Lycée Menabi El Ouloum – 7^{e} C/18

Exercice 1

On considère deux points A et B et la droite fixe (D) passant par A et telle que $(AB, (D)) = \frac{\pi}{3}[\pi]$. On désigne par J le projeté orthogonal de B sur la droite (D), par I le milieu de [AB].
Soit $\mathcal{C}$ un cercle variable passant par A et B ; on note O son centre. Le cercle $\mathcal{C}$ recoupe la droite (D) au point M. Soit (T) la tangente en M au cercle $\mathcal{C}$.

1. Soit U et U' les projetés orthogonaux de B respectivement sur (OM) et (T).
   a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe S_1 de centre B qui envoie le point O en le point M.
   b. Déterminer $S_2(O)$ où S_2 est la similitude directe de centre B, de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

2. Soit $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ les ensembles décrits respectivement par U et U' lorsque le cercle $\mathcal{C}$ varie.
   a. Déterminer la nature de $\mathcal{E}$.
   b. Reconnaître le point U dans les deux cas :
   → Si le point O est situé sur la droite (D) ;
   → Si $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABL où L est le point d'intersection de la médiatrice de [AB] et de la droite (D).
   c. Déterminer la nature de $\mathcal{E}'$.
   d. Reconnaître le point U' dans le cas où la droite (D) est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point A.
   e. Construire $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$.

3. Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles distincts sécants en A et B et de centres respectifs O_1 et O_2. Ces deux cercles recoupent la droite (D) aux points M_1 et M_2. Les droites (T_1) et (T_2) sont tangentes respectivement aux cercles Γ_1 et Γ_2 en M_1 et M_2 et elles se coupent en un point P.
   a. Montrer que :
$$\begin{cases} (\overrightarrow{BM_1}, \overrightarrow{BM_2}) = (\overrightarrow{BO_1}, \overrightarrow{BO_2})[2\pi] \\ \dfrac{BM_2}{BM_1} = \dfrac{BO_2}{BO_1} \end{cases}$$
   b. En déduire que M_2 est l'image de M_1 par la similitude directe de centre B qui envoie le cercle Γ_1 en le cercle Γ_2.
   c. Justifier que (T_2) est l'image de (T_1) par cette même similitude.
   d. En déduire que le point P appartient au cercle circonscrit au triangle BM_1M_2.

Exercice 2

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé d'origine O.

1. **a.** Étudier les variations de la fonction f. En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $0 \leq f(x) \leq 1$.
   b. Tracer $\mathcal{C}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \ln(\tan x)$.
   a. Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$.
   b. Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur $\mathbb{R}$ et calculer $h(0)$.
   c. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x de $\mathbb{R}$: $2h'(x) = f(x)$.
   En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$: $\int_0^x f(x)dx = 2h(x) - \frac{\pi}{2}$.

Partie B : Soit n un entier naturel non nul et F_n la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $F_n(x) = \int_0^x f^n(t)dt$.

1. **a.** Calculer $F_1(x)$ en fonction de $h(x)$ et montrer que : $\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = \frac{\pi}{2}$.
   b. Soit K la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $K(t) = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$. Montrer que $K'(t) = f^2(t)$.
   c. Calculer alors $F_2(x)$ et montrer que $\lim_{x\to+\infty} F_2(x) = 1$.

2. **a.** Montrer que l'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ par F_n est l'intervalle $[0, \lim_{x\to+\infty} F_n(x)[$.
   b. Vérifier que pour tout réel t positif ou nul, on a $f(t) \leq 2e^{-t}$. En déduire, en utilisant A.1.a, que pour tout x de $[0, +\infty[$, on a : $F_n(x) \leq 2$ et que $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$ est finie.
   c. Vérifierque pour tout réel t positif ou nul, on a $f(t) \geq e^{-t}$. Montrer que pour tout réel x positif, on a :
$$\frac{1 - e^{-nx}}{n} \leq F_n(x).$$
   En déduire que $\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$ est non nul.

3. Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \lim_{x\to+\infty} F_n(x)$.
   a. Donner la valeur de u_1 et la valeur de u_2.
   b. En remarquant que $4 - (e^t + e^{-t})^2 = -(e^t - e^{-t})^2$, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, +\infty[$, on a :
$$f^{n-1}(t)f'(t)K(t) = f^{n+2}(t) - f^n(t).$$
   c. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0, +\infty[$, on a :

$$\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)dt = \frac{1}{n}K(x)f^n(x) - \frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)dt.$$

d. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $[0, +\infty[$, on a : $(n+1)F_{n+2}(x) - nF_n(x) = K(x)f^n(x)$.

Montrer alors que : $u_{n+2} = \frac{n}{n+1}u_n$.

4. a. Soit n un entier naturel. Déterminer, en fonction de n, les deux termes u_{2n+1} et u_{2n+2}.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. Montrer que pour tout entier n, on a : $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$.

En déduire la valeur de : $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$.

d. Montrer alors que : $\lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{3\times5\times\ldots\times(2n-1)}\right)^2 \times \frac{2}{2n+1}\right] = \pi$.

Exercice 3

Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$.

1. Démontrer que la suite (I_n) est positive et décroissante.

2. a. Déterminer la dérivée de la fonction : $x \longmapsto \tan^{n+1} x$.

b. En déduire que :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ ①;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$;
- $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = I_{n+4} - I_n$. Utiliser ① pour démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(n) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+1}.$$

3. a. Calculer I_2.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(2) + f(6) + f(10) + \cdots + f(4n-2) = I_{4n+2} - I_2$.

c. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots - \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

4. a. Calculer I_1.

b. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

Prof. Sidi MAJOR