Menabi El Ouloum – 7^{e} C/6

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_0^1 \frac{2^t}{x+t} dt$ sur le domaine $D =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

a. Montrer que $\forall x < -1$ *et* $\forall t \in [0,1]$, on a : $\frac{2^t}{x+t} \leq \frac{1}{x+t}$.

b. Montrer que $\forall x < -1$, *on a* : $f(x) \leq \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$.

En déduire la valeur de : $\lim_{x \to (-1)^-} f(x)$.

c. Montrer que $\forall x > 0$ *et* $\forall t \in [0,1]$, on a : $\frac{2^t}{x+t} \geq \frac{1}{x+t}$. Montrer alors que : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que $\forall x < -1$ *et* $\forall t \in [0,1]$, on a : $|x+t| \geq -(1+x)$.

3. En déduire que :

$$\forall x < -1, \qquad |f(x)| \leq \frac{-1}{(x+1)\ln 2}.$$

Calculer alors la valeur de la limite : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

4. Montrer que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

5. Soit $x \in D$ et F une primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{-x\}$ de la fonction définie par $\varphi : t \longmapsto \frac{2^t}{x+t}$.

a. Donner en fonction de F une primitive de la fonction définie par : $t \longmapsto -\varphi(-x+t)$.

b. En déduire que :

$$f(x) = \int_x^{x+1} \varphi(-x+t)\, dt.$$

c. Conclure que :

$$f(x) = 2^{-x}u(x) \quad \text{avec} \quad u(x) = \int_x^{x+1} \frac{2^t}{t} dt.$$

d. Vérifier que : $\forall x \in D$, $u'(x) = \frac{2^{x+1}}{x+1} - \frac{2^x}{x}$ puis en déduire que $f'(x) = -(\ln 2)f(x) + \frac{x-1}{x(x+1)}$.

e. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2^t}{(x+t)^2} dt = -f'(x).$$

f. Dresser le tableau de variations de f et tracer l'allure de la courbe de f.

Exercice 2

Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 2$, à coefficients complexes. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de P, on pose :

$$R = \max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_n|) \quad \text{et} \quad A = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-1}|)$$

1. a. Montrer que si z est une racine du polynôme P, alors on a :

$$|z|^n \leq A\left(\sum_{k=0}^{n-1} |z|^k\right)$$

b. En déduire que si z est une racine de P, alors : $|z| \leq A + 1$. Quelle relation peut-on en déduire entre R et A ?

2. Application :

a. Soit le polynôme $Q(X) = X^4 - (2+i)X^3 + 4iX^2 + (i-2)X - 3i$.

i. En se basant sur les coefficients du polynôme Q, expliquer pourquoi on est sûr que les nombres complexes suivants : $5 + 2i$, $-4 + 4i$ et $4 - 3i\sqrt{2}$ ne peuvent pas être racines du polynôme Q.

ii. Expliquer pourquoi on est en doute quant aux nombres complexes : $-3 + 4i$, $1 - 2i\sqrt{6}$.

b. Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\frac{-1}{Z^5} + \frac{2+i}{Z^4} - \frac{4-3i}{Z^3} + \frac{2}{Z^2} + \frac{1-i}{Z} + 3i = 0$ ❶

Localiser les solutions de l'équation ❶.

Prof. Sidi MAJOR