Lycée Menabi El Ouloum – 7^{e} C/16

Exercice 1

Soient dans le plan trois points fixes A, B et O alignés et deux à deux distincts. Soit (C) un cercle variable de centre I tangent en O à la droite (AB). Les autres tangentes à (C) issues de A et B se coupent en M.
On pose : $OA = a$ et $OB = b$ et on suppose que $a > b$.

1. On suppose dans cette question que le point O appartient au segment [AB].
 a. Montrer que la différence $MA - MB$ est constante.
 b. En déduire que le point M varie sur une hyperbole dont on précisera les foyers et les sommets.
 c. Déterminer la tangente en M à cette hyperbole.

2. On suppose dans cette question que le point O n'appartient pas au segment [AB].
 a. Montrer que la somme $MA + MB$ est constante.
 b. En déduire que le point M varie sur une ellipse (E) dont on précisera les foyers et les sommets du grand axe.
 c. Déterminer la tangente en M à cette ellipse.

3. Soit Δ la tangente à (C) parallèle à (AB), l'autre tangente à (C) issue de A coupe Δ en un point N. On désigne par A' le symétrique de A par rapport à O et par (d) la perpendiculaire à (AB) passant par A'.
 a. Montrer que le point N varie sur une parabole dont on précisera le foyer, le sommet et la directrice.
 b. Déterminer la tangente en N à cette parabole.

Exercice 2

Partie A : Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}, & x \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On admet que f' est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

2. Justifier l'existence d'un réel $M > 0$ tel que :$\forall(a,b) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \times \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $|f(b) - f(a)| \leq M \times |b - a|$.

Partie B : Pour tous entiers n et $p \geq 1$, on pose :

$$\alpha_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(nx)dx \quad \text{et} \quad \alpha_{n,p} = \sum_{k=0}^{p-1} f\left(\frac{k\pi}{2p}\right)\int_{\frac{k\pi}{p}}^{\frac{(k+1)\pi}{p}} \sin(nx)\,dx.$$

1. Montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a :$\left|\alpha_n - \alpha_{n,p}\right| \leq \frac{M\pi^2}{4p}$.
2. Soit $p \geq 1$ fixé. Après avoir calculé la quantité $\int_{\frac{k\pi}{p}}^{\frac{(k+1)\pi}{p}} \sin(nx)\,dx$, montrer que :$\lim_{n\to+\infty} \alpha_{n,p} = 0$.
3. Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, il existe un entier N_0 tel que l'on ait :$n \geq N_0 \implies |\alpha_n| \leq \frac{M\pi^2}{2p}$.
 (On pourra utiliser l'inégalité: $|\alpha_n| \leq \left|\alpha_n - \alpha_{n,p}\right| + \left|\alpha_{n,p}\right|$).

Partie C : On pose pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin x}dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{x}dx.$$

1. Justifier l'existence de I_n et J_n.
2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$(Utiliser les résultats de la partie B).
3. **a.** Exprimer la différence $I_n - I_{n-2}$ en fonction de $n \geq 2$.
 b. En déduire le calcul de I_{2k+1}.
 c. Calculer $\lim_{k\to+\infty} I_{2k+1}$.
4. En utilisant un changement de variable affine, montrer que :$\lim_{k\to+\infty} \int_0^{k\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{u}du = \frac{\pi}{2}$.
 Donner une interprétation géométrique de cette limite.

Prof. Sidi MAJOR