Prof. Sidi MAJOR

بسم الله الرحمن الرحيم

TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN

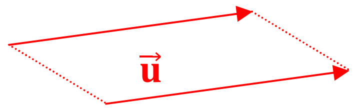
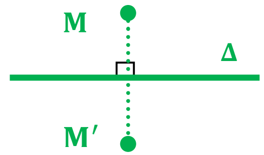
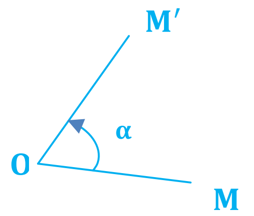
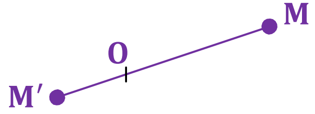
Préliminaires

- **Transformation du plan :**
  Toute application bijective du plan dans lui-même.

Exemple et contre-exemples

- **Les translations, rotations, homothéties, symétries (centrales et axiales) sont des transformations du plan.**
- **La projection orthogonale sur une droite (D) n'est pas une transformation du plan.**

- **Des cas à connaître « par cœur »**

	L'image M' d'un point M	Illustration	Réciproque
Translation $t_{\vec{u}}$	$t_{\vec{u}}(M) = M' \iff \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$		$(t_{\vec{u}})^{-1} = t_{-\vec{u}}$
Réflexion S_Δ	• **Si** $M \in \Delta$ **alors** $S_\Delta(M) = M$ • **Sinon,** $S_\Delta(M) = M' \iff \Delta = \text{méd}[MM']$		$(S_\Delta)^{-1} = S_\Delta$
Rotation $R_{(O,\ \alpha)}$	• **Si** $M = O$ **alors** $R(M) = M$ • **Sinon,** $R(M) = M' \iff \begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha\ [2\pi] \end{cases}$		$(R_{(O,\ \alpha)})^{-1} = R_{(O,\ -\alpha)}$
Homothétie $H_{(O,\ k)}$	$H(M) = M' \iff \overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$		$(H_{(O,\ k)})^{-1} = H_{(O,\ \frac{1}{k})}$

Remarques

$S_O = R_{(O,\pi)} = H_{(O,-1)}$ **où** S_O **désigne la symétrie centrale de centre** O.

$Id_P = R_{(O,\ \text{zéro})} = H_{(O,\ 1)} = t_{\vec{0}}$ **où** Id_P **désigne l'application identique du plan.**

Des composées à connaître « par cœur »

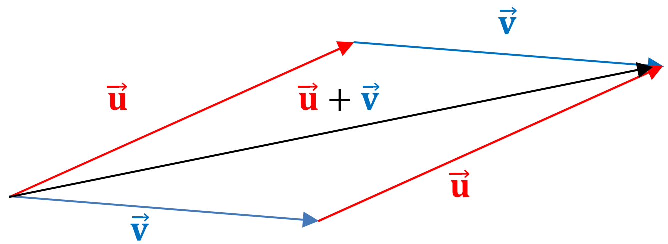
➢ **La composée de deux translations est une translation.**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **:**

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$

et

$$t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$$



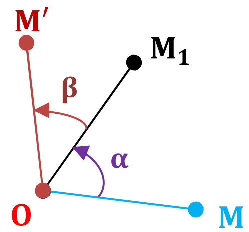
➢ **La composée de deux rotations de même centre O est une rotation de centre O.**

Pour tous réels α **et** β **:**

$$R_{(O,\beta)} \circ R_{(O,\alpha)} = R_{(O,\alpha+\beta)}$$

et

$$R_{(O,\beta)} \circ R_{(O,\alpha)} = R_{(O,\alpha)} \circ R_{(O,\beta)}$$



➢ **La composée de deux réflexions d'axes parallèles est une translation.**

Soit S_Δ **et** $S_{\Delta'}$ **les réflexions d'axes respectifs** Δ **et** Δ'**. On suppose que** $\Delta \parallel \Delta'$**.**

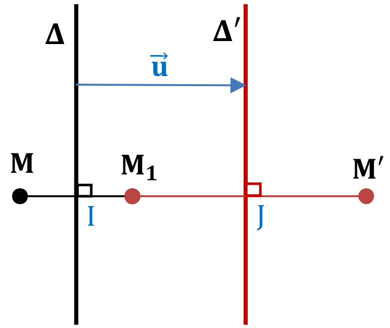
On pose : $S_\Delta(M) = M_1$ **et** $S_{\Delta'}(M_1) = M'$ **et notons** $I = M * M_1$, $J = M_1 * M'$.

On a : $S_\Delta(M) = M_1 \iff \Delta = \text{med}[MM_1]$ **et** $S_{\Delta'}(M_1) = M' \iff \Delta' = \text{med}[M_1M']$

On a : $S_{\Delta'} \circ S_\Delta(M) = M'$**. Donc :** $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{IM_1}$ **et** $\overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{M_1J}$**, d'où :**

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{IM_1} + 2\overrightarrow{M_1J}$$

Soit : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IJ} = 2\vec{u}$ **et donc :** $M' = t_{2\vec{u}}(M)$ **et enfin** $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = t_{2\vec{u}}$**.**



➢ **La composée de deux réflexions d'axes sécants en O est une rotation de centre O.**

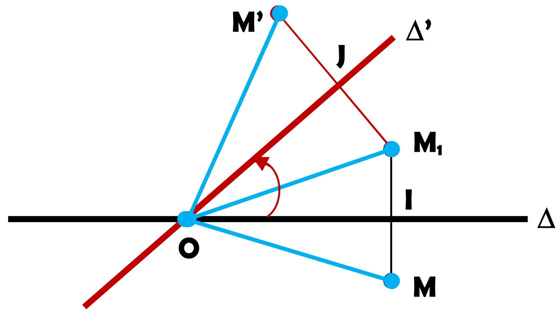
Soit S_Δ **et** $S_{\Delta'}$ **les réflexions d'axes respectifs** Δ **et** Δ'**. On suppose que** $\Delta \cap \Delta' = \{O\}$**.**

On pose : $S_\Delta(M) = M_1$ **et** $S_{\Delta'}(M_1) = M'$ **et notons** $I = M * M_1$, $J = M_1 * M'$.

On sait que (OI) **est bissectrice de** $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1})$ **et** (OJ) **est bissectrice de** $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'})$**. On a :** $OM' = OM$ **et :** $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'})$

$= 2(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_1}) + 2(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OJ}) = 2(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) = 2\alpha$ **où** $\alpha = (\Delta, \Delta')[\pi]$**.**

Donc $M' = Rot_{(O,2\alpha)}(M)$ **et enfin :** $S_{\Delta'} \circ S_\Delta = Rot_{(O,2\alpha)}$**.**



1) Organigramme de la classification des transformations

- Une **ISOMETRIE** du plan est une **transformation du planqui conserve la distance**.
- k étant un réel > 0, une **SIMILITUDEde rapport k**est une **transformation du plan qui multiplie la distance par le réel k**.

Transformation du plan qui multiplie la distance par un réel $k > 0$ i.e :Si $\begin{cases} M \longrightarrow M' \\ N \longrightarrow N' \end{cases}$ alors $M'N' = k.MN$

Similitude de rapport k

$k = 1$ — Isométrie

Déplacement

f conserve les angles orientés i.e :

Si $\begin{cases} A \longrightarrow A' \\ B \longrightarrow B' \\ C \longrightarrow C' \end{cases}$ alors

$$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$$

f = translation

ou

f = rotation

C1

Antidéplacement

f change un angle orienté en son opposé i.e :

Si $\begin{cases} A \longrightarrow A' \\ B \longrightarrow B' \\ C \longrightarrow C' \end{cases}$ alors

$$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$$

f = réflexion

ou

f=$t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$

$\vec{u}$ directeur de Δ

« **Symétrie glissée** »

C2

$k \neq 1$

Similitude directe « propre »

f conserve les angles orientés i.e :

Si $\begin{cases} A \longrightarrow A' \\ B \longrightarrow B' \\ C \longrightarrow C' \end{cases}$ alors

$$\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$$

f = homothétie

ou

f = homothétie $\circ$ Rotation

C3

Similitude indirecte « H.P »

f ne conserve pas les angles orientés.

HORS-PROGAMME

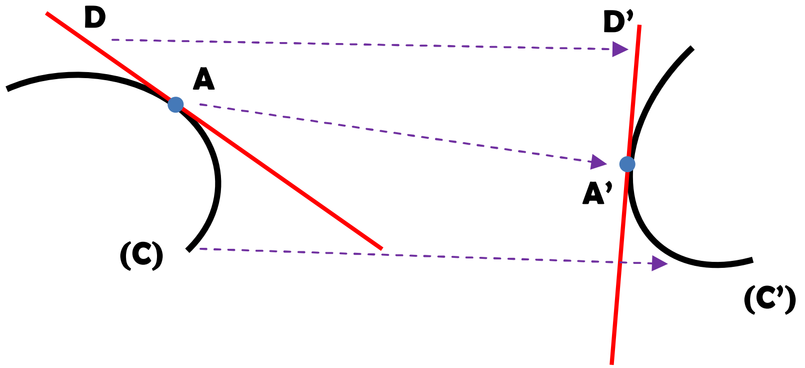
C4

Remarques

- La composée de 2 déplacements est un déplacement ;
- La composée de 2 antidéplacement est un déplacement ;
- La composée d'1 déplacement et d'1 antidéplacement est un antidéplacement.

2) Propriétés communes

Toute similitude du plan conserve :

Le barycentre	$f(\mathrm{bar}(A_i, \alpha_i)) = \mathrm{bar}((f(A_i), \alpha_i))$ **En particulier : Si** $I = A * B$ **alors** $f(I) = f(A) * f(B)$
L'alignement	**Si les points A, B, C sont alignés alors f(A), f(B), f(C) sont alignés**
La forme	**Si $\mathcal{F}$ est une figure géométrique, son image f($\mathcal{F}$) est une figure de même nature** **En particulier :** • **L'image d'un triangle est un triangle de même nature ;** • **L'image d'un carré est un carré ;** • **L'image d'un cercle est un cercle.**
Le parallélisme	**Si** $D_1 \mathbin{//} D_2$ **alors** $f(D_1) \mathbin{//} f(D_2)$
L'orthogonalité	**Si** $D_1 \perp D_2$ **alors** $f(D_1) \perp f(D_2)$
Le contact	**Si la droite D est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en A alors la droite f(D) l'est à la courbe f($\mathcal{C}$) en f(A)** 

3) Commentaires sur les conclusions de l'organigramme

• A propos de C1

On sait que la translation et la rotation sont des déplacements ainsi que la composée d'une translation et d'une rotation dans n'importe quel ordre. Mais plus précisément, si $t_{\vec{u}}$ est une translation et $R_{(O,\alpha)}$ est une rotation, alors que peut-on dire de la transformation $R_{(O,\alpha)} \circ t_{\vec{u}}$?

Soit Δ la droite passant par O et admettant le vecteur $\vec{u}$ comme vecteur normal. On définit les deux droites Δ' et Δ'' par :

$\Delta' = R_{\left(O,-\frac{1}{2}\alpha\right)}(\Delta)$ et $\Delta'' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$.

On sait que : $t_{\vec{u}} = S_{\Delta''} \circ S_{\Delta}$ et $R_{(O,\alpha)} = S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$. D'où :

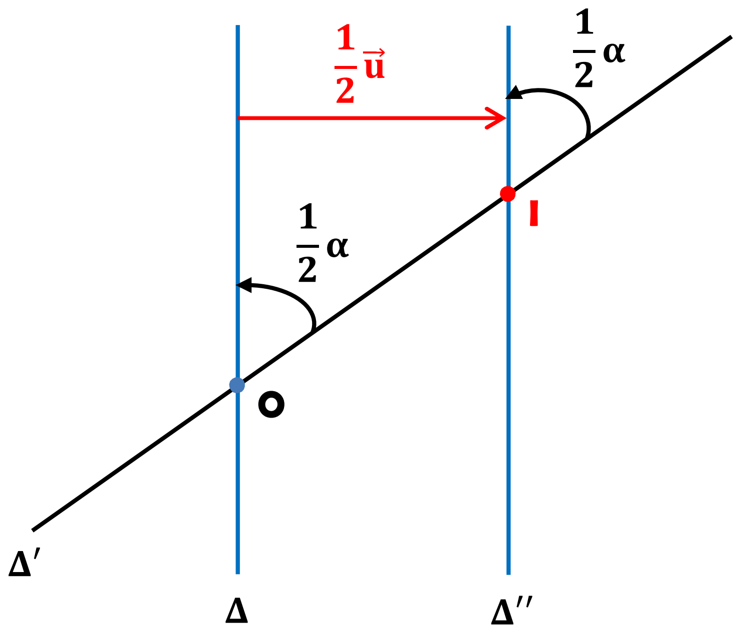
$$R_{(O,\alpha)} \circ t_{\vec{u}} = (S_{\Delta''} \circ S_{\Delta}) \circ (S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}) = S_{\Delta''} \circ (S_{\Delta} \circ S_{\Delta}) \circ S_{\Delta'}$$

Et comme $S_{\Delta} \circ S_{\Delta} = Id_P$ alors :

$$R_{(O,\alpha)} \circ t_{\vec{u}} = S_{\Delta''} \circ S_{\Delta'}$$

Les droites Δ' et Δ'' étant sécantes (car Δ et Δ'' sont parallèles et coupées par la droite Δ' suivant le même angle $\frac{1}{2}\alpha$) alors :

$R_{(O,\alpha)} \circ t_{\vec{u}}$ est la rotation de centre I et d'angle $2 \times \frac{1}{2}\alpha = \alpha$.



Remarques :

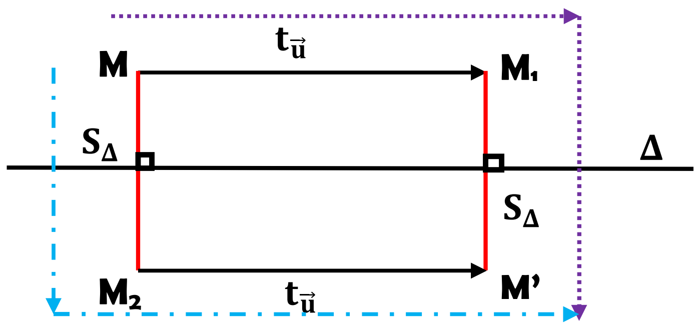
- **$R_{(O,\alpha)} \circ t_{\vec{u}}$ est toujours une rotation de même angle que $R_{(O,\alpha)}$.**
- **En général : $R_{(O,\alpha)} \circ t_{\vec{u}} \neq t_{\vec{u}} \circ R_{(O,\alpha)}$ car elles diffèrent par leurs centres.**

• A propos de C2

On sait que la réflexion est un antidéplacement ainsi que la composée d'une translation et d'une réflexion dans n'importe quel ordre. Mais plus précisément, si $t_{\vec{u}}$ est une translation et S_Δ est une réflexion, alors que peut-on dire de la transformation $S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$?On distingue trois cas selon la position du vecteur $\vec{u}$ par rapport à l'axe Δ.

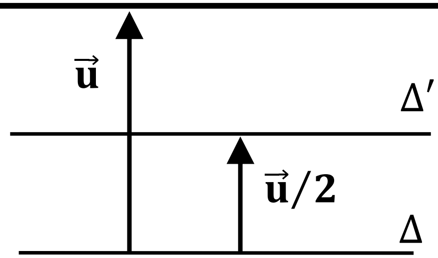
- **1[er] cas : $\vec{u}$vecteur directeur de Δ**

Dans ce cas : $S_\Delta \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$. On dit que S_Δ et $t_{\vec{u}}$ permutent.
Cet antidéplacement est appelée symétrie glissée (ou glissante) de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ.
N.B : On dit plus correctement symétrie glissée au lieu de symétrie glissante qui est une fausse traduction. En effet, dans le mot « glissé » (le passif = مبنـي للمجهول), on comprend que la symétrie a été glissée de manière déterminée. Ce qui n'est pas le cas de « glissante » (adjectif qualificatif = نعـت نـوعي).



- **2[e] cas : $\vec{u}$ vecteur normal à Δ**

On a : $t_{\vec{u}} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$. D'où : $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = (S_{\Delta'} \circ S_\Delta) \circ S_\Delta = S_{\Delta'} \circ (S_\Delta \circ S_\Delta)$
Donc : $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_{\Delta'}$ car $S_\Delta \circ S_\Delta = Id_P$.
Dans ce cas la composée $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ est une réflexion d'axe Δ' telle que : $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$.
Remarque : $t_{\vec{u}}$ et S_Δ ne sont pas permutables.

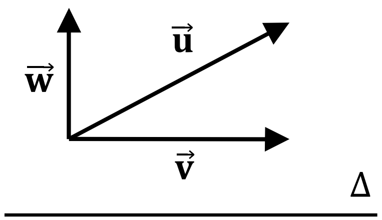


- **3[e] cas : $\vec{u}$ vecteur oblique par rapport à Δ**

On a : $t_{\vec{u}} = t_{\vec{v}+\vec{w}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}}$. D'où :

$$t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = (t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}}) \circ S_\Delta = t_{\vec{v}} \circ (t_{\vec{w}} \circ S_\Delta).$$

Or d'après le cas précédent : $t_{\vec{w}} \circ S_\Delta = S_{\Delta'}$ avec $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{w}}(\Delta)$.
Donc : $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = t_{\vec{v}} \circ S_{\Delta'}$ avec $\vec{v}$ directeur de Δ'.
Enfin $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ est une symétrie glissée (de vecteur $\vec{v}$ et d'axe Δ').
Remarque : $t_{\vec{u}}$ et S_Δ ne sont pas permutables.



On décompose le vecteur $\vec{u}$ selon deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

$$\begin{cases} \vec{v} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta \\ \vec{w} \text{ est un vecteur normal à } \Delta \\ \vec{u} = \vec{v} + \vec{w} \end{cases}$$

<u>On retient :</u> Toute isométrie du plan est soit une réflexion ou la composée de deux réflexions ou la composée de trois réflexions.
La composée de trois réflexions d'axes sécants deux à deux est une symétrie glissée (abusivement symétrie glissante).

EN RESUME

$\vec{u}$ est – il normal à Δ?

OUI

$t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est une réflexion.
Dans ce cas : $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} \neq S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$

NON

$\vec{u}$ est – il directeur de Δ?

OUI

$t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est une symétrie glissée de vecteur $\vec{u}$ et d'axe Δ.
Dans ce seul cas : $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$

NON

$t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est une symétrie glissée de vecteur $\neq \vec{u}$ et d'axe $\neq \Delta$.
Dans ce cas : $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} \neq S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$

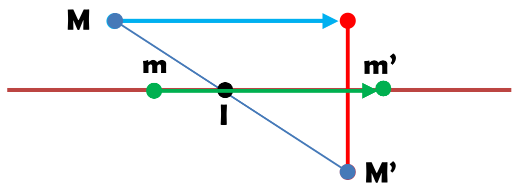
Propriétés de la symétrie glissée

Soit $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ une symétrie glissée ($\vec{u}$ directeur de Δ)

- **$\vec{u}$ et Δ sont les éléments caractéristiques de f et l'écriture $f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ est appelée la forme réduite de f.**

On démontre aisément que :

- **f n'admet pas de points invariants. La symétrie glissée est parfois appelée antidéplacement sans point invariant.**
- **Pour tout point M d'image M' par f, on a : $I = M * M' \in \Delta$.**
  On utilise parfois cette propriété pour déterminer l'axe de f.
- **Pour tout point m de Δ d'image m' par f, on a : $\overrightarrow{mm'} = \vec{u}$.**
  On utilise parfois cette propriété pour déterminer le vecteur de f.
- $f \circ f = (t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}) \circ (S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}) = t_{\vec{u}} \circ (S_{\Delta} \circ S_{\Delta}) \circ t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$ **car :** $S_{\Delta} \circ S_{\Delta} = Id_P$.



Remarque : Soit f un antidéplacement du plan. S'il existe un point A du plan tel que l'on ait $f \circ f(A) \neq A$ alors f est une symétrie glissée de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$, sinon f est une réflexion.

• A propos de C3

Les similitudes directes sont : les translations, les rotations, les homothéties, les composées d'homothéties et de rotations.

Théorème 1

Soit f une similitude directe de rapport $k > 0$, autre qu'une translation. Il existe un unique point Ω et un réel α tels que :

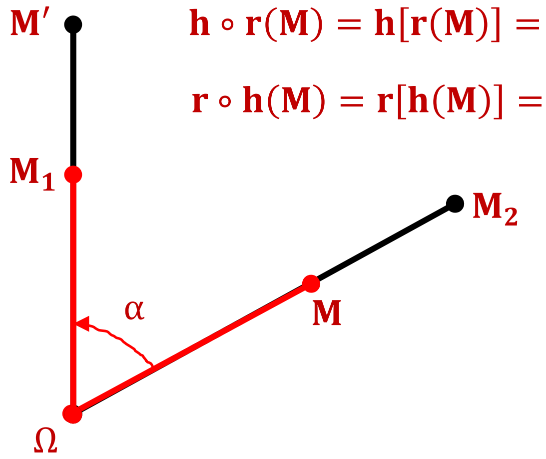
- $f(\Omega) = \Omega$ **(Ω est un point invariant par f)**
- **Pour tout point $M \neq \Omega$, d'image M', on a :** $\left(\overrightarrow{\Omega M},\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \alpha\ [2\pi]$

k, Ω et α sont les éléments caractéristiques de f. Ω est son centre, k son rapport et α son angle.

Dans ce cas, on a la décomposition canonique (forme réduite) de f :
$f = h \circ r = r \circ h$ **où h et r sont respectivement l'homothétie de centre Ω et de rapport k et la rotation de centre Ω et d'angle α.**

$$h \circ r(M) = h[r(M)] = h(M_1) = M'$$

$$r \circ h(M) = r[h(M)] = r(M_2) = M'$$



Théorème 2

Soit $h = Hom(\Omega_1, k)$ et $r = Rot(\Omega_2, \alpha)$ avec $\Omega_1 \neq \Omega_2$.

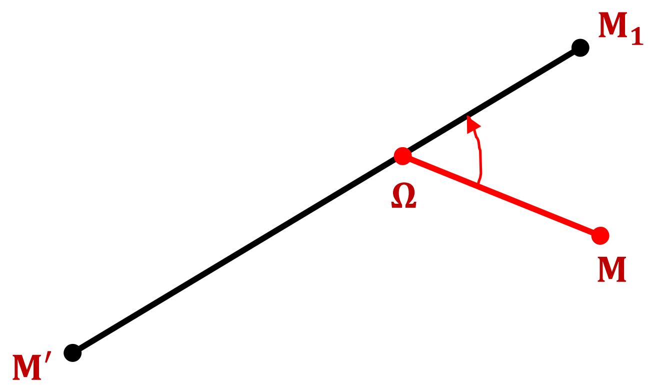
L'application $f = r \circ h$ est une similitude directe.

$$\textbf{f a pour} \begin{cases} \blacksquare \text{centre un point } \Omega\ (\neq \Omega_1 \text{ et } \neq \Omega_2) \\ \blacksquare \text{rapport } k \text{ si } k > 0 \textit{ et pour angle } \alpha \\ \blacksquare \text{sinon, son rapport est} (-k) \text{et son angle est } \alpha + \pi \end{cases}$$

En général : $h \circ r \neq r \circ h$ **(elles diffèrent par leurs centres).**

Remarque : $S_d(\Omega, k, \pi) = hom(\Omega, -k)$.

La composée $h \circ r$ dans le cas où r et h ont le même centre et où le rapport de h est négatif.



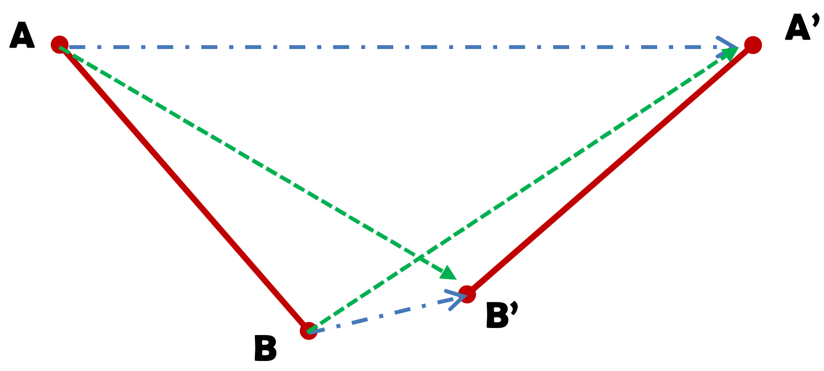
4) Détermination de transformations

Soit A, B, A' et B' quatre points du plan.

- **Si $A \neq B$ et $A'B' = AB$ alors :**
  - **Il existe un unique déplacement d tel que $d(A) = A'$ et $d(B) = B'$.**
    En outre, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ alors d est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ sinon d est une rotation d'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$.
  - **Il existe un unique antidéplacement g tel que $g(A) = A'$ et $g(B) = B'$.**
- **Si $A \neq B$ et $A' \neq B'$ alors Il existe une unique similitude directe propre f telle que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$. Son rapport est $k = \frac{A'B'}{AB}$ et son angle est $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)[2\pi]$.**

Remarque

Pour deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ de même longueur (non nulle), il existe deux déplacements et deux antidéplacements transformant $[AB]$ en $[A'B']$. En effet, il suffit de voir que les extrémités des segments peuvent être associées différemment.



Par exemple, il existe deux déplacements f et g tels que :

$$\begin{cases} f(A) = A' \\ f(B) = B' \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} g(A) = B' \\ g(B) = A' \end{cases}$$

- **Soit $R_{1(O_1,\alpha_1)}$ et $R_{2(O_2,\alpha_2)}$ deux rotations, et A un point donné du plan.**
  - **Si $O_1 = O_2$ et $R_1(A) = R_2(A)$ alors $R_{1(O_1,\alpha_1)} = R_{2(O_2,\alpha_2)}$**
  - **Si $\alpha_1 = \alpha_2$ et $R_1(A) = R_2(A)$ alors $R_{1(O_1,\alpha_1)} = R_{2(O_2,\alpha_2)}$**
- **Soit S_1 et S_2 deux similitudes directes et A un point donné du plan.**
  Si S_1 et S_2 ont en commun deux caractéristiques avec $S_1(A) = S_2(A)$ alors $S_1 = S_2$.

5) Composée des transformations

a. Composée de deux réflexions

Soit S_Δ et $S_{\Delta'}$ deux réflexions. Quelle est la nature de $S_{\Delta'} \circ S_\Delta$?

$$\xrightarrow{\Delta = \Delta'} \quad \mathbf{S_{\Delta'} \circ S_\Delta = Id_P}$$

$$\xrightarrow{\Delta \parallel \Delta'} \quad \mathbf{S_{\Delta'} \circ S_\Delta = translation}$$

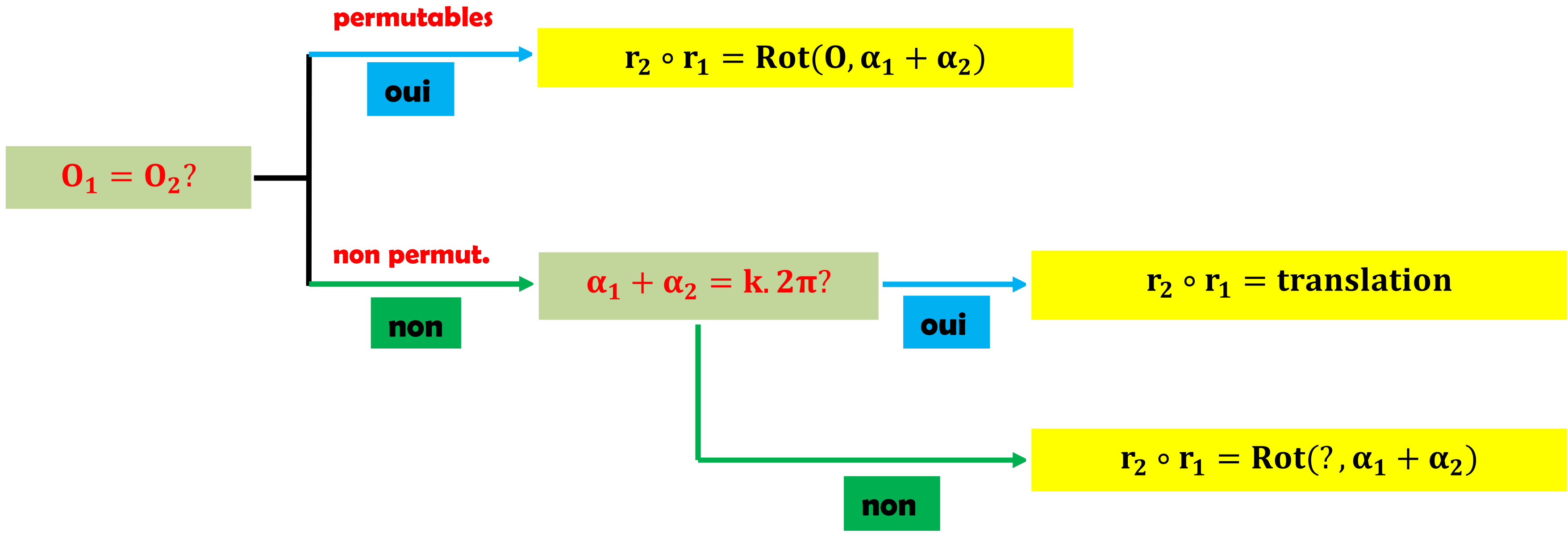
$$\xrightarrow{\Delta \cap \Delta' = \{O\}} \quad \mathbf{S_{\Delta'} \circ S_\Delta = rotaion\ de\ centre\ O}$$

Remarque

$\mathbf{S_{\Delta'} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ S_{\Delta'}}$ **dans les seuls cas où :** $\Delta = \Delta'$ **ou** $\Delta \perp \Delta'$

b. Composée de deux rotations

Soit les deux rotations $r_1 = Rot(O_1, \alpha_1)$ **et** $r_2 = Rot(O_2, \alpha_2)$**. Quelle est la nature de** $r_2 \circ r_1$ **?**

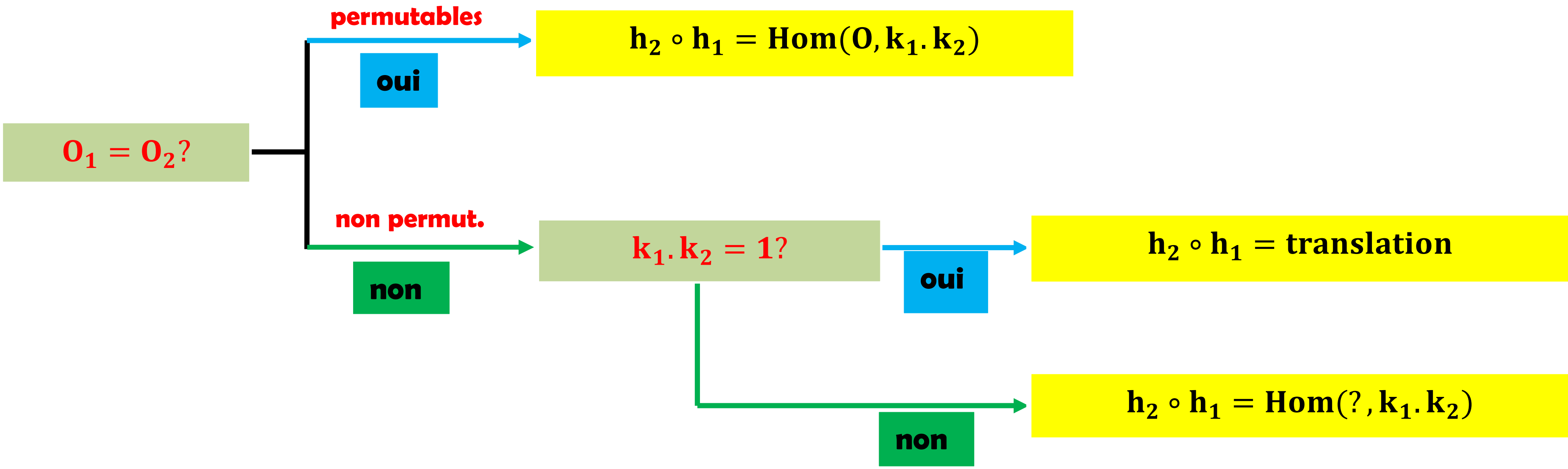


Remarque

Dans le cas où les rotations sont de centres distincts et où les conclusions débouchent sur une translation ou une rotation, le vecteur et le centre sont à déterminer dans l'exercice. Par exemple, dans le cas d'une translation, si A **et** B **sont deux points tels** $r_2 \circ r_1(A) = B$ **alors le vecteur de cette translation est** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$**.**

c. Composée de deux homothéties

Soit les deux homothéties $h_1 = Hom(O_1, k_1)$ et $h_2 = Hom(O_2, k_2)$. Quelle est la nature de $h_2 \circ h_1$?



Remarque : Dans le cas où les homothéties sont de centres distincts et où les conclusions débouchent sur une translation ou une homothétie, le vecteur et le centre sont à déterminer dans l'exercice. Par exemple, dans le cas d'une translation, si A et B sont deux points tels $h_2 \circ h_1(A) = B$ alors le vecteur de cette translation est $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

d. Composée d'une homothétie et d'une translation

Soit h une homothétie de centre I et de rapport $k \neq 1$ et t une translation de vecteur non nul $\vec{u}$. Les transformations $h \circ t$ et $t \circ h$ sont des homothéties de même rapport k dont les centres respectifs Ω_1 et Ω_2 sont définis par les relations vectorielles : $\overrightarrow{I\Omega_1} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$ et $\overrightarrow{I\Omega_2} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$. Ainsi, on a :

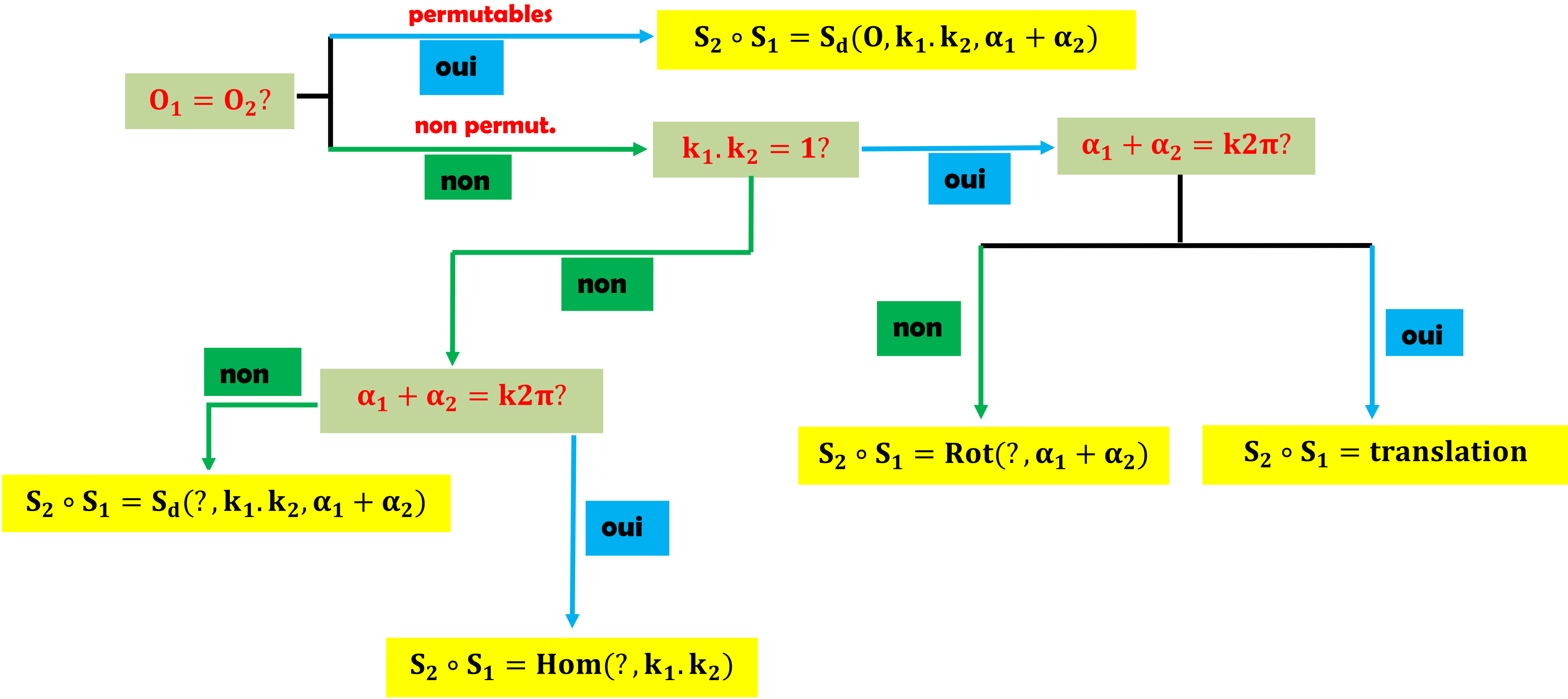
$$h \circ t = Hom(\Omega_1, k) \text{ tel que } \overrightarrow{I\Omega_1} = \frac{k}{1-k}\vec{u}$$

$$t \circ h = Hom(\Omega_2, k) \text{ tel que } \overrightarrow{I\Omega_2} = \frac{1}{1-k}\vec{u}$$

On remarque que les centres Ω_1 et Ω_2 sont situés sur la droite $D(I, \vec{u})$ et, qu'en pratique, ils sont déterminés à partir des indications de l'exercice et non par les relations précédentes.

e. Composée de deux similitudes directes

Soit les deux similitudes directes propres $S_1 = S_d(O_1, k_1, \alpha_1)$ et $S_2 = S_d(O_2, k_2, \alpha_2)$. Quelle est la nature de $S_2 \circ S_1$?



Remarques relatives à la composition des transformations

Dans la composition des transformations « à centre », on ne peut que remarquer l'ordre de pertinence des éléments caractéristiques dans la détermination de la nature de la composée:

- **Pour les rotations, le centre est plus pertinent que l'angle ;**
- **Pour les homothéties, le centre est plus pertinent que le rapport ;**
- **L'ordre de pertinence pour les similitudes directes est le centre puis le rapport et enfin l'angle.**

On peut remarquer également que deux transformations « à centre » ne permutent que si elles ont le même centre.

En général, on détermine la nature d'une composée par son effet sur la distance, la direction et l'orientation des angles.

6) Écriture complexe d'une transformation

Soit a et b deux nombres complexes donnés et f l'application du plan dont l'écriture complexe est $z' = az + b$ i.e $M(z) \xrightarrow{f} M'(z' = az + b)$.

$z' = az + b$

- $a = 0$ → $f =$ application constante
  f nest pas une transformation
- $a = 1$ → $M(z) \xrightarrow{f} M'(z' = z + b)$
  f est la translation de vecteur $\vec{u}(b)$
- $|a| = 1$ et $a \neq 1$ → $f = Rot(A, \alpha)$
  avec $A\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$
  et $\alpha = \arg(a)\ [2\pi]$
- a réel $\neq 0$ et 1 → $f = Hom(A, k)$
  avec $A\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$
  et $k = a$
- $a \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$ → $f = S(A, k, \alpha)$
  avec $A\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$
  et $k = |a|$ et $\alpha = \arg(a)\ [2\pi]$

Remarque (cas des antidéplacements)

Si bien que la forme complexe d'un antidéplacement est hors programme, on ne peut qu'en parler ici car bon nombre d'exercices, surtout dans les livres tunisiens, comportent des questions sur ce sujet.

La forme complexe d'un antidéplacement est $z' = a\bar{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $|a| = 1$ et $\bar{z}$ le conjugué de z.

Soit f un antidéplacement de forme complexe $z' = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$.

Si $a\bar{b} + b = 0$ (ce qui correspond à $f \circ f = Id_P$) alors f est une réflexion sinon f est une symétrie glissée.

$$\begin{tikzcd}
M(z) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f \circ f"'] & M_1(z_1 = a\bar{z} + b) \arrow[d, "f"] \\
 & M'(z' = a\overline{z_1} + b)
\end{tikzcd}$$

Soit : $z' = a\overline{z_1} + b = a\overline{(a\bar{z} + b)} + b = a\bar{a}z + a\bar{b} + b = z + a\bar{b} + b$ **car** $a\bar{a} = |a|^2 = 1$.

Donc si $a\bar{b} + b = 0$ **alors** $z' = z$ **et par suite** $f \circ f = Id_P$ **c'est-à-dire que** f **est une réflexion.**