quad 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - 1.$$

Et enfin :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\,; \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Or on sait que :

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$$

et que :

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \end{cases}$$

d'où :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\,; \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$