Menabi El Ouloum – 7e C/3

Exercice 1

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : (1) $x^2 - x + 1 = 0$.
   b. En déduire les solutions du système : $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ xy = 1 \end{cases}$ avec $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ et $\operatorname{Im}(y^3) \leq 0$.
2. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation : (E) $z^3 - 3z - 1 = 0$ et soit x et y deux nombres complexes tels que $xy = 1$.
   a. Montrer que $x + y$ est solution de (E) si et seulement si $x^3 + y^3 = 1$.
   b. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :$S = \left\{2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right), 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right), 2\cos\left(\frac{13\pi}{9}\right)\right\}$.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout entier n : $(n + 2)(5n^2 - 10n + 19) - 38 = 5n^3 - n$.
2. **a.** En déduire que : $\text{PGCD}(5n^3 - n, n + 2) = \text{PGCD}(n + 2, 38)$.
   b. Lorsque $d = \text{PGCD}(5n^3 - n, n + 2)$, quelles sont les valeurs possibles de d ?
3. Résoudre$\text{PGCD}(5n^3 - n, n + 2) = 19$.

Exercice 3

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Les points A, B, A' et B' ont pour affixes $i - \sqrt{3}$, i, 0 et $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

Partie A : Soit l'application f : $z \longmapsto az + b$ qui transforme A en A' et B en B'.

1. Déterminer a et b.Dans la suite, on considère la similitude σ d'expression complexe $z' = \alpha z + \omega(1 - \alpha)$ avec $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$ et $\omega = \sqrt{3} + i$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et $\mathcal{C}'$ son image par σ.
2. Montrer que σ est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{6}$, de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et de centre $\Omega(\omega)$.
3. Déterminer l'image de la droite $(A\Omega)$ par σ et en déduire que $\mathcal{C}'$ est tangent à $(O\Omega)$.
4. Déterminer le centre I et le rayon de $\mathcal{C}'$.
5. En déduire la nature de $(O\Omega I)$.

Partie B : Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = e^{i\pi/3} + \omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_{n+1} = \sigma^5(M_n)$ et on note z_n l'affixe de M_n. On définit la suite (Z_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n = z_n - \omega$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ Z_n = Z_0 \alpha^{5n}$.
2. En déduire l'expression de Z_n en fonction de n.
3. Prouver que Z_n est réel positif si et seulement si $2 + 5n \equiv 0\ [12]$.
4. Résoudre l'équation $12p + 5q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.
5. Conclure en donnant l'expression générale des entiers naturels n pour lesquels Z_n est réel positif et, en déduire dans ce cas, où se trouvent les points d'affixe z_n.

Exercice 4

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$. On désigne par a un réel et par u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = e^{ax}$.On considère l'équation (E) : $y'' - 2ay' + a^2 y = f.u$.

1. Soit y une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.Montrer que y est solution de (E) si et seulement si :
$$\exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \left(\frac{y}{u}\right)' = F + k.$$
2. En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies par :
$$x \longmapsto e^{ax} \int_0^x F(t)\,dt + kxe^{ax} + \alpha e^{ax} \quad (k, \alpha \text{ réels}).$$
3. Application : Résoudre les équations différentielles suivantes :
   - $y'' - 2y' + y = e^{2x}$
   - $y'' - 4y' + 4y = 2x + 1$
   - $y'' + 2y' + y = e^{-x} \sin x$

Prof. Sidi MAJOR