Lycée Menabi El Ouloum – 7e C/15

Exercice 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n e^{-nx}$. On note C_n la courbe de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

1. **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction f_n.

b. Déterminer les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}.

2. **a.** Tracer C_1 et C_2 en précisant les demi-tangentes à l'origine.

b. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe C_1 et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = n$.

c. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Partie B : Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \geq 1$, on pose :$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

1. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a : $0 \leq f_1(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$.

2. **a.** Montrer alors que, pour tout nombre réel $t \geq 0$ et tout entier $n \geq 1$, on a :$0 \leq f_n(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$.

b. En déduire que, pour tout nombre réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :$0 \leq F_n(x) \leq 2$.

Partie C : Pour tout réel $u \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$G_n(u) = \int_0^u t^n e^{-t} dt.$$

1. **a.** Montrer que pour tout entiers $n \geq 2$:$G_n(u) = -u^n e^{-u} + nG_{n-1}(u)$.

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$:

$$G_n(u) = -n!\, e^{-u} \sum_{p=2}^{n} \frac{u^p}{p!} + n!\, G_1(u).$$

2. Montrer alors que pour tout entier $n \geq 1$:$\lim_{u\to+\infty} G_n(u) = n!$

3. **a.** Montrer que, pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a : $G'_n(nx) = n^n f_n(x)$.

b. Montrer alors que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}} G_n(nx).$$

c. En déduire la valeur de :$\lim_{x\to+\infty} F_n(x)$.

Exercice 2

Soient α et β deux nombres complexes quelconques. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et pour tout complexe z :

$$f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$$

1. Montrer que $f(1) + f(j) + f(j^2) = 3$. (On notera que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$).
2. a. En déduire que $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$.

   b. En déduire que l'un au moins des réels $|f(1)|$, $|f(j)|$ et $|f(j^2)|$ est supérieur ou égal à 1.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$. ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité O et tel que l'affixe de A soit un réel r strictement positif fixé. I et J sont deux points quelconques du plan d'affixes respectives a et b.Dans cette question on prend :

$$\alpha = -\frac{a+b}{r} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{ab}{r^2}$$

   a. Montrer que les affixes respectives de B et C sont $r.j$ et $r.j^2$.

   b. Montrer que $BO \times BI \times BJ = r^3|f(j)|$. Calculer de la même manière $CO \times CI \times CJ$ et $AO \times AI \times AJ$.

   c. Montrer que le triangle ABC a au moins un sommet S vérifiant : $SO \times SI \times SJ \geq r^3$.

Prof. Sidi MAJOR