Problèmes de révision en terminale C

Problème 1

On considère les fonctions f et F définies $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 1$$
$$F(x) = (e-1)e^x - x - \frac{3}{2}.$$

1. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

2. Étudier les fonctions f et F, tracer leurs courbes respectives $\mathcal{C}$ et Γ (On précisera leur position relative).

3. Soit $x > 0$, justifier l'existence d'un réel c de $[x, x+1]$ tel que l'on ait :

$$f(c) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$

en déduire que : $F(\mathbb{R}_+) \subset f(\mathbb{R}_+)$.

4. On considère la suite (c_n) définie par $f(c_n) = \int_n^{n+1} f(t)dt$ et la suite (δ_n) :

$$\delta_n = c_n - n.$$

a. Montrer que la suite (δ_n) est bornée.

b. En utilisant les courbes $\mathcal{C}$ et Γ, représenter les points M_0, M_1, M_2 d'abscisses c_0, c_1 et c_2.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$e - 1 - \frac{1}{2e^n} = e^{\delta_n} - \frac{\delta_n}{e^n}.$$

d. Montrer que (δ_n) admet une limite finie ℓ à déterminer.

e. Pour tout x de $\mathbb{R}$, calculer :

$$F(x) - f(x+1).$$

En déduire que Γ est l'image de $\mathcal{C}$ par une transformation simple à déterminer.

Problème 2

A tout nombre réel strictement positif x, on associe les deux suites (w_n) et (t_n) définies par :

$$\begin{cases} w_0 = x \ \ et \ \ w_{n+1} = \sqrt{w_n} \\ \quad t_n = 2^n(w_n - 1) \end{cases}$$

1. Pour $x \geq 1$,

a. Montrer que la suite (w_n) est minorée par 1 et décroissante.

b. Établir que :

$$\forall n \geq 1, \qquad |w_n - 1| \leq \frac{1}{2}|w_{n-1} - 1|.$$

(On utilisera l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $k : \ t \longmapsto \sqrt{t}$ sur l'intervalle $[1, x]$).

En déduire la limite de la suite (w_n).

2. Pour $0 < x \leq 1$, montrer que la suite (w_n) est croissante et convergente vers 1.

3. a. Exprimer (w_n) et (t_n) en fonction de (w_{n+1}) puis établir :

$$\forall n \geq 0, \qquad t_n - t_{n+1} = 2^n (w_n - 1)^2.$$

En déduire que la suite (t_n) est décroissante.

b. Pour $x \geq 1$, établir que (t_n) est convergente.

c. Soient (w_n) et (t_n) les deux suites associées à x et (w'_n) et (t'_n) les deux suites associées au réel $1/x$.

Montrer que :

$$① \quad \forall n \geq 0, \qquad t'_n = \frac{-t_n}{w_n}$$

En déduire que, dans le cas où $0 < x \leq 1$, la suite (t_n) est également convergente.

4. Pour tout réel strictement positif x, on note $f(x)$ la limite de la suite (t_n).

a. Établir que :

$$f(1) = 0\,; \ \ \forall x > 0, f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

(On pourra utiliser ①)

b. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \qquad \frac{t_n}{w_n} \leq f(x) \leq 0 \quad ②$$

(On pourra utiliser la monotonie de la suite (t_n))

En déduire que :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq x - 1 \quad ③$$

c. Si les suites associées à x sont (w_n) et (t_n) et à y, (w'_n) et (t'_n) et à xy, (W_n) et (T_n), établir que :

$$W_n = w_n \times w'_n \quad \text{et} \quad T_n = w'_n \times t_n + t'_n.$$

En déduire que :

$$\forall x > 0, \ \forall y > 0, \ \ f(xy) = f(x) + f(y).$$

5. a. Soit x un réel tel que $x > 0$ et h un réel tel que $x + h > 0$.

Établir que :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

c. En utilisant ③, déterminer la limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ lorsque h tend vers 0. Reconnaître alors la fonction f.

Problème 3

Partie A : Soit f la fonction de variable réelle x définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^{2x} + 1} & \text{si } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{-\ln(1-x)}{2x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

1. Étudier la continuité de f en 0.

2. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty,0[$ et sur $[0,+\infty[$. Donner la valeur de $f_d'(0)$.

3. Soit h un réel strictement négatif. On définit sur $]-\infty,0[$ la fonction u par :

$$u(x)=\left(\frac{ln(1-h)+h}{h^2}\right)x^2-ln(1-x)-x.$$

a. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un réel c appartenant à $]h,0[$ tel que :

$$\frac{ln(1-h)+h}{h^2}=\frac{1}{2(c-1)}.$$

b. Prouver que :

$$\lim_{h\to0^-}\frac{ln(1-h)+h}{h^2}=\frac{-1}{2}.$$

c. Prouver que f est dérivable à gauche en 0 et donner $f_g'(0)$.

d. En déduire que f est dérivable en 0.

4. **a.** Calculer $f'(x)$ pour $x>0$. En déduire le sens de variation de f sur $[0,+\infty[$.

b. Pour $x\leq0$, on pose $v(x)=x+(1-x)\,ln(1-x)$.
Établir le tableau de variation de f en y précisant les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Tracer la courbe C_f dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie B

1. Justifier que f possède des primitives sur $[0,+\infty[$.

2. Soit la fonction G définie sur $I=[\pi/4,\pi/2[$ par :

$$G(x)=\int_0^{ln(\tan x)}f(t)dt.$$

a. Calculer $G(\pi/4)$ et $G'(x)$ pour x de I.

b. Prouver que $\forall x\in I,\ G(x)=x-\pi/4$.

c. Soit $\beta>0$. Justifier l'existence d'un seul réel α de I tel que :

$$\beta=\ln(\tan\alpha).$$

d. On suppose que si β tend vers $+\infty$ alors α tend vers $\pi/2$. Calculer en cm^2, l'aire $A(\beta)$ de la partie du plan délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\beta$ puis déterminer $\lim_{\beta\to+\infty}A(\beta)$.

Partie C :

Soit g la restriction de f sur $[0,+\infty[$.

1. a. Montrer que g est une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer, dans le repère $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe $C_{g^{-1}}$ représentative de g^{-1}.

c. Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on considère les fonctions h_n et k_n définies sur $]-\infty,0[$ par :

$$h_n(x) = \int_1^{f(x)} t(\ln t)^n dt$$
$$k_n(x) = \int_1^{f(x)} t^n \ln t\, dt.$$

a. Calculer $h_1(x)$ et $lim_{x\to-\infty} h_1(x)$.

b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$h_{n+1}(x) = \frac{1}{2}[f(x)]^2[\ln(f(x))]^{n+1} - \frac{n+1}{2} h_n(x)$$
$$k_n(x) = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}([f(x)]^{n+1} - 1)$$

c. Montrer, par récurrence sur n, que la fonction $\mathrm{h_n}$ admet en $-\infty$ une limite finie L_n. Montrer que :

$$n \geq 1\ , \qquad L_n = (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}.$$

d. Montrer que :

$$\lim_{x\to-\infty} k_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Partie D : *Dans cette partie, on se propose de calculer la limite de la suite* (S_n) *définie ci-après.*

Pour tout $n \geq 1$, posons :

$$\mathrm{U_n} = \frac{1}{(\mathrm{n}+1)^2}\ \ ;\quad \mathrm{S_n} = 1 + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}-1} \mathrm{U_i}$$

On définit la fonction φ, dérivable sur $[0,\pi/2]$ et dont la fonction dérivée est continue sur $[0,\pi/2]$ par :

$$\begin{cases} \varphi(t) = \dfrac{\frac{t^2}{\pi} - t}{sin\, t} \quad si\ t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ \varphi(0) = -1 \end{cases}$$

1. Sans calculer $\varphi'(t)$, justifier l'existence d'un réel M tel que : $\forall t \in [0,\pi/2]$, $|\varphi'(t)| \leq M$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\, sin(2n+1)t\, dt$$

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{-1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2} \varphi'(t)\, sin(2n+1)t\, dt$$

b. Montrer alors que :

$$|I_n| \leq \frac{1}{2n+1}\left(1 + \frac{\pi}{2}M\right)$$
et en déduire que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. Soit x un réel de $[0, \pi/2]$ et soit n un entier naturel non nul.

a. Exprimer la somme $\sum_{k=1}^{n} e^{i(2kx)}$ en fonction de n et x (i : le complexe tel que $i^2 = -1$).

b. En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{n} cos(2kx) = \frac{sin(2n+1)x}{2\,sin\,x} - \frac{1}{2}.$$

4.a. A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi/2} \left(\frac{t^2}{\pi} - t\right) cos(2kt)\, dt = \frac{1}{4k^2}.$$

b. En déduire que $S_n = 2I_n + \pi^2/6$ et calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Problème 4

Soit p un entier naturel, $p \geq 2$, et $a_1, a_2, \dots, a_p$ une famille de p nombres réels tels que :
$$0 < \mathrm{a}_1 < \mathrm{a}_2 < \cdots < \mathrm{a}_\mathrm{p}.$$

Partie A

Étant donné un entier naturel n, $n \geq a_p$, on considère l'équation d'inconnue réelle x :
$$(E):\ a_1^x + a_2^x + \cdots + a_p^x = n^x.$$

1. Pour k entier, $1 \leq k \leq p$, on considère la fonction :
$$g_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \left(\frac{a_k}{n}\right)^x \end{array}$$
Étudier ses variations sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et étudier sa limite en $+\infty$.
2. Soit f_n la somme des fonctions g_k, pour k compris entre 1 et p.
Préciser le sens de variation de f_n ainsi que sa limite en $+\infty$.
3. En déduire que l'équation (E) admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}_+$.

Partie B

Pour chaque $n > a_p$, on note x_n la solution de l'équation (E). On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq r}$, où r est le plus petit entier strictement supérieur à a_p.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq r$ et tout réel $x \geq 0$, on a :
$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x).$$
En déduire que la suite (x_n) est décroissante.

2. Soit c un réel strictement positif quelconque. Montrer que, pour chacun des entiers k, $1 \leq k \leq p$, la suite de terme général $v_n = \left(\frac{a_k}{n}\right)^c$ est convergente. Quelle en est sa limite ?

3. Déduire de la question précédente que la suite de terme général $f_n(c)$ est convergente. Quelle en est sa limite ?

4. Montrer qu'il existe un entier m tel que $0 < f_m(c) < 1$. En déduire que, pour tout $n \geq m$, on a : $x_n < 0$.

5. Déduire de ce qui précède que la suite $(x_n)_{n\geq r}$ admet 0 pour limite.

6. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n . \ln n = p.$$

Problème 5

Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par :

$$f(x) = \frac{2}{3}cos\, x + \frac{1}{3}$$

et $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\, \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

1. Étudier f et construire $(\mathcal{C})$.

2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0,\pi]$ vers un intervalle I que l'on précisera. Soit g sa réciproque.

b. Étudier la continuité et la dérivabilité de g sur I, puis construire la courbe $(\mathcal{C}')$ de g dans le même repère que $(\mathcal{C})$.

3. a. Montrer que $(\mathcal{C})$ coupe la droite $\Delta : y = x$ en un seul point d'abscisse $x_0 \in \,]0,\pi/2[$.

b. Calculer, en fonction de x_0, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par les deux axes du repère et les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.

Partie B : On considère la suite (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in \,]0, x_0[\\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in [0,\pi/2]$.

b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{2n} < x_0 < U_{2n+1}$.

2. Montrer que :

$$\forall x \in [0,\pi], \qquad |f(x) - x_0| \leq \frac{2}{3}|x - x_0|$$

3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |U_n - x_0| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - x_0|$$

puis que la suite (U_n) converge vers un réel que l'on déterminera.

4. Pour tout entier naturel n, on définit la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1}(U_k - x_0)$$

a. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad (-1)^{k+1}(U_k - x_0) > 0$$

b. Montrer que (S_n) est une suite strictement croissante.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |S_n| \leq 3|U_0 - x_0|$, et conclure à propos de la convergence de (S_n).

Partie C : Pour tout réel x de l'intervalle $]0,\pi[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^{f(x)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

$$G(x)=\int_0^{f(x)}\frac{tdt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

1.a. Montrer que F et G sont définies et dérivables sur $]0,\pi[$, puis calculer $F'(x)$ et $G'(x)$.

b. Exprimer alors $F(x)$ et $G(x)$ en fonction de x.

2. Pour tout réel α de l'intervalle $]0,1[$, on pose :

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

$$J(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{tdt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

$$K(\alpha)=\int_0^{\alpha}\frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}$$

a. Calculer $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ en fonction de $g(\alpha)$ puis en déduire le calcul des limites suivantes :

$$\lim_{\alpha\to 1^-} I(\alpha) \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha\to 1^-} J(\alpha).$$

b. Pour $x\in\,]-1/3,1[$, on pose :

$$\varphi(x)=x\sqrt{(1-x)(1+3x)}$$

Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout x de $]-1/3,1[$, on ait :

$$\varphi'(x)=\frac{a+bx+cx^2}{\sqrt{(1-x)(1+3x)}}.$$

En déduire $K(\alpha)$ en fonction de $I(\alpha)$, $J(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ puis calculer :

$$\lim_{\alpha\to 1^-} K(\alpha).$$

3. Pour tout nombre réel α de l'intervalle $]0,1[$, on pose :

$$L(\alpha)=\int_0^{\alpha}\sqrt{(1-t)(1+3t)}\,dt.$$

Exprimer $L(\alpha)$ en fonction de $\varphi(\alpha)$, $J(\alpha)$ et $K(\alpha)$. En déduire :

$$\lim_{\alpha\to 1^-} L(\alpha).$$

Problème 6

On considère la fonction f définie sur $[-2,+\infty[$ par :

$$f(x)=\sqrt{x+2}\cdot e^{-\frac{x}{2}}.$$

Prouver que : $\forall t\geq 0,\ 2e^{\frac{t}{2}}\geq t+2$ et $\forall t\geq 0$:

$$0<f(t)\leq\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{t}{4}}.$$

On pourra admettre ces deux résultats dans le cas où on n'arrive pas à les établir définitivement.

On définit sur $[e^{-2},+\infty[$, la fonction F par $F(x)=\int_0^{\ln x}f(t)dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $[e^{-2},+\infty[$, et que :

$$F'(x)=\sqrt{\frac{2+\ln x}{x^3}}.$$

2. Calculer $F(1)$ et en déduire que $\forall x\in[e^{-2},+\infty[$, on a :

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{\frac{2 + \ln t}{t^3}}\,dt.$$

3. Montrer que $\forall x \geq 1,\ 0 \leq F(x) \leq 4\sqrt{2}$.

4.a. Montrer que $\forall t \in [e^{-2}, 1]$, on a :

$$0 \leq \sqrt{2 + \ln t} \leq \sqrt{2}.$$

b. En déduire que $\forall x \in [e^{-2}, 1]$, on a :

$$2\sqrt{2}(1 - e) \leq F(x) \leq 0.$$

5. Donner enfin un encadrement de $F(x)$ pour $x \in [e^{-2}, +\infty[$.

Partie B : On considère la suite U définie par :

$$U_n = \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!} \int_{-2}^{-1} (x+2)^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}\,dx.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq U_n \leq e \cdot \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!}.$$

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq \frac{2^n \cdot n!}{(2n+1)!} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

3. En déduire que U converge vers une limite que l'on précisera.

4. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k \cdot k!}{(2k+1)!}.$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

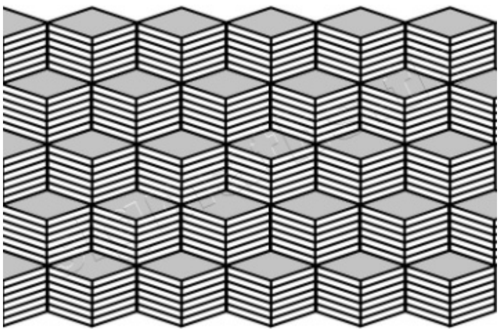
$$U_{n+1} = -2\sqrt{e} \cdot \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)!}{(2n+3)!} + U_n.$$

b. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \frac{U_0 - U_n}{2\sqrt{e}}.$$

c. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{F(e^{-1}) - F(e^{-2})}{2\sqrt{e}}.$$



Motif emprunté à Sigmaths