Lycée Menabi El Ouloum – 7e C/7

Exercice 1

Considérons une droite $\mathcal{D}$ du plan, passant par deux points distincts A et B, C est un point quelconque du plan. Notons H le projeté orthogonal du point C sur la droite $\mathcal{D}$.

La **matrice de Gram** associée aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est la matrice carrée d'ordre 2 définie par :

$$G = \begin{pmatrix} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Justifier que CH est la distance du point C à la droite $\mathcal{D}$, que l'on notera d(C, $\mathcal{D}$).

b. Prouver que :

$$[d(C,\mathcal{D})]^2 = \frac{\det (G)}{AB^2}$$

où $\det (G)$ désigne le déterminant de la matrice de Gram G.

2. Munissons le plan d'un repère orthonormé et considérons la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 2x + 3$ ainsi que le point C de coordonnées (3, 6) dans ce repère.

a. Déterminer les coordonnées de deux points distincts A et B de cette droite $\mathcal{D}$.

b. Calculer les coefficients de la matrice de Gram associée aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. A partir des résultats de la question 1.b., déterminer la distance du point C à la droite $\mathcal{D}$.

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de déterminer un encadrement du nombre : $S_n = \ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.

1. Tracer la courbe (C) de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

2. Pour tout entier naturel non nul p, on désigne par A_p le point de coordonnées (p, 0).

a. Construire les rectangles de bases $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, …, $[A_{n-1}A_n]$ et de hauteurs respectives $\ln 2$, $\ln 3$, …, $\ln n$. Montrer que la somme des aires de ces rectangles est S_n.

b. En utilisant une autre couleur qu'au a, construire les rectangles de bases $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, …, $[A_{n-1}A_n]$ et de hauteurs $\ln 1$, $\ln 2$, …, $\ln(n-1)$.Calculer la somme des aires de ces rectangles.

c. Interpréter graphiquement l'intégrale :$I_n = \int_1^n \ln x\, dx$où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

d. A l'aide de considérations géométriques, déduire que : $S_{n-1} \leq I_n \leq S_n$ pour $n \geq 2$.

3. **a.** Prouver à l'aide du 2. d, que pour tout entier $n \geq 2$: $I_n \leq S_n \leq I_n + \ln n$.

b. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n.

c. Expliciter l'encadrement de S_n ainsi obtenu.

4. En déduire un encadrement de p tel que : $10^p \leq 1000! < 10^{p+1}$. Conclure quant au nombre de chiffres de 1000 !.

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :$z^3 + \lambda z^2 - \bar{\lambda} z - 1 = 0$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

1. **a.** Montrer que si z_0, z_1 et z_2 sont solutions de (E) alors $z_0 \times z_1 \times z_2 = 1$.

a. Montrer que si z_0 est une solution de (E) alors $\frac{1}{z_0}$ est aussi une solution.

c. Déduire que (E) admet au moins une solution de module 1.

2. On suppose dans la suite que $|\lambda| = 1$.

a. Vérifier que $(-\lambda)$ est une solution.

b. On suppose que $\lambda = e^{i\theta}$, déterminer les solutions de (E).

3. Utiliser ce qui précède pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$2z^3 + (1 + i\sqrt{3})z^2 - (1 - i\sqrt{3})z - 2 = 0.$$

Prof. Sidi MAJOR