Menabi El ouloum – 7^{e} C/2

Exercice 1(Bac-Mauritanie-2000)

Soit un plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$. Dans tout l'exercice, α est un nombre réel donné de $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$.
A tout réel t sont associés les points M_t et N_t du plan dont les coordonnées respectives sont : $M_t(1+t\cos\alpha, 0)$ et $N_t(-1, t\sin\alpha)$.

1. Faire une figure pour $t=2$ et $\alpha=\frac{\pi}{6}$.
2. Soit G_t le milieu du segment $[M_tN_t]$. Montrer que, lorsque t parcourt $\mathbb{R}$, le point G_t décrit une droite.
3. **a.** Soit (C_t) le cercle de diamètre $[M_tN_t]$. Tracer (C_0) et (C_2).
b. Donner une équation du cercle (C_t).
c. Montrer qu'il existe un unique point noté T, distinct de N_0 tel que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, T appartienne au cercle (C_t). On ne demande pas de calculer les coordonnées de T.
4. Montrer que, pour tout réel t, on a l'égalité angulaire : $\left(\overrightarrow{TM_0},\overrightarrow{TM_t}\right)=\left(\overrightarrow{TN_0},\overrightarrow{TN_t}\right)[\pi]$.
5. A tout point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(O;\ \vec{u},\vec{v})$ du plan, on associe son affixe $z=x+iy$. Soit S l'application de P dans P qui, au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z'=x'+iy'$, avec $(x',y')\in\mathbb{R}$, définie par :$z'=iz\tan\alpha-(1+i\tan\alpha)$.
a. Montrer que S admet un unique point invariant K dont on calculera les coordonnées.
b. Reconnaître l'application S et vérifier que $S(M_t)=N_t$.
6. **a.** Montrer que K appartient au cercle (C_t) pour tout réel t.
b. En déduire que $K=T$.

Exercice 2

On considère les deux entiers $a=5n+1$ et $b=3n-3$ où $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que tout diviseur commun de a et de b est un diviseur de 18.
2. Pour quelles valeurs de n a-t-on $a\wedge b=9$?
3. Calculer n sachant que $a\wedge b=9$ et $a\vee b=1881$.

Exercice 3

Système non linéaire de deux congruences simultanées à une inconnue
Déterminer le plus petit entier naturel x tel que :

$$x\equiv 6\ [23] \text{ et } x^2\equiv 13\ [23^2].$$

Exercice 4

Déterminer la base x pour que le nombre $\overline{171}_x$ écrit en base *dix* soit un carré parfait.

Exercice 5

1. Déterminer :
a. le nombre de multiples de 13 compris entre 1 et 10 000 ;
b. Le nombre de multiples de 13^2 compris entre 1 et 10 000 ;
c. le nombre de multiples de 13^3 compris entre 1 et 10 000.
2. Existe-t-il des multiples 13^4 compris entre 1 et 10 000.
3. Montrer que le nombre 10 000! est divisible par 13^{832}.
4. **a.** Déterminer par combien de zéros se termine 100!
b. En déduire par combien de zéros se termine 127!

Prof. Sidi MAJOR