Lycée Menabi El Ouloum – 7e C/16

Exercice 1 (Mauritanie -1999)

Soit [AB] un segment de longueur a, et M un point variable de ce segment. On construit d'un même côté de la droite (AB) les triangles équilatéraux PAM et QMB ; C est le point d'intersection des droites (AP) et (BQ) ; I est le milieu de [AC] et J celui de [BC].

1. Quel est l'ensemble des milieux O de [PQ] lorsque M décrit le segment [AB] ?
2. Démontrer qu'il existe une rotation qui transforme P en Q et I en J. En déduire que la médiatrice de [PQ] passe par un point fixe F. Que représente F pour le triangle ABC ?Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle MPQ ?
3. K désigne le centre du cercle circonscrit au triangle PQC.
   Quel est l'ensemble des points K lorsque le point M décrit le segment [AB] ?
4. Construire les points P et Q lorsque :
   a. On connaît la direction de la droite (PQ) ;
   b. On connaît la longueur du segment [PQ].

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct$(O;\ \vec{u},\vec{v})$. Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, -1 et i. A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tels que :

$$z' = \frac{z-1}{z+1}.$$

1. Montrer que si $M \in \mathcal{C}(O,1) \setminus \{B\}$ alors $M' \in\ (O,\overrightarrow{v})$.
2. Soit $\theta \in]0,\pi[$. On considère l'équation $\mathbb{E}:\ z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$.
   a. Déterminer les racines carrées de $e^{i\theta} - 1$ sous forme exponentielle.
   b. Résoudre alors $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{C}$.
3. Soit M_1 et M_2 d'affixes respectives :
$$z_1 = e^{i\theta} + \sqrt{2\sin\theta}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \ \text{ et }\ z_2 = e^{i\theta} - \sqrt{2\sin\theta}\,e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$$
   a. Vérifier que $\mathrm{Im}(z_1) \neq 0$.
   b. En déduire que les points A, B et M_1 ne sont pas alignés.
   c. Montrer que $\frac{z_1'}{z_2'} = -1$. En déduire que les points A, B, M_1 et M_2 sont cocycliques.
   d. Montrer que $e^{i\theta} - i = -2i\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$. En déduire que M_1 appartient à un cercle fixe de centre C dont on précisera le rayon.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\forall n \geq 3, \qquad \pi(2n+1) \geq \ln(2) \times \frac{2n+1}{\ln(2n+1)}$$

où $\pi(x)$ désigne le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x.

1. Soient n et p deux entiers naturels. On pose :
$$I_{p,n} = \int_0^1 x^p(1-x)^n dx$$
   a. Calculer $I_{p,0}$ et $I_{p,1}$.
   b. Calculer $I_{0,n}$ et en déduire $I_{1,n}$.
   c. Établir, pour $n \geq 1$, la relation :
$$I_{p,n} = \frac{n}{p+1} I_{p+1,n-1}.$$
   En déduire que
$$I_{p,n} = \frac{n!\,p!}{(n+p+1)!}.$$
   d. Calculer $I_{n,n}$ en utilisant la formule du binôme Newton pour le développement de $(1-x)^n$ puis en déduire l'égalité :
$$\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{n+k+1}.$$

2. Soit D_n le PPCM des entiers $n+1, n+2, \dots, 2n+1$.
   a. Montrer qu'il existe un entier naturel $a \geq 1$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{n+k+1} = \frac{a}{D_n}.$$

b. En déduire que $D_n \geq \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

c. Soit $D_n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ la décomposition en facteurs premiers de l'entier D_n. Justifier que pour tout i compris entre 1 et k, $p_i^{\alpha_i}$ divise l'un des entiers $n+1, n+2, \dots, 2n+1$. En déduire que $p_i^{\alpha_i} \leq 2n+1$ puis que $k \leq \pi(2n+1)$.

3. a. Montrer que $D_n \leq (2n+1)^{\pi(2n+1)}$.

b. Montrer par récurrence que pour tout naturel $n \geq 3$:

$$\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \geq 2^{2n+1}$$

c. En déduire la minoration annoncée en début de l'exercice.

Exercice 4

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$.

Partie B : Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois entiers a, b et c tels que la parabole : $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1 ; 1), B(–1 ; –1) et C(2 ; 5).

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que :

$$M \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C : Retour au cas général

a, b, c , p , q , r sont des entiers.Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(1 ; p), B(–1 ; q) et C(2 ; r).

On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole : $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers, alors $\begin{cases} -3p + q + 2r \equiv 0 \ [6] \\ 3p - 3q \equiv 0 \ [6] \\ 6p + 2q - 2r \equiv 0 \ [6] \end{cases}$.

2. En déduire que $\begin{cases} q - r \equiv 0 \ [3] \\ p - q \equiv 0 \ [2] \end{cases}$.

3. Réciproquement, on admet que si $\begin{cases} q - r \equiv 0 \ [3] \\ p - q \equiv 0 \ [2] \end{cases}$ et si A, B, C ne sont pas alignés, alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation passe par les points A, B et C.

a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si 2r + q – 3p = 0.

b. On choisit p = 7. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

Prof. Sidi MAJOR